This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

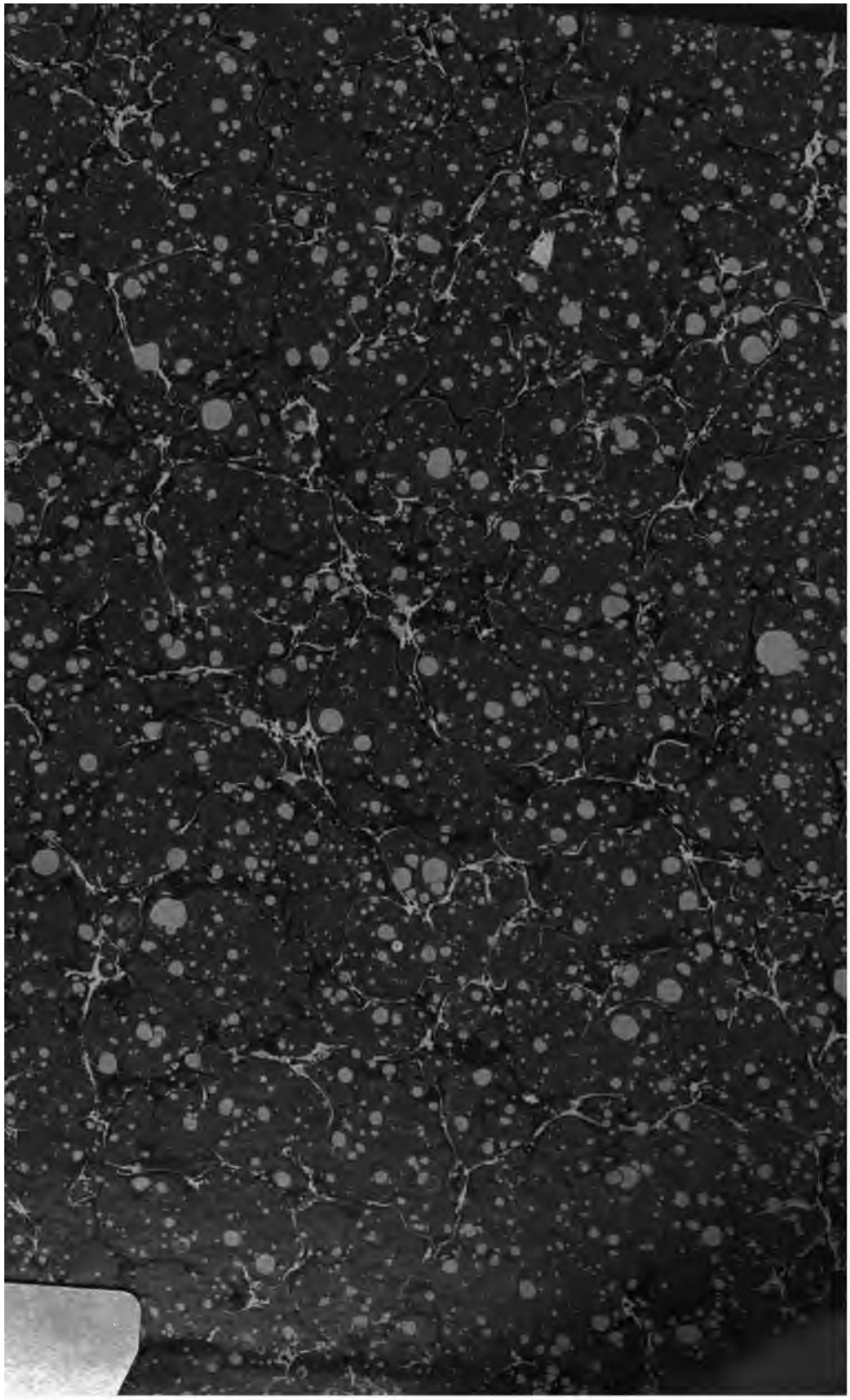
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

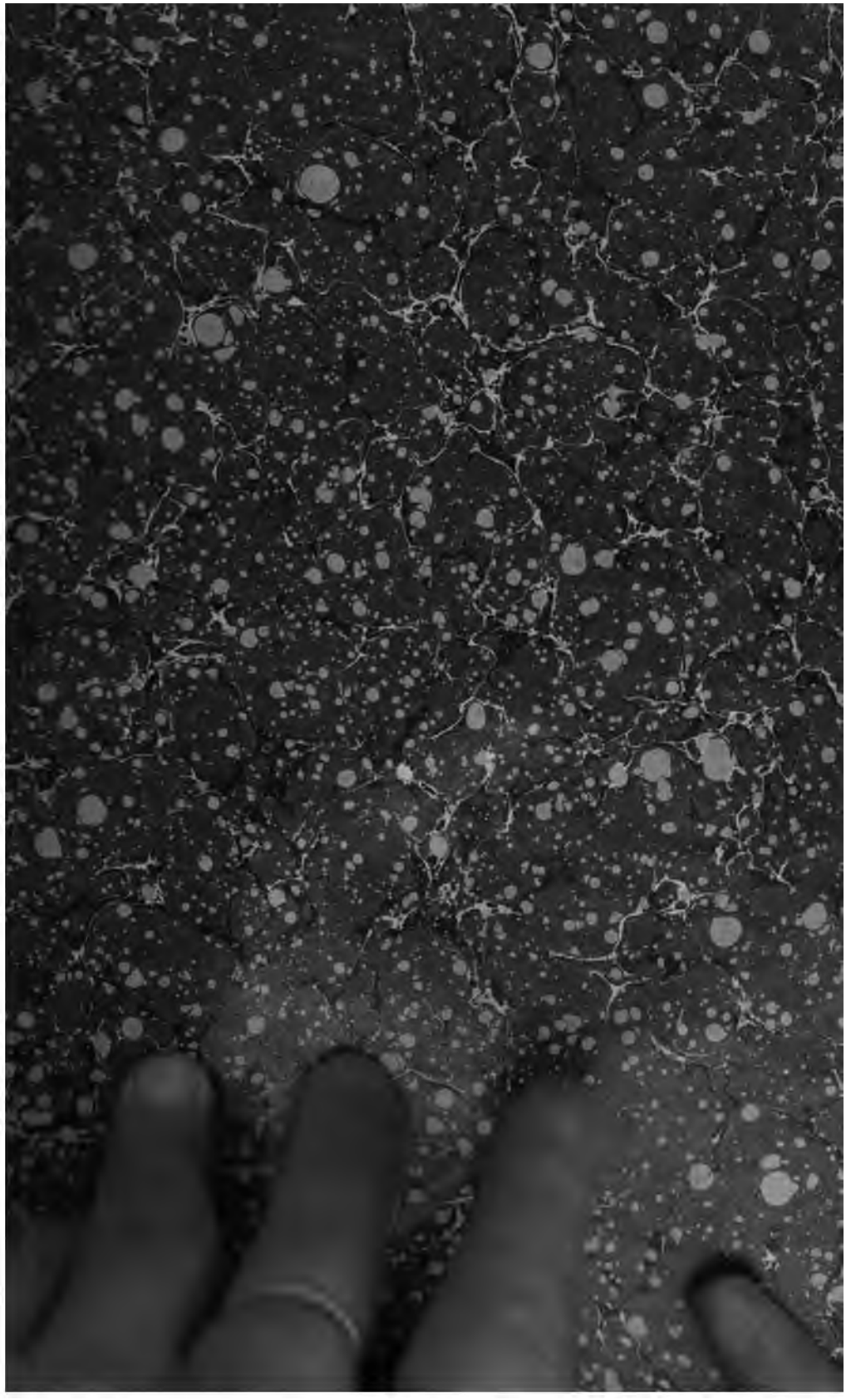
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries
3 6105 001 021 950





MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

51. Band.

Mit 2 Tafeln.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
a.36176

Inhalt des einundfünfzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Anissimoff, W., in Warschau. Sur les méthodes d'intégration des équations différentielles ordinaires et quelques applications de la méthode de différentiation 181

——— Sur une formule nouvelle relative aux déterminants et son application à la théorie des équations différentielles linéaires 388

Berzolari, Luigi, in Turin. Sur les faisceaux de formes binaires cubiques, pour lesquels on donne une forme du faisceau syzygétique déterminé par la jacobienne 473

Bolza, Oskar, in Chicago. Zur Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung auf elliptische mittels einer Transformation dritten Grades. Nachtrag 478

Broden, T., in Lund. Ueber die Darstellung von reellen Functionen mit unendlich dicht liegenden Nullstellen durch unendliche Producte, deren Factoren ganze analytische Functionen sind 299

v. Dantscher, Victor, in Graz. Zur Theorie der Maxima und Minima einer Function von n Veränderlichen 227

Darwin, G. H., in Cambridge. Periodic orbits. With a plate of figures . 523

Enriques, Fédérigo, in Bologna. Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues . . 134

Franel, J., in Zürich. Sur une formule utile dans la détermination de certaines valeurs asymptotiques 369

Hilbert, David, in Göttingen. Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers 1

Horn, J., in Charlottenburg. Untersuchung der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung vermittelst successiver Annäherungen 346

——— Ueber eine Differentialgleichung erster Ordnung 360

Hoyer, P., in Burg b./Magdeburg. Neue Grundlagen der Gruppen- und Substitutionentheorie 445

Hurwitz, A., in Zürich. Ueber die Entwickelungscoefficienten der lemniscatischen Functionen 196

Klein, Felix, in Göttingen. Ueber den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken 128

Kneser, Adolph, in Dorpat. Ableitung hinreichender Bedingungen des Maximums oder Minimums einfacher Integrale aus der Theorie der zweiten Variation 321

Koenigsberger, Leo, in Heidelberg. Ueber die Erniedrigung der Anzahl der unabhängigen Parameter Lagrangescher Bewegungsgleichungen durch Erhöhung der Ordnung des kinetischen Potentials 584

Lachtin, L., in Moskau. Die Differentialresolventen einer algebraischen Gleichung 6. Grades mit einer Gruppe 360. Ordnung 463

Seite

Love, A. E., in Cambridge. Note on a Problem in Hydrodynamics . . . 158

Lüroth, J., in Freiburg i. B. Studien über die geodätische Abbildung . . 161

Maschke, H., in Chicago. Bestimmung aller ternären und quaternären Collineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternirenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind 253

Morley, F., in Haverford. Some Polar Constructions 410

Moore, Eliakim Hastings, in Chicago. Concerning the General Equations of the Seventh and Eighth Degrees 417

Schilling, Friedrich, in Karlsruhe. Ueber die Theorie der symmetrischen S-Functionen mit einem einfachen Nebenpunkte. Mit einer Figurentafel 481

Schur, Friedrich, in Karlsruhe. Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie 401

Scorza, G., in Pisa. Sopra le figure polari delle curve piane del 3° ordine 154

Preisaufgabe der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Für das Jahr 1901 159

Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers.

Von

David Hilbert in Göttingen.

Einleitung.

Es sei ein beliebiger Zahlkörper k zu Grunde gelegt; der Grad dieses Körpers k heisse m und die $m-1$ zu k conjugirten Zahlkörper mögen mit $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ bezeichnet werden. Die Anzahl der Idealklassen des Körpers k werde h genannt.

Bezeichnet μ irgend eine ganze Zahl in k, die nicht gleich dem Quadrat einer Zahl in k ist, so bestimmt $\sqrt{\mu}$ zusammen mit den Zahlen des Körpers k einen Körper vom Grade $2m$, welcher relativquadratisch in Bezug auf den Körper k ist und mit $K(\sqrt{\mu})$ oder auch kurz mit K bezeichnet wird. Es entsteht die Aufgabe, die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper aufzustellen und zu begründen. Dieses Problem erscheint mir als eine naturgemässe Verallgemeinerung desjenigen Problems, das den Gegenstand der „disquisitiones arithmeticae" von Gauss bildet.

Die Theorie des relativquadratischen Körpers führte mich zur Entdeckung eines allgemeinen Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste, welches das gewöhnliche Reciprocitätsgesetz zwischen rationalen Primzahlen nur als ein vereinzeltes Glied in einer Kette der wunderbarsten und mannigfaltigsten Zahlenbeziehungen erscheinen lässt.

Die Methoden, welche ich im Folgenden zur Untersuchung der relativquadratischen Körper angewandt habe, sind bei gehöriger Verallgemeinerung auch in der Theorie der relativ-Abel'schen Körper von beliebigem Relativgrade mit gleichem Erfolge verwendbar und führen dann insbesondere zu den allgemeinsten Reciprocitätsgesetzen für beliebig hohe Potenzreste innerhalb eines beliebigen algebraischen Zahlenbereiches*).

*) Vgl. das von der K. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen für das Jahr 1891 gestellte Preisthema.

Wenn man den in der vorliegenden Arbeit dargelegten Beweis des allgemeinen Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste auf die von Kummer behandelte Theorie der l^{ten} Potenzreste im Körper der l^{ten} Einheitswurzeln überträgt, so entsteht ein neuer Beweis des Kummer'schen Reciprocitätsgesetzes für l^{te} Potenzreste, welcher sich sowohl von den Kummer'schen wie von meinen bisher gegebenen Beweisen wesentlich dadurch unterscheidet, dass darin das besondere aus der Kreistheilung herstammende Eisenstein'sche Reciprocitätsgesetz *nicht* zur Verwendung gelangt.

Unter den Anwendungen meiner Theorie nenne ich hier die Aufstellung der Kriterien dafür, dass eine quadratische diophantische Gleichung mit beliebigen algebraischen Coefficienten in dem durch diese Coefficienten bestimmten Rationalitätsbereiche lösbar ist.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in *zwei Abschnitte*. Der *erste* Abschnitt behandelt die *allgemeinen Definitionen und vorbereitenden Sätze* in der Theorie der relativquadratischen Körper für einen *beliebigen* Grundkörper k; der *zweite* Abschnitt entwickelt *vollständig* die Theorie des relativquadratischen Körpers in Bezug auf einen solchen Grundkörper k, der nebst seinen sämmtlichen conjugirten Körpern *imaginär* ist und überdies eine *ungerade Classenanzahl* h besitzt. Was den Fall eines beliebigen Grundkörpers k betrifft, so gedenke ich die wichtigsten Sätze der entsprechenden Theorie demnächst in den Göttinger Nachrichten mit einer kurzen Angabe der Beweise zu veröffentlichen*).

I.

Allgemeine Definitionen und vorbereitende Sätze.

§ 1.

Quadratische Reste und Nichtreste im Grundkörper k und das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$.

Definition 1. Es sei $\mathfrak{p}$ ein in der Zahl 2 nicht aufgehendes Primideal des Körpers k und α eine beliebige zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k: dann heisse α in k *quadratischer Rest* nach $\mathfrak{p}$, wenn α congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{p}$ wird, d. h. wenn die Congruenz

$$\xi^2 \equiv \alpha, \qquad (\mathfrak{p})$$

durch eine ganze Zahl ξ des Körpers k befriedigt werden kann; im anderen Falle heisse α *quadratischer Nichtrest* nach $\mathfrak{p}$. Wir

*) Vgl. meinen in der Mathematiker-Vereinigung zu Braunschweig 1897 gehaltenen Vortrag „Ueber die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper".

definiren jetzt das *Symbol* $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$, indem wir, wenn α in k quadratischer Rest nach $\mathfrak{p}$ ist,

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

und im anderen Fall

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = -1$$

setzen.

Satz 1. Wenn $\mathfrak{p}$ ein beliebiges in 2 nicht aufgehendes Primideal des Körpers k und α eine zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k ist, so gilt nach dem Modul $\mathfrak{p}$ die Congruenz

$$\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}} \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right), \qquad (\mathfrak{p}),$$

worin $n(\mathfrak{p})$ die Norm des Primideals $\mathfrak{p}$ im Körper k bedeutet.

Beweis. Ist $\alpha \equiv \beta^2$ nach $\mathfrak{p}$, wo β wieder eine ganze Zahl in k bedeutet, so folgt nach dem Fermat'schen Satze*) sofort

$$\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}} \equiv \beta^{n(\mathfrak{p})-} \equiv +1, \qquad (\mathfrak{p}).$$

Wir nehmen andererseits an, es sei α quadratischer Nichtrest nach $\mathfrak{p}$; bezeichnen wir dann mit ϱ eine Primitivzahl nach $\mathfrak{p}$ im Körper k und setzen $\alpha \equiv \varrho^a$ nach $\mathfrak{p}$, so muss hierin offenbar der Exponent a eine ungerade Zahl sein. Nach dem Fermat'schen Satze ist aber

$$\varrho^{n(\mathfrak{p})-1} \equiv +1, \qquad (\mathfrak{p})$$

und folglich

$$\varrho^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}} \equiv \pm 1, \qquad (\mathfrak{p}). \tag{1}$$

Da in der Reihe der Potenzen $\varrho, \varrho^2, \varrho^3, \ldots$ die Potenz $\varrho^{n(\mathfrak{p})-1}$ die erste sein soll, welche $\equiv +1$ nach $\mathfrak{p}$ wird, so gilt nothwendig auf der rechten Seite der Congruenz (1) das negative Vorzeichen und demzufolge wird

$$\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}} \equiv \varrho^{a\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}} \equiv -1, \qquad (\mathfrak{p}).$$

Aus dem eben bewiesenen Satze 1 folgen leicht die weiteren Thatsachen:

Satz 2. Wenn α, β irgend zwei zu dem Primideal $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahlen in k sind, so gilt stets die Gleichung

$$\left(\frac{\alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right).$$

Ein vollständiges System von $n(\mathfrak{p}) - 1$ zu $\mathfrak{p}$ primen und einander

*) Vgl. meinen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstatteten Bericht „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper". 1897, Satz 22 S. 191 und Satz 24 S. 192. Ich werde in der vorliegenden Abhandlung diesen Bericht von mir kurz mit „Algebraische Zahlkörper" citiren.

nach $\mathfrak{p}$ incongruenten Zahlen zerfällt in zwei Theilsysteme, von denen das eine aus den $\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}$ quadratischen Resten nach $\mathfrak{p}$, das andere aus den $\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}$ quadratischen Nichtresten nach $\mathfrak{p}$ besteht.

§ 2.

Die Begriffe Relativnorm, Relativdifferente und Relativdiscriminante.

Definition 2. Jede Zahl A des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ kann in die Gestalt

$$\mathsf{A} = \alpha + \beta\sqrt{\mu}$$

gebracht werden, wo α, β ganze oder gebrochene Zahlen des Körpers k sind; ist dies geschehen, so heisse die Zahl

$$S\mathsf{A} = \alpha - \beta\sqrt{\mu},$$

die vermöge der Substitution

$$S = (\sqrt{\mu} : -\sqrt{\mu})$$

aus A entspringende oder zu A *relativconjugirte Zahl* in $K(\sqrt{\mu})$. Die Zahl

$$\mathsf{A} - S\mathsf{A}$$

heisse die *Relativdifferente der Zahl* A im Körper $K(\sqrt{\mu})$. Der grösste gemeinsame Theiler der Relativdifferenten aller *ganzen* Zahlen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$, d. h. das Ideal

$$\mathfrak{D} = (\Omega_1 - S\Omega_1,\ \Omega_2 - S\Omega_2,\ \ldots)$$

heisse die *Relativdifferente des Körpers* $K(\sqrt{\mu})$ in Bezug auf den Körper k.

Das Product einer Zahl A des Körpers K mit der relativconjugirten Zahl $S\mathsf{A}$ heisst die *Relativnorm der Zahl* A und wird mit $N(\mathsf{A})$ bezeichnet; es ist also

$$N(\mathsf{A}) = \mathsf{A} \,.\, S\mathsf{A}.$$

Die Relativnorm $N(\mathsf{A})$ einer Zahl A in K ist stets eine Zahl in k.

Ist $\mathfrak{J} = (\mathsf{l}_1, \mathsf{l}_2, \ldots)$ ein beliebiges Ideal des Körpers K und wendet man auf sämmtliche ganze Zahlen $\mathsf{l}_1, \mathsf{l}_2, \ldots$ dieses Ideals die Substitution S an, so heisst das so entstehende Ideal das zu $\mathfrak{J}$ *relativconjugirte Ideal* und wird mit $S\mathfrak{J}$ bezeichnet; es ist also

$$S\mathfrak{J} = (S\mathsf{l}_1, S\mathsf{l}_2, \ldots).$$

Das Product eines Ideals $\mathfrak{J}$ des Körpers K mit dem relativconjugirten Ideal $S\mathfrak{J}$ heisst die *Relativnorm des Ideals* $\mathfrak{J}$ und wird mit $N(\mathfrak{J})$ bezeichnet; es ist also

$$N(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J} \,.\, S\mathfrak{J}.$$

Die Relativnorm eines Ideals $\mathfrak{J}$ in K ist stets ein Ideal in k.

Das Quadrat der Relativdifferente einer Zahl A des Körpers K d. h. die Zahl $(A - SA)^2$ heisst die *Relativdiscriminante der Zahl* A. Die Relativdiscriminante einer Zahl A in K ist stets eine Zahl in k.

Das Quadrat der Relativdifferente des Körpers K

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{D}^2 = (\Omega_1 - S\Omega_1,\ \Omega_2 - S\Omega_2, \ldots)^2$$

heisst die *Relativdiscriminante des Körpers* K. Da die Relativdifferente $\mathfrak{D}$ des Körpers K ein solches Ideal des Körpers K ist, das seinem relativ conjugirten Ideale gleich wird, so ist die Relativdiscriminante $\mathfrak{d}$ auch gleich der Relativnorm der Relativdifferente $\mathfrak{D}$ des Körpers K; es ist daher die Relativdiscriminante $\mathfrak{d}$ stets ein Ideal in k.

§ 3.

Das ambige Ideal.

Definition 3. Ein Ideal $\mathfrak{A}$ des Körpers K heisst ein *ambiges Ideal*, wenn dasselbe bei der Operation S ungeändert bleibt, d. h. wenn

$$S\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$$

ist und wenn ausserdem $\mathfrak{A}$ kein von 1 verschiedenes Ideal des Körpers k als Factor enthält. Insbesondere heisst ein Primideal des Körpers K ein *ambiges Primideal*, wenn dasselbe bei Anwendung der Substitution S ungeändert bleibt und nicht zugleich im Körper k liegt. Jedes ambige Ideal ist ein Product von ambigen Primidealen. Das Quadrat eines ambigen Primideals ist gleich der Relativnorm desselben und stellt im Körper k selbst ein Primideal dar.

Satz 3*). Die Relativdifferente $\mathfrak{D}$ des relativquadratischen Körpers K enthält alle und nur diejenigen Primideale, welche ambig sind.

§ 4.

Die Primfactoren der Relativdiscriminante.

Unsere nächste Aufgabe ist es, die Primfactoren der Relativdiscriminante $\mathfrak{d}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ wirklich zu ermitteln. Diese Aufgabe wird durch den folgenden Satz gelöst:

Satz 4. Es sei $\mathfrak{p}$ ein zu 2 primes Primideal des Körpers k; geht dann $\mathfrak{p}$ in der Zahl μ genau zur a^{ten} Potenz auf, so enthält, wenn der Exponent a ungerade ist, die Relativdiscriminante $\mathfrak{d}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ stets den Factor $\mathfrak{p}$. Ist dagegen der Exponent a gerade, so fällt die Relativdiscriminante $\mathfrak{d}$ prim zu $\mathfrak{p}$ aus.

---

*) Vergl. „Algebraische Zahlkörper" Satz 93, S. 277, woselbst dieser Satz allgemein für relativcyklische Körper von einem Primzahlgrade aufgestellt und bewiesen worden ist.

Es sei $\mathfrak{l}$ ein Primideal des Körpers k, welches in 2 aufgeht und zwar genau zur l^{ten} Potenz; ferner gehe $\mathfrak{l}$ in μ genau zur a^{ten} Potenz auf: so ist die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ stets dann und nur dann zu $\mathfrak{l}$ prim, wenn im Körper k eine ganze Zahl α vorhanden ist, die der Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^2, \qquad (\mathfrak{l}^{2l+a}) \tag{1}$$

genügt.

Beweis. Gehen wir zunächst auf den ersten Theil des Satzes 3 ein. Es sei π eine durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbare ganze Zahl in k, und weiter sei ν eine durch $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$ theilbare, aber zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k.

Ist der Exponent a ungerade, so stellt $\mu^* = \frac{\mu \cdot \nu^{a-1}}{\pi^{a-1}}$ eine durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbare ganze Zahl in k dar von der Art, dass die Zahl $\sqrt{\mu^*}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ liegt und wenn wir den gemeinsamen Idealtheiler von $\mathfrak{p}$ und $\sqrt{\mu^*}$ mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen, so ist

$$\mathfrak{P} = S\mathfrak{P}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{P}^2.$$

Das Ideal $\mathfrak{P}$ ist also ein ambiges Primideal und nach Satz 3 tritt dasselbe daher in der Relativdifferente $\mathfrak{D}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ als Factor auf; es ist also die Relativdiscriminante $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar.

Ist dagegen der Exponent a gerade, so stellt $\mu^* = \frac{\mu \nu^a}{\pi^a}$ eine zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k dar, von der Art, dass $\sqrt{\mu^*}$ in $K(\sqrt{\mu})$ liegt; da die Relativdiscriminante der Zahl $\sqrt{\mu^*}$ den Werth $2^2\mu^*$ hat, so ist sie zu $\mathfrak{p}$ prim. Das Gleiche gilt mithin von der Relativdiscriminante $\mathfrak{d}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$.

Jetzt betrachten wir die Verhältnisse in Betreff des Primfactors $\mathfrak{l}$. Ist die Congruenz (1) erfüllt, so muss $\mathfrak{l}$ in der Zahl α^2 genau zur a^{ten} Potenz aufgehen und mithin ist der Exponent a eine gerade Zahl. Es sei nun λ eine durch $\mathfrak{l}$, aber nicht durch $\mathfrak{l}^2$ theilbare ganze Zahl in k und weiter sei ν eine durch $\frac{\lambda}{\mathfrak{l}}$ theilbare, aber zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl in k: der Ausdruck

$$\Omega = \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{l+\frac{a}{2}} (\alpha + \sqrt{\mu})$$

stellt dann eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ dar, da die beiden Ausdrücke

$$\Omega + S\Omega = \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{l+\frac{a}{2}} \cdot 2\alpha,$$

$$\Omega \cdot S\Omega = \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{2l+a} (\alpha^2 - \mu)$$

offenbar ganze Zahlen in k sind. Andererseits hat die Relativdiscriminante der Zahl Ω den Werth

$$(\Omega - S\Omega)^2 = \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{2l+a} \cdot 2^2\mu$$

und ist mithin prim zu $\mathfrak{l}$; das Gleiche gilt also für die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$.

Setzen wir umgekehrt voraus, die Relativdiscriminante $\mathfrak{d}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ sei prim zu $\mathfrak{l}$, so folgt wegen

$$\begin{aligned}\mathfrak{d} &= (\Omega_1 - S\Omega_1, \quad \Omega_2 - S\Omega_2, \quad \ldots)^2 \\ &= ([\Omega_1 - S\Omega_1]^2, [\Omega_2 - S\Omega_2]^2, \ldots),\end{aligned}$$

dass dann nothwendig im Körper $K(\sqrt{\mu})$ eine ganze Zahl Ω existiren muss, deren Relativdiscriminante $[\Omega - S\Omega]^2$ zu $\mathfrak{l}$ prim ausfällt; wir setzen

$$\Omega = \frac{\alpha^* + \beta^*\sqrt{\mu}}{\gamma^*},$$

wo α^*, β^*, γ^* ganze Zahlen in k bezeichnen, die bez. genau durch die $a^{*\text{te}}$, $b^{*\text{te}}$, $c^{*\text{te}}$ Potenz von l aufgehen mögen. Da nun $[\Omega - S\Omega]^2 = \frac{2^2\beta^{*2}\mu}{\gamma^{*2}}$ eine zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl sein soll, so folgt

$$2l + 2b^* + a = 2c^*, \tag{2}$$

und da andererseits die Relativnorm $N(\Omega) = \frac{\alpha^{*2} - \beta^{*2}\mu}{\gamma^{*2}}$ eine ganze Zahl ist, so müssen entweder beide der Zahlen α^{*2} und $\beta^{*2}\mu$ genau durch die gleiche Potenz von $\mathfrak{l}$ aufgehen oder es müsste jede dieser beiden Zahlen mindestens durch $\mathfrak{l}^{2c^*}$ theilbar sein. Das letztere ist nicht der Fall, weil wegen der eben abgeleiteten Gleichung (2) jedenfalls $2b^* + a < 2c^*$ ausfällt und daher $\beta^{*2}\mu$ sicher nicht durch $\mathfrak{l}^{2c^*}$ theilbar sein kann. Es ist daher nothwendigerweise $2a^* = 2b^* + a$ und mithin wegen (2) auch $2l + 2a^* = 2c^*$ oder $l + a^* = c^*$. Aus $2a^* = 2b^* + a$ folgt ferner $a^* \geqq b^*$ und aus $l + a^* = c^*$ folgt $c^* > a^*$; mithin ist auch $c^* > b^*$. Da $\frac{\alpha^{*2} - \beta^{*2}\mu}{\gamma^{*2}}$ eine ganze Zahl sein soll, so haben wir die Congruenz

$$\mu \equiv \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2, \qquad (\mathfrak{l}^{2c^*-2b^*}).$$

Wegen $a^* \geqq b^*$ lässt sich der Bruch $\frac{\alpha^*}{\beta^*}$ in der Gestalt eines Bruches schreiben, dessen Nenner zu $\mathfrak{l}$ prim ausfällt, und es ist somit $\frac{\alpha^*}{\beta^*}$ nothwendig einer gewissen ganzen Zahl α des Körpers k nach $\mathfrak{l}^{2c^*-2b^*}$ congruent, so dass auch die Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^2, \qquad (\mathfrak{l}^{2c^*-2b^*})$$

gilt. Hierdurch ist mit Rücksicht auf die aus (2) folgende Gleichung $2c^* - 2b^* = 2l + a$ die Richtigkeit des Satzes 4 vollständig gezeigt.

Aus diesem Satze 4 entnehmen wir leicht die folgende besondere Thatsache:

Satz 5. Wenn μ eine beliebige zu 2 prime ganze Zahl in k bedeutet, die nicht das Quadrat einer Zahl in k wird, so ist die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ stets dann und nur dann zu 2 prim, wenn μ dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 congruent wird.

§ 5.

Die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers k im relativquadratischen Körper K.

Die Frage, wie die Primideale des relativquadratischen Körpers K durch Zerlegung aus den Primidealen des Körpers k entstehen, erledigt sich in den folgenden Sätzen:

Satz 6. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k ist stets dann und nur dann in Körper K gleich dem Quadrat eines Primideals $\mathfrak{P}$, wenn $\mathfrak{p}$ in der Relativdiscriminante des Körpers K aufgeht.

Beweis. Aus $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^2$ folgt $\mathfrak{p} = (S\mathfrak{P})^2$ und mithin $\mathfrak{P} = S\mathfrak{P}$, d. h. $\mathfrak{P}$ ist ein ambiges Primideal des Körpers K und als solches nach Satz 3 in der Relativdifferente des Körpers K enthalten, d. h. $\mathfrak{p}$ geht dann in der Relativdiscriminante auf.

Wenn wir umgekehrt annehmen, dass $\mathfrak{p}$ in der Relativdiscriminante des Körpers K aufgehe und mit $\mathfrak{P}$ einen in $\mathfrak{p}$ aufgehenden Primfactor des Körpers K bezeichnen, so geht offenbar $\mathfrak{P}$ in der Relativdifferente des Körpers K auf und ist mithin nach Satz 3 ein ambiges Ideal, d. h. es ist nach Definition 3 $\mathfrak{P} = S\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{P}$. Wegen dieser Beziehungen ist auch $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{P}.S\mathfrak{P}$, und hieraus folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}.S\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^2$. Damit ist der Beweis für den Satz 6 erbracht.

Satz 7. Wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Körpers k bedeutet, welches weder in 2 noch in μ aufgeht, so ist $\mathfrak{p}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei von einander verschiedene Primideale weiter zerlegbar oder unzerlegbar, je nachdem μ im Körper k quadratischer Rest oder Nichtrest nach $\mathfrak{p}$ ist.

Beweis. Es sei μ in k quadratischer Rest nach $\mathfrak{p}$ und demgemäss etwa α eine ganze Zahl in k so, dass die Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^2, \qquad (\mathfrak{p})$$

gilt; alsdann bilden wir die zu einander relativconjugirten Ideale des Körpers $K(\sqrt{\mu})$

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{p}, \alpha - \sqrt{\mu}),$$
$$S\mathfrak{P} = (\mathfrak{p}, \alpha + \sqrt{\mu})$$

und erhalten leicht

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P}.$$

Wegen

$$(\mathfrak{p},\ \alpha - \sqrt{\mu},\quad \alpha + \sqrt{\mu}) = 1$$

sind $\mathfrak{P}$ und $S\mathfrak{P}$ von einander verschieden.

Es sei umgekehrt das Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers K in zwei Primideale $\mathfrak{P}$ und $S\mathfrak{P}$ zerlegbar: dann gelten, wenn allgemein N die Norm im Körper $K(\sqrt{\mu})$ und n die Norm im Körper k bezeichnet, die Gleichungen

$$\mathrm{N}(\mathfrak{p}) = \mathrm{N}(\mathfrak{P}) \cdot \mathrm{N}(S\mathfrak{P}) = \big(\mathrm{N}(\mathfrak{P})\big)^2,$$

$$\mathrm{N}(\mathfrak{p}) = \big(n(\mathfrak{p})\big)^2$$

und mithin ist

$$\mathrm{N}(\mathfrak{P}) = n(\mathfrak{p}).$$

Die Gleichheit dieser Normen $\mathrm{N}(\mathfrak{P})$ und $n(\mathfrak{p})$ lässt die Thatsache erkennen, dass eine jede ganze Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ einer ganzen Zahl des Körpers k nach $\mathfrak{P}$ congruent gesetzt werden kann, da ja irgend $n(\mathfrak{p})$ nach $\mathfrak{p}$ einander incongruente Zahlen zugleich auch in $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{P}$ ein volles Restsystem bilden müssen; setzen wir insbesondere $\sqrt{\mu} \equiv \alpha$ nach $\mathfrak{P}$, wo α in k liegen soll, so folgt $\mu \equiv \alpha^2$ nach $\mathfrak{P}$, und da $\mu - \alpha^2$ eine Zahl in k ist, so muss $\mu \equiv \alpha^2$ auch nach $\mathfrak{p}$ gelten, d. h. es ist μ quadratischer Rest nach $\mathfrak{p}$. Damit ist der Satz 7 vollständig bewiesen.

Satz 8. Es sei $\mathfrak{l}$ ein in 2 enthaltenes Primideal des Körpers k und zwar gehe $\mathfrak{l}$ genau zur l^{ten} Potenz in 2 auf; ferner sei μ eine zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl in k, welche dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}^{2l}$ congruent ausfällt, so dass nach Satz 4 das Primideal $\mathfrak{l}$ nicht in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ vorkommt: dann ist $\mathfrak{l}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei von einander verschiedene Primideale weiter zerlegbar oder unzerlegbar, jenachdem μ dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}^{2l+1}$ congruent ausfällt oder nicht.

Beweis. Ist $\mathfrak{l}$ in $K(\sqrt{\mu})$ weiter zerlegbar und bedeutet $\mathfrak{L}$ einen Primfactor von $\mathfrak{l}$, so schliessen wir aus der Gleichheit der Norm $\mathrm{N}(\mathfrak{L})$ in $K(\sqrt{\mu})$ mit der Norm $n(\mathfrak{l})$ in k, wie im Beweise des Satzes 7, dass jede ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{L}$ congruent sein muss. Nach Voraussetzung giebt es eine ganze Zahl α in k, so dass $\mu \equiv \alpha^2$ nach $\mathfrak{l}^{2l}$ ausfällt; ist dann λ irgend eine durch $\mathfrak{l}$, aber nicht durch $\mathfrak{l}^2$ theilbare ganze Zahl in k und weiter ν eine durch $\frac{\lambda}{\mathfrak{l}}$ theilbare, aber zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl in k, so stellt, wie wir dem Beweise des Satzes 4 entnehmen, der Ausdruck $\frac{\nu^l(\alpha + \sqrt{\mu})}{\lambda^l}$ eine ganze

Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ dar. Es giebt also nach dem vorhin Bewiesenen eine ganze Zahl β in k, für welche

$$\frac{\nu^l(\alpha+\sqrt{\mu})}{\lambda^l} \equiv \beta, \quad (\mathfrak{L})$$

wird. Aus dieser Congruenz schliessen wir

$$\sqrt{\mu} \equiv -\alpha + \frac{\beta\lambda^l}{\nu^l}, \quad (\mathfrak{l}^l\mathfrak{L}).$$

Mit Rücksicht auf den Umstand, dass ν zu $\mathfrak{l}$ prim ist, können wir in dieser Congruenz den rechts stehenden Ausdruck durch eine ganze Zahl γ des Körpers k ersetzen und erhalten dann

$$\sqrt{\mu} \equiv \gamma \quad \text{oder} \quad \sqrt{\mu} - \gamma \equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^l\mathfrak{L}). \tag{1}$$

Da ferner $-\gamma \equiv +\gamma$ nach dem Modul 2 und folglich auch nach $\mathfrak{l}^l$ ausfällt, so gilt auch die Congruenz

$$\sqrt{\mu} + \gamma \equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^l) \tag{2}$$

und durch Multiplication erhalten wir schliesslich aus den beiden Congruenzen (1) und (2):

$$\mu - \gamma^2 \equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{2l}\mathfrak{L}).$$

Da die linke Seite dieser Congruenz eine ganze Zahl in k ist, so folgt auch

$$\mu - \gamma^2 \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \mu \equiv \gamma^2, \quad (\mathfrak{l}^{2l+1})$$

womit eine Aussage des Satzes 8 bewiesen ist.

Nehmen wir nun umgekehrt an, es sei $\mu \equiv \alpha^2$ nach $\mathfrak{l}^{2l+1}$, wobei α eine ganze Zahl in k ist, so erkennen wir leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$\mathfrak{l} = \left(\mathfrak{l}, \frac{\nu^l[\alpha+\sqrt{\mu}]}{\lambda^l}\right)\left(\mathfrak{l}, \frac{\nu^l[\alpha-\sqrt{\mu}]}{\lambda^l}\right)$$

und hier sind die beiden Primideale rechter Hand wegen

$$\left(\mathfrak{l}, \frac{\nu^l[\alpha+\sqrt{\mu}]}{\lambda^l}, \frac{\nu^l[\alpha-\sqrt{\mu}]}{\lambda^l}\right) = 1$$

in der That von einander verschieden; damit ist der Satz 8 vollständig bewiesen.

§ 6.

Das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$.

Definition 4. Wir erweitern nunmehr die Bedeutung des in Definition 1 erklärten *Symbols* in folgender Weise:

Ist $\mathfrak{w}$ irgend ein Primideal in k, so setzen wir

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1 \quad \text{oder} \quad = -1 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $\mathfrak{w}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei von einander verschiedene Primideale weiter zerlegbar oder nicht zerlegbar oder gleich dem Quadrat eines Primideals wird. Ist μ das Quadrat einer Zahl in k, so setzen wir stets

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1.$$

Es ist nach den Sätzen 6, 7, 8 leicht möglich, in allen Fällen den Werth des Symbols $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ zu berechnen und wir erkennen aus Satz 7 im Falle, dass $\mathfrak{w}$ zu 2 und μ prim ausfällt, die volle Uebereinstimmung mit der Definition 1. Was insbesondere den Fall anbetrifft, dass $\mathfrak{w}$ gleich einem in 2 aufgehenden Primideal $\mathfrak{l}$ des Körpers k ist, so bestimmen wir zunächst die höchste Potenz von $\mathfrak{l}$, welche in μ aufgeht. Ist der Exponent a dieser Potenz ungerade, so haben wir gewiss $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = 0$; ist a dagegen gerade, so bestimmen wir, wenn λ eine durch $\mathfrak{l}$, aber nicht durch $\mathfrak{l}^2$ theilbare Zahl bedeutet, eine ganze zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl μ^* in k der Art, dass

$$\mu \equiv \lambda^a \mu^*, \qquad (\mathfrak{l}^{2l+a+1}).$$

Ist hier μ^* nicht dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}^{2l}$ congruent, so haben wir mit Rücksicht auf die Sätze 4 und 6 ebenfalls $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = 0$; im anderen Fall unterscheiden wir, ob μ^* dem Quadrat einer ganzen Zahl in k auch nach $\mathfrak{l}^{2l+1}$ congruent ausfällt oder nicht, und haben wegen Satz 8 dementsprechend $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ oder $= -1$.

Definition 5. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal des Körpers k und hat man $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\ldots\mathfrak{w}$, wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{w}$ Primideale in k sind, so möge, wenn μ eine beliebige ganze Zahl in k ist, das *Symbol* $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ durch die folgende Gleichung definirt werden:

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right)\cdots\left(\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right).$$

Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ beliebige Ideale in k, so gilt dann offenbar die Gleichung

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{\mu}{\mathfrak{b}}\right).$$

Das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ ist durch diese Festsetzungen stets definirt, sobald μ irgend eine ganze Zahl in k und $\mathfrak{a}$ irgend ein Ideal in k bedeutet. Das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ ist nur der Werthe $+1$, -1, 0 fähig.

§ 7.

Normenreste und Normennichtreste des Körpers K und das Symbol $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$.

Definition 6. *Es sei $\mathfrak{w}$ irgend ein Primideal in k, und es seien ν, μ beliebige ganze Zahlen in k, nur dass μ nicht gleich dem Quadrat einer Zahl in k ausfällt: wenn dann ν nach $\mathfrak{w}$ der Relativnorm einer ganzen Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ congruent ist und wenn ausserdem auch für jede höhere Potenz von $\mathfrak{w}$ stets eine solche ganze Zahl A im Körper $K(\sqrt{\mu})$ gefunden werden kann, dass $\nu \equiv N(\mathsf{A})$ nach jener Potenz von $\mathfrak{w}$ ausfällt, so nenne ich ν einen Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$. In jedem anderen Falle nenne ich ν einen Normennichtrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$.*

Ich definire das Symbol $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$, indem ich

$$\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1 \quad \text{oder} \quad = -1$$

setze, je nachdem ν Normenrest oder Normennichtrest nach $\mathfrak{w}$ ist. Fällt μ gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl in k aus, so werde stets

$$\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

gesetzt.

Das neue Symbol $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ ist durch diese Festsetzungen in jedem Falle definirt, sobald ν, μ irgend zwei ganze Zahlen des Körpers k und $\mathfrak{w}$ irgend ein Primideal des Körpers k bedeuten. Das Symbol $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ ist nur der beiden Werthe $+1$ oder -1 fähig.

§ 8.

Eigenschaften des Symbols $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)$.

In den folgenden Sätzen entwickeln wir einige Eigenschaften des Symbols $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ für den Fall, dass $\mathfrak{p}$ ein nicht in 2 aufgehendes Primideal bedeutet.

Satz 9. Wenn ν, μ irgend beliebige ganze Zahlen in k bedeuten und $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Körpers k ist, das zu 2 und zu ν prim ausfällt, aber in μ genau zur ersten Potenz aufgeht, so gilt stets die Gleichung

$$\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right).$$

Beweis. Ist $\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, so giebt es nach Definition 1 eine ganze Zahl α in k, für welche $\nu \equiv \alpha^2$ nach $\mathfrak{p}$ wird. Um zu zeigen, dass dann die Congruenz $\nu \equiv \xi^2$ auch nach jeder beliebigen Potenz von $\mathfrak{p}$ durch geeignete Wahl von ξ lösbar ist, setzen wir

$$\frac{\nu}{\alpha^2} \equiv 1 + 2\omega, \qquad (\mathfrak{p}^2),$$

so dass dabei ω eine ganze durch $\mathfrak{p}$ theilbare Zahl in k bedeutet. Die ganze Zahl $\alpha' = \alpha(1+\omega)$, erfüllt dann die Bedingung

$$\nu \equiv \alpha'^2, \qquad (\mathfrak{p}^2).$$

Durch gehörige Fortsetzung dieses Verfahrens erkennen wir, dass für jeden Exponenten e eine ganze Zahl $\alpha^{(e-1)}$ existirt, so dass

$$\nu \equiv (\alpha^{(e-1)})^2, \qquad (\mathfrak{p}^e)$$

ausfällt. Setzen wir $\mathsf{A} = \alpha^{(e-1)}$, so folgt

$$\nu \equiv N(\mathsf{A}), \qquad (\mathfrak{p}^e),$$

d. h. es hat unter der obigen Annahme das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ den Werth $+1$.

Machen wir umgekehrt die Annahme $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, so giebt es nach Definition 6 eine ganze Zahl A in $K(\sqrt{\mu})$, für welche $\nu \equiv N(\mathsf{A})$ nach $\mathfrak{p}$ wird. Da nach Satz 4 das Primideal $\mathfrak{p}$ in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, so ist nach Satz 6 das Primideal $\mathfrak{p}$ gleich dem Quadrat eines Primideals $\mathfrak{P}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$. Aus der Gleichung $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^2$ folgt die Gleichheit der Normen $n(\mathfrak{p})$ in k und $N(\mathfrak{P})$ in $K(\sqrt{\mu})$ und, wie im Beweise des Satzes 7, schliessen wir dann auch hier, dass jede ganze Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ einer ganzen Zahl des Körpers k nach $\mathfrak{P}$ congruent sein muss. Setzen wir insbesondere $\mathsf{A} \equiv \alpha$ nach $\mathfrak{P}$, wo α eine ganze Zahl in k ist, so folgt

$$\nu \equiv N(\mathsf{A}) \equiv \alpha^2, \qquad (\mathfrak{P})$$

und daher ist auch $\nu \equiv \alpha^2$ nach $\mathfrak{p}$, d. h. unter der gegenwärtigen Annahme erhalten wir $\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$; hiermit und durch das vorhin Bewiesene wird der Satz 9 vollständig als richtig erkannt.

Satz **10.** Wenn ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen in k bedeuten und $\mathfrak{p}$ ein weder in ν noch in μ noch in 2 aufgehendes Primideal in k ist, so gilt stets die Gleichung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1.$$

Beweis. Nach Satz 4 geht $\mathfrak{p}$ nicht in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ auf; wir haben demgemäss nur zwei Annahmen zu behandeln, je nachdem $\mathfrak{p}$ in zwei von einander verschiedene Primideale des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ zerlegbar ist oder in $K(\sqrt{\mu})$ unzerlegbar bleibt.

Wir nehmen zunächst $\mathfrak{p}$ als zerlegbar an und zwar sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} . S\mathfrak{P}$, wo $\mathfrak{P}$ ein Primideal des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet. Es giebt dann gewiss in $K(\sqrt{\mu})$ ein System von zwei ganzen Zahlen A_1, A_2, für welche die beiden in A_1, A_2 linearen Congruenzen

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} A_1 + A_2\sqrt{\mu} &\equiv \nu \\ A_1 - A_2\sqrt{\mu} &\equiv 1 \end{aligned}\right\}, \qquad (\mathfrak{P})$$

erfüllt sind. Nun können wir wegen der Gleichheit der Normen $n(\mathfrak{p})$ und $N(\mathfrak{P})$, wie im Beweise zu Satz 7 und zu Satz 9, jede ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ einer ganzen Zahl des Körpers k nach $\mathfrak{P}$ congruent setzen; es sei demgemäss

$$(2) \qquad A_1 \equiv \alpha_1, \quad A_2 \equiv \alpha_2, \qquad (\mathfrak{P}),$$

wo α_1, α_2 ganze Zahlen in k sind. Wenn wir dann zur Abkürzung

$$A = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{\mu}$$

setzen, so folgt wegen (2) durch Multiplication der Congruenzen (1) die Congruenz

$$\nu \equiv N(A), \qquad (\mathfrak{P})$$

und da beide Seiten dieser Congruenz ganze Zahlen in k sind, so gilt sie auch nach dem Modul $\mathfrak{p}$. Um zu beweisen, dass die Congruenz $\nu \equiv N(\Xi)$ durch geeignete Wahl der ganzen Zahl Ξ in $K(\sqrt{\mu})$ auch nach jeder Potenz $\mathfrak{p}^\nu$ des Primideals $\mathfrak{p}$ lösbar ist, zeigen wir, wie im Beweise zu Satz 9, die Existenz einer Zahl ξ, welche der Congruenz

$$\frac{\nu}{N(A)} \equiv \xi^{n}, \qquad (\mathfrak{p}^\nu)$$

genügt; dann ist offenbar $\nu \equiv N(\xi A)$ nach $\mathfrak{p}^\nu$.

Es sei andererseits $\mathfrak{p}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ nicht weiter zerlegbar und somit nach Satz 7 die Zahl μ quadratischer Nichtrest nach $\mathfrak{p}$. Nach Satz 2 giebt es in k genau $f = \frac{n^f - 1}{2}$ quadratische Reste nach $\mathfrak{p}$: es seien diese durch die Quadratzahlen $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_f^2$ vertreten. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, je nachdem die Zahl -1 quadratischer Rest oder Nichtrest nach $\mathfrak{p}$ ist.

Im ersteren Falle sind wegen unserer Annahme über μ die $n^f - 1$ Zahlen

$$(3) \qquad \alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_f^2, \quad -\alpha_1^2\mu, -\alpha_2^2\mu, \ldots, -\alpha_f^2\mu$$

sämmtlich nach $\mathfrak{p}$ unter einander incongruent. Es ist daher jede zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k einer der Zahlen 3 nach $\mathfrak{p}$ congruent. Die Zahlen 3 sind bez. die Relativnormen der Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_f, \quad \alpha_1\sqrt{\mu}, \quad \alpha_2\sqrt{\mu}, \ldots, \quad \alpha_f\sqrt{\mu}$$

und es ist mithin jede zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl in k der Relativnorm einer geeigneten ganzen Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$ congruent.

Ist -1 quadratischer Nichtrest nach $\mathfrak{p}$, so wird $-\mu$ quadratischer Rest nach $\mathfrak{p}$; es sei $-\mu \equiv \beta^2$ nach $\mathfrak{p}$, wo β eine ganze Zahl in k bedeutet. In der Reihe der ganzen rationalen positiven Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots, n(\mathfrak{p}) - 1$$

ist die letzte Zahl Nichtrest nach $\mathfrak{p}$; es sei r die erste Zahl dieser Reihe, auf welche ein Nichtrest des Primideals $\mathfrak{p}$ folgt. Wir setzen $r \equiv \alpha^2$ nach $\mathfrak{p}$, wo α eine ganze Zahl in k bedeutet: dann ist die ganze Zahl $\alpha^2\beta^2 - \mu$ wegen

$$\alpha^2\beta^2 - \mu \equiv r\beta^2 + \beta^2 \equiv (r+1)\,\beta^2, \qquad (\mathfrak{p})$$

sicher quadratischer Nichtrest nach $\mathfrak{p}$, und es fallen folglich die $n(\mathfrak{p}) - 1$ Zahlen

$$(4) \quad \alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_f^2, \alpha_1^2(\alpha^2\beta^2 - \mu), \alpha_2^2(\alpha^2\beta^2 - \mu), \ldots, \alpha_f^2(\alpha^2\beta^2 - \mu)$$

sämmtlich unter einander incongruent nach $\mathfrak{p}$ aus. In diesem Falle ist also jede zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl in k einer der Zahlen (4) nach $\mathfrak{p}$ congruent. Die Zahlen (4) sind aber bez. die Relativnormen der Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_f, \ \alpha_1(\alpha\beta + \sqrt{\mu}), \ \alpha_2(\alpha\beta + \sqrt{\mu}), \ldots, \alpha_f\,(\alpha\beta + \sqrt{\mu})$$

und es ist mithin jede zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k der Relativnorm einer ganzen Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ congruent. Hieraus schliesst man weiter, wie im ersten Theil dieses Beweises, dass zu jeder nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbaren Zahl ν des Körpers k auch für eine beliebig hohe Potenz $\mathfrak{p}^e$ des Primideals $\mathfrak{p}$ stets eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ gefunden werden kann, deren Relativnorm der Zahl ν nach $\mathfrak{p}^e$ congruent ist. Damit ist Satz 10 in allen Fällen bewiesen.

Satz 11. Wenn ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen in k bedeuten und $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Körpers k ist, das zu 2 und zu μ prim ausfällt, aber in ν genau zur ersten Potenz aufgeht, so gilt stets die Gleichung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right).$$

Beweis. Ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, so wird nach Satz 7 das Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k in zwei von einander verschiedene Primideale $\mathfrak{P}$ und $S\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ weiter zerlegbar. Wir bestimmen eine ganze Zahl A in $K(\sqrt{\mu})$, welche durch $\mathfrak{P}$, aber weder durch $\mathfrak{P}^2$ noch durch $S\mathfrak{P}$ theilbar ist; dann geht die Relativnorm $\alpha = N(\mathrm{A})$ der Zahl A genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ auf. Es sei ϱ eine durch $\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}$ theilbare, aber zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k, dann ist $\frac{\nu\varrho^2}{\alpha}$ eine ganze zu $\mathfrak{p}$ prime

Zahl und daher zufolge des Satzes 10 Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$. Bedeutet $\mathfrak{p}^e$ eine beliebige Potenz von $\mathfrak{p}$ und setzen wir

$$\frac{\nu\varrho^2}{\alpha} \equiv N(\mathsf{P}), \qquad (\mathfrak{p}^e),$$

wo P eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet, und bestimmen dann ϱ^* als ganze Zahl in k, so dass $\varrho\varrho^* \equiv 1$ nach $\mathfrak{p}^e$ ausfällt, so wird offenbar

$$\nu \equiv N(\varrho^*\mathsf{PA}), \qquad (\mathfrak{p}^e)$$

d. h. es ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$.

Umgekehrt, wenn ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ ist und etwa $\nu \equiv N(\Omega)$ nach $\mathfrak{p}^2$ ausfällt, wo Ω eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ ist, so geht $N(\Omega)$ wegen der über ν gemachten Annahme nur durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ auf; wir haben daher offenbar

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}, \Omega)\,(\mathfrak{p}, S\Omega),$$

d. h. $\mathfrak{p}$ zerfällt in $K(\sqrt{\mu})$ in ein Product von zwei Idealen und mithin ist nach Satz 7 $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$. Damit ist der Satz 11 vollständig bewiesen.

Satz 12. Es sei $\mathfrak{p}$ ein zu 2 primes Primideal des Körpers k, ferner seien ν, μ, ν^*, μ^* vier ganze Zahlen in k von der Beschaffenheit, dass $\frac{\mu}{\mu^*}$ das Quadrat einer ganzen oder gebrochenen Zahl in k und $\frac{\nu}{\nu^*}$ die Relativnorm einer ganzen oder gebrochenen Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ wird: dann gilt stets die Gleichung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right).$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass wegen der Definition 6 des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ offenbar stets die Gleichung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right) \tag{5}$$

gilt, da offenbar der durch $\sqrt{\mu^*}$ bestimmte relativquadratische Körper mit dem Körper $K(\sqrt{\mu})$ übereinstimmt.

Ferner wollen wir beweisen, dass, wenn γ die Relativnorm $N(\Gamma)$ einer ganzen Zahl Γ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ ist, stets

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\gamma\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) \tag{6}$$

ausfällt.

In der That, wenn ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$ ist, so wird offenbar auch $\gamma\nu$ Normenrest dieses Körpers nach $\mathfrak{p}$. Die umgekehrte Annahme, dass $\gamma\nu$ Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$ ist, behandeln wir in folgender Weise: Es gehe ν genau durch

die b^{te} Potenz von $\mathfrak{p}$ und γ genau durch die c^{te} Potenz von $\mathfrak{p}$ auf; es sei ferner Ω eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$, so dass die Congruenz

$$\gamma\nu \equiv N(\Omega), \qquad (\mathfrak{p}^{c+e}) \tag{7}$$

gilt, wobei e einen beliebigen Exponenten, der grösser als b ist, bedeutet. Wir unterscheiden nun drei Fälle, je nachdem $\mathfrak{p}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ Primideal bleibt oder in zwei gleiche oder in zwei von einander verschiedene Primideale des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ weiter zerlegbar ist.

Im ersten Falle muss wegen $\gamma = N(\Gamma)$ der Exponent c gerade sein und $\mathfrak{p}$ in Γ genau zur $\frac{c}{2}^{ten}$ Potenz aufgehen; ferner erkennen wir aus (7), dass Ω genau durch die $\frac{c+b}{2}^{te}$ Potenz von $\mathfrak{p}$ theilbar sein muss. Nun sei α eine durch $\frac{\gamma}{\mathfrak{p}^c}$ theilbare, aber zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k. Dann ist $A = \frac{\alpha\Omega}{\Gamma}$ gewiss eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ und wir erhalten $\alpha^2\nu \equiv N(A)$ nach $\mathfrak{p}^e$. Bestimmen wir noch eine ganze Zahl α^* in k, so dass $\alpha\alpha^* \equiv 1$ nach $\mathfrak{p}^e$ ausfällt, so folgt $\nu \equiv N(\alpha^* A)$ nach $\mathfrak{p}^e$, d. h. ν ist Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$.

Im zweiten Falle setzen wir $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^2$, so dass $\mathfrak{P}$ ein Primideal in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet. Wegen $\gamma = N(\Gamma)$ geht in Γ genau die c^{te} Potenz von $\mathfrak{P}$ auf und wegen der Congruenz (7) geht in Ω genau die $(c+b)^{te}$ Potenz von $\mathfrak{P}$ auf. Wir bestimmen nun eine Zahl α in k wie im ersten Falle, und gelangen dann durch die entsprechenden Schlüsse wiederum zu dem Resultat, dass ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$ sein muss.

Im dritten Falle endlich setzen wir $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} . S\mathfrak{P}$, wo $\mathfrak{P}$ ein Primideal des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet, welches von seinem relativconjugirten Primideale $S\mathfrak{P}$ verschieden ausfällt. Nun gehe in Γ das Primideal $\mathfrak{P}$ genau zur C^{ten} und das Primideal $S\mathfrak{P}$ genau zur C'^{ten} Potenz auf; ferner gehe in Ω das Primideal $\mathfrak{P}$ genau zur U^{ten} und $S\mathfrak{P}$ genau zur U'^{ten} Potenz auf; es ist dann $c = C + C'$ und $c + b = U + U'$, und folglich

$$U + U' \geqq C + C'. \tag{8}$$

Wir bilden jetzt in $K(\sqrt{\mu})$ eine ganze Zahl A, die genau durch die C^{te} Potenz von $\mathfrak{P}$ und durch die U^{te} Potenz von $S\mathfrak{P}$ theilbar ist, und endlich eine ganze Zahl α in k, die durch $\frac{\Gamma . SA}{\mathfrak{P}^{U+C} . S\mathfrak{P}^{C+C'}}$ theilbar ist, aber zu $\mathfrak{p}$ prim ausfällt. Wegen der Ungleichung (8) ist dann $B = \frac{\alpha\Omega A}{\Gamma . SA}$ gewiss eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ und wir erhalten $\alpha^2\nu \equiv N(B)$ nach $\mathfrak{p}^e$. Bestimmen wir also noch eine ganze Zahl α^* in k, so dass $\alpha\alpha^* \equiv 1$ nach $\mathfrak{p}^e$ ausfällt, so folgt $\nu \equiv N(\alpha^* B)$ nach $\mathfrak{p}^e$, d. h. ν ist

Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$. Damit ist die Richtigkeit der in Formel (6) ausgesprochenen Behauptung in allen Fällen als richtig erkannt.

Wegen der über $\frac{\nu}{\nu^*}$ gemachten Voraussetzung dürfen wir $\frac{\nu}{\nu^*} = \frac{\gamma^*}{\gamma}$ oder $\nu\gamma = \nu^*\gamma^*$ setzen, wobei γ, γ^* Relativnormen gewisser ganzer Zahlen in $K(\sqrt{\mu^*})$ bedeuten. Mit Hülfe der eben bewiesenen Formel (6) erhalten wir

$$\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\gamma\nu, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\gamma^*\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right);$$

mithin ist auch

$$\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right).$$

Die letztere Formel und die Formel (5) zusammen zeigen die Richtigkeit des Satzes 12.

§ 9.

Die allgemeinen Grundformeln für das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$.

Aus den in § 8 entwickelten Eigenschaften des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ können wir ein System von Grundformeln für dieses Symbol herleiten unter der Voraussetzung, dass dabei $\mathfrak{p}$ ein in 2 nicht aufgehendes Primideal bedeutet.

Satz **13.** *Es sei $\mathfrak{p}$ ein zu 2 primes Primideal des Körpers k und ν, μ seien zwei beliebige ganze Zahlen in k; geht das Primideal $\mathfrak{p}$ in diesen Zahlen ν, μ genau zur b^{ten}, bez. a^{ten} Potenz auf, so bilde man die Zahl $\frac{\nu^a}{\mu^b}$ und bringe dieselbe in die Gestalt eines Bruches $\frac{\varrho}{\sigma}$, dessen Zähler ϱ und dessen Nenner σ nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar sind: dann gilt stets die Gleichung*

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{(-1)^{ab}\varrho\sigma}{\mathfrak{p}}\right).$$

Beweis. Die Sätze 9, 10, 11 zeigen unmittelbar, dass der Satz 13 für $a = 1$, $b = 0$, für $a = 0$, $b = 0$, und für $a = 0$, $b = 1$ gilt. Im Falle $a = 1$, $b = 1$ haben wir $\frac{\nu}{\mu} = \frac{\varrho}{\sigma}$ zu setzen; da nun

$$\frac{\nu}{-\varrho\sigma} = -\frac{\mu}{\sigma^2}$$

die Relativnorm der Zahl $\frac{\sqrt{\mu}}{\sigma}$ ist, so ergiebt sich nach Satz 12

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{-\varrho\sigma, \mu}{\mathfrak{p}}\right),$$

und da andererseits nach Satz 9

$$\left(\frac{-\varrho\sigma, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{-\varrho\sigma}{\mathfrak{p}}\right)$$

ist, so folgt auch für diesen Fall die Richtigkeit des Satzes 13.

Sind nun a, b beliebige ganze rationale nicht negative Exponenten, so möge a^* den Werth 0 oder 1 bedeuten, je nachdem a gerade oder ungerade ausfällt, und entsprechend möge b^* den Werth 0 oder 1 bedeuten, je nachdem b gerade oder ungerade ausfällt. Wir bestimmen jetzt im Körper k eine ganze Zahl ν^*, in der genau die $b^{*\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{p}$ aufgeht, und eine Zahl μ^*, in der genau die $a^{*\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{p}$ aufgeht von der Beschaffenheit, dass $\frac{\nu}{\nu^*}$ und $\frac{\mu}{\mu^*}$ Quadrate von Zahlen in k sind; dann setzen wir $\frac{\nu^{*a^*}}{\mu^{*b^*}}$ gleich einem Bruche $\frac{\varrho^*}{\sigma^*}$, dessen Zähler ϱ^* und dessen Nenner σ^* ganze zu $\mathfrak{p}$ prime Zahlen in k sind, und er kennen leicht, dass in der Zahlenreihe

$$\varrho^*\sigma^*, \ \frac{\varrho^*}{\sigma^*}, \ \frac{\nu^{*a^*}}{\mu^{*b^*}}, \ \frac{\nu^{*a}}{\mu^{*b}}, \ \frac{\nu^a}{\mu^b}, \ \frac{\varrho}{\sigma}, \ \varrho\sigma$$

jede Zahl, durch die darauffolgende dividirt, gleich dem Quadrat einer Zahl des Körpers k wird; wir schliessen hieraus, dass auch der Quotient der ersten Zahl $\varrho^*\sigma^*$ und der letzten $\varrho\sigma$ in jener Reihe gleich dem Quadrat einer gewissen Zahl $\varkappa$ des Körpers k sein muss. Da andererseits diese Zahlen beide zu $\mathfrak{p}$ prim sind, so lässt sich nothwendig auch $\varkappa$ in die Gestalt eines Bruches $\frac{\psi}{\psi^*}$ setzen, dessen Zähler ψ und dessen Nenner ψ^* ganze zu $\mathfrak{p}$ prime Zahlen in k sind. Wir erhalten mithin $\psi^{*2}\varrho^*\sigma^* = \psi^2\varrho\sigma$ und folglich ist $\left(\frac{\varrho^*\sigma^*}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varrho\sigma}{\mathfrak{p}}\right)$; da ferner $(-1)^{a^*} = (-1)^{a^*b^*}$ ausfällt, so ist auch

$$\text{(1)} \qquad \left(\frac{(-1)^{a^*b^*}\varrho^*\sigma^*}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{(-1)^{a^*}\varrho\sigma}{\mathfrak{p}}\right).$$

Weiter ist nach Satz 12

$$\text{(2)} \qquad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right),$$

und da nach dem ersten Theil des gegenwärtigen Beweises der Satz 13 auf die Zahlen ν^*, μ^* angewandt werden darf, so gilt die Gleichung

$$\text{(3)} \qquad \left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{(-1)^{a^*b^*}\varrho^*\sigma^*}{\mathfrak{p}}\right).$$

Aus den Formeln (1), (2), (3) folgt die Richtigkeit des Satzes 13 allgemein.

Aus Satz 13 ergeben sich für das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ eine Reihe von wichtigen Formeln, die wir in folgendem Satze zusammenstellen:

Satz 14. *Wenn ν, ν_1, ν_2, μ, μ_1, μ_2 beliebige ganze Zahlen des Körpers k sind, so gelten in Bezug auf irgend ein zu 2 primes Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k stets die Formeln:*

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{p}}\right),$$

$$\left(\frac{\nu_1\nu_2, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\nu_2, \mu}{\mathfrak{p}}\right),$$

$$\left(\frac{\nu, \mu_1\mu_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\nu, \mu_2}{\mathfrak{p}}\right).$$

Beweis. Die erste Formel folgt unmittelbar aus Satz 13.

Um die zweite Formel zu beweisen, nehmen wir an, es gehe das Primideal $\mathfrak{p}$ in ν_1, ν_2, μ bez. genau zur b_1^{ten}, b_2^{ten}, a^{ten} Potenz auf, und setzen dann

$$\frac{\nu_1^a}{\mu^{b_1}} = \frac{\varrho_1}{\sigma_1}, \quad \frac{\nu_2^a}{\mu^{b_2}} = \frac{\varrho_2}{\sigma_2},$$

so dass ϱ_1, σ_1, ϱ_2, σ_2 ganze zu $\mathfrak{p}$ prime Zahlen in k sind. Nach Satz 13 erhalten wir

$$\left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{(-1)^{ab_1}\varrho_1\sigma_1}{\mathfrak{p}}\right),$$

$$\left(\frac{\nu_2, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{(-1)^{ab_2}\varrho_2\sigma_2}{\mathfrak{p}}\right),$$

$$\left(\frac{\nu_1\nu_2, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{(-1)^{a(b_1+b_2)}\varrho_1\varrho_2\sigma_1\sigma_2}{\mathfrak{p}}\right)$$

und diese Gleichungen zeigen die Richtigkeit der zweiten Formel.

Die dritte Formel ist eine unmittelbare Folge der ersten und zweiten.

Im Lauf der gegenwärtigen Untersuchung werden wir erkennen, dass die Formeln des Satzes 14 auch für jedes in 2 aufgehende Primideal des Körpers k gültig sind.

§ 10.

Die Anzahl der Normenreste nach einem nicht in 2 aufgehenden Primideal.

Satz 15. Wenn $\mathfrak{p}$ ein zu 2 primes Primideal des Körpers k ist, das nicht in der Relativdiscriminante des relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, so ist jede zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$.

Wenn dagegen $\mathfrak{p}$ ein zu 2 primes Primideal des Körpers k ist, das in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht und wenn e ein beliebiger positiver Exponent bedeutet, so sind von allen vor-

handenen zu $\mathfrak{p}$ primen und nach $\mathfrak{p}^e$ einander incongruenten Zahlen in k genau die Hälfte Normenreste des Körpers $K(\sqrt{\mu})$.

Beweis. Es gehe $\mathfrak{p}$ in μ genau zur a^{ten} Potenz auf. Soll zunächst $\mathfrak{p}$ zur Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ prim ausfallen, so muss nach Satz 4 a eine gerade Zahl sein; da ferner nach Voraussetzung ν zu $\mathfrak{p}$ prim ist, so können wir bei Anwendung des Satzes 13 zur Bestimmung des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ $\varrho = \nu^a$, $\sigma = 1$ setzen und erhalten dann

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu^a}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

womit der erste Theil des Satzes 15 bewiesen ist.

Soll andererseits $\mathfrak{p}$ in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgehen, so ist nach Satz 4 der Exponent a eine ungerade Zahl; mithin haben wir nach Satz 13

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu^a}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right),$$

woraus leicht mit Rücksicht auf Satz 2 der zweite Theil des Satzes 15 zu entnehmen ist.

An späterer Stelle werden wir erkennen, dass dieser Satz 15 ebenso wie Satz 14 auch für jedes in 2 aufgehende Primideal gilt; doch bietet der Nachweis hiefür erheblich grössere Schwierigkeiten. Wir werden dann auf die Bedeutung hinweisen, die diesem Satz 15 und seiner Verallgemeinerung auf beliebige Primideale für unsere Theorie zukommt.

§ 11.

Die Einheitenverbände des Körpers k.

Definition 7. Wenn ε eine Einheit des Körpers k ist, so heisst das System aller Einheiten von der Form $\varepsilon\xi^2$, wo ξ alle Einheiten des Körpers k durchläuft, ein *Verband von Einheiten* oder ein *Einheitenverband* des Körpers k. Der durch die Einheit $\varepsilon = 1$ bestimmte Einheitenverband, d. h. derjenige Verband, welcher die Quadrate aller Einheiten des Körpers enthält, heisse der *Hauptverband* und werde mit 1 bezeichnet. Wenn V, V' zwei beliebige Verbände von Einheiten in k sind und jede Einheit in V mit jeder Einheit in V' multiplicirt wird, so bilden sämmtliche solche Producte wiederum einen Verband von Einheiten in k; dieser werde das *Product der Verbände* V und V' genannt und mit VV' bezeichnet. Wenn eine Anzahl von Verbänden in k vorgelegt ist, von denen keiner der Hauptverband ist und keiner durch Multiplication aus den anderen erhalten werden kann, so heissen dieselben von einander *unabhängig*.

Es mögen die r Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ ein volles System von Grundeinheiten*) des Körpers k bilden. Ferner sei ζ eine Einheitswurzel, welche in k vorkommt, während $\sqrt{\zeta}$ nicht in k liegt; wir setzen $\varepsilon_{r+1} = \zeta$ und erkennen dann leicht, dass $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r+1}$ ein System von $r+1$ Einheiten bilden derart, dass überhaupt jede Einheit ε in k auf eine und nur auf eine Weise sich in der Gestalt

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{u_1} \varepsilon_2^{u_2} \ldots \varepsilon_{r+1}^{u_{r+1}} \xi^2$$

darstellen lässt, wo die Exponenten $u_1, u_2, \ldots, u_{r+1}$ nur die Werthe 0 oder 1 annehmen und ξ eine geeignete Einheit in k bedeutet. Es bestimmen also offenbar die Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r+1}$ ein System von $r+1$ unabhängigen Verbänden in k, durch deren Multiplication überhaupt jeder in k vorhandene Verband erhalten werden kann. Der Körper k besitzt, wie wir hieraus schliessen, im ganzen genau 2^{r+1} verschiedene Einheitenverbände.

§ 12.

Die Complexe des relativquadratischen Körpers K.

Definition 8. Ist $\mathfrak{C}$ ein Ideal aus einer Idealclasse C des in Bezug auf k relativquadratischen Körpers K, so werde die durch das relativconjugirte Ideal $S\mathfrak{C}$ bestimmte Idealclasse mit SC bezeichnet und die zu C *relativconjugirte Classe* genannt. Eine Idealclasse A des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ heisse eine *ambige Classe*, wenn sie ihrer relativconjugirten Classe SA gleich wird, wenn also

$$A = SA$$

ist.

Insbesondere ist offenbar jede Classe des Körpers K ambig, welche ein ambiges Ideal des Körpers K enthält; doch kann es, wie später gezeigt werden wird, sehr wohl ambige Classen in K geben, welche kein ambiges Ideal enthalten.

Das Quadrat einer ambigen Classe A ist stets eine solche Classe in K, welche unter ihren Idealen sicher auch in k liegende Ideale enthält; dies folgt leicht aus der Gleichung $A^2 = A \,.\, SA$.

Definition 9. *Ist C eine beliebige Classe in K, so nenne ich das System aller Classen von der Form cC, wo c die Classen des Körpers k durchläuft, einen Complex des Körpers K. Der Complex, der aus den sämmtlichen Classen c in k besteht, heisse der Hauptcomplex des Körpers K und werde mit 1 bezeichnet.*

Wenn P und P' zwei beliebige Complexe sind und jede Classe in P mit jeder Klasse in P' multiplicirt wird, so bilden sämmtliche solche Producte wiederum einen Complex; dieser werde das *Product der Complexe* P und P' genannt und mit PP' bezeichnet.

*) Vgl. „Algebraische Zahlkörper" S. 214 und S. 221.

Wenn C eine Classe im Complexe P ist, so werde derjenige Complex, zu welchem die relativconjugirte Classe SC gehört, der zu P *relativconjugirte Complex* genannt und mit SP bezeichnet.

Jeder Complex, der mit dem ihm relativconjugirten Complexe übereinstimmt, heisst ein *ambiger Complex*. Wenn P ein ambiger Complex ist, so folgt aus $P = SP$ die Gleichung

$$P^2 = P \,.\, SP = 1,$$

d. h. das Quadrat jedes ambigen Complexes ist der Hauptcomplex. Umgekehrt, wenn das Quadrat eines Complexes P den Hauptcomplex 1 liefert, so ist P ein ambiger Complex. In der That folgt, da $P \,.\, SP$ stets gleich 1 ausfällt, aus $P^2 = 1$ die Gleichung $P = SP$.

Jeder Complex P, der eine ambige Classe A enthält, ist ein ambiger Complex; ein solcher Complex werde ein aus der ambigen Classe A entspringender Complex genannt. Enthält insbesondere die ambige Classe A ein ambiges Ideal $\mathfrak{A}$, so heisst P ein aus dem ambigen Ideal $\mathfrak{A}$ entspringender Complex.

Wenn eine Anzahl von Complexen des Körpers K vorgelegt ist, unter denen keiner der Hauptcomplex 1 ist und keiner durch Multiplication aus den übrigen abgeleitet werden kann, so heissen diese Complexe von einander *unabhängig*.

§ 13.

Primideale des Körpers k mit vorgeschriebenen quadratischen Charakteren.

Ein sehr wichtiges Hilfsmittel für die weitere Entwickelung der Theorie der relativquadratischen Körper gewinnen wir durch die Erörterung der Frage, ob es stets im Körper k Primideale giebt, nach denen irgend welche gegebene Zahlen vorgeschriebene quadratische Charaktere besitzen. Wir führen die Untersuchung dieser Frage in folgender Weise:

Satz 16. (Hülfssatz) Es bedeute α irgend eine ganze Zahl in k, welche nicht das Quadrat einer Zahl in k ist, und man setze

$$f(s) = \sum_{(\mathfrak{p})} \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s}, \qquad (s > 1),$$

wo die Summe rechter Hand über sämmtliche Primideale $\mathfrak{p}$ des Körpers k zu erstrecken ist: dann nähert sich die Function $f(s)$ der reellen Veränderlichen s, wenn s nach 1 abnimmt, einer endlichen Grenze.

Beweis. Wir fassen den Körper k vom Grade m und ferner den durch $\sqrt{\alpha}$ bestimmten relativquadratischen Körper $K(\sqrt{\alpha})$ vom Grade $2m$ ins Auge und bilden bez. die Functionen

$$\zeta_k(s) = \prod_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{1-n(\mathfrak{p})^{-s}}, \quad \zeta_K(s) = \prod_{(\mathfrak{P})} \frac{1}{1-\mathrm{N}(\mathfrak{P})^{-s}},$$

wobei das erstere Product über alle Primideale $\mathfrak{p}$ in k und das zweite Product über alle Primideale $\mathfrak{P}$ in $K(\sqrt{\alpha})$ zu erstrecken ist, und wo ferner $n(\mathfrak{p})$ die Norm von $\mathfrak{p}$ in k und $\mathrm{N}(\mathfrak{P})$ die Norm von $\mathfrak{P}$ in $K(\sqrt{\alpha})$ bedeutet. Es ist bekannt, dass diese unendlichen Producte für $s > 1$ convergiren und dass die Grenzausdrücke

$$\lim_{s=1} \{(s-1)\zeta_k(s)\}, \quad \lim_{s=1} \{(s-1)\zeta_K(s)\}$$

endliche und von 0 verschiedene Werthe darstellen*); hieraus folgt, dass auch der Ausdruck

$$\lim_{s=1} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)} \tag{1}$$

einen endlichen von 0 verschiedenen Werth besitzt. Ordnen wir nun das Product

$$\zeta_K(s) = \prod_{(\mathfrak{P})} \frac{1}{1-\mathrm{N}(\mathfrak{P})^{-s}} \tag{2}$$

nach den Primidealen $\mathfrak{p}$ des Körpers k, aus welchen die Primideale $\mathfrak{P}$ herstammen, so gehört, wenn wir Definition 4 berücksichtigen, zu einem beliebigen Primideale $\mathfrak{p}$ in dem Producte (2) das Glied

$$\frac{1}{(1-n(\mathfrak{p})^{-s})^2} \text{ oder } \frac{1}{1-n(\mathfrak{p})^{-s}} \text{ oder } \frac{1}{1-n(\mathfrak{p})^{-2s}}, \tag{3}$$

jenachdem

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = +1 \quad \text{oder} \quad = 0 \quad \text{oder} \quad = -1$$

ausfällt. Wir können daher die drei Ausdrücke (3) in der gemeinschaftlichen Form

$$\frac{1}{1-n(\mathfrak{p})^{-s}} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)n(\mathfrak{p})^{-s}}$$

schreiben und erhalten so

$$\begin{aligned} \zeta_K(s) &= \prod_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{1-n(\mathfrak{p})^{-s}} \prod_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)n(\mathfrak{p})^{-s}} \\ &= \zeta_k(s) \prod_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)n(\mathfrak{p})^{-s}} \end{aligned}$$

und da der Grenzwerth (1) endlich und von 0 verschieden ausfällt, so folgt das Gleiche für den Grenzwerth

*) Vgl. „Algebraische Zahlkörper" § 26, S. 230.

$$\underset{s=1}{L}\prod_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)n(\mathfrak{p})^{-s}}$$

und hieraus schliessen wir, indem wir in bekannter Weise zum Logarithmus übergehen, dass der Ausdruck

$$\underset{s=1}{L}\sum_{(\mathfrak{p})}\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\frac{1}{n(\mathfrak{p})^{s}}$$

einen endlichen Werth besitzt, wie es Satz 16 behauptet.

Satz 17. (Hülfssatz) Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ irgend s ganze Zahlen in k, welche die Bedingung erfüllen, dass kein aus denselben zu bildendes Product gleich dem Quadrat einer Zahl in k wird; es seien ferner $c_1, \ldots, c^s$ nach Belieben vorgeschriebene Einheiten ± 1: dann gilt eine Gleichung von der Gestalt

$$\sum_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{n(\mathfrak{p})^{s}} = \frac{1}{2^s}\log\frac{1}{s-1} + f(s), \quad (s>1);$$

hierbei ist die Summe linker Hand über alle diejenigen Primideale $\mathfrak{p}$ des Körpers k zu erstrecken, die den Bedingungen

$$\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right) = c_1, \ \left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right) = c_2, \ldots, \left(\frac{\alpha_s}{\mathfrak{p}}\right) = c_s$$

genügen und rechter Hand bedeutet $f(s)$ eine Function der reellen Veränderlichen s, welche sich für $s = 1$ einem endlichen Grenzwerth nähert.

Beweis. Wir haben

$$\left.\begin{aligned}\log\zeta_k(s) &= \sum_{(\mathfrak{p})}\log\frac{1}{1-n(\mathfrak{p})^{-s}}\\ &= \sum_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{n(\mathfrak{p})^{s}} + \varphi(s),\end{aligned}\right\} (s>1),$$

wobei die Summen über alle Primideale $\mathfrak{p}$ in k zu erstrecken sind und $\varphi(s)$ eine für $s=1$ endlich bleibende Function der reellen Veränderlichen s bedeutet. Da andererseits der Ausdruck $(s-1)\zeta_k(s)$ für $s = 1$ endlich und von 0 verschieden bleibt, so folgt, dass in der Gleichung

$$\sum_{(\mathfrak{p})}\frac{1}{n(\mathfrak{p})^{s}} = \log\frac{1}{s-1} + \psi(s), \quad (s>1), \tag{4}$$

$\psi(s)$ wiederum eine für $s = 1$ endlich bleibende Function von s bedeutet.

Wir setzen nun in der über alle Primideale $\mathfrak{p}$ zu erstreckenden Summe

$$\sum_{(\mathfrak{p})}\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\frac{1}{n(\mathfrak{p})^{s}}, \quad (s>1) \tag{5}$$

den Werth $\alpha = \alpha_1^{u_1}\alpha_2^{u_2}\ldots\alpha_s^{u_s}$ ein und multipliciren die so entstehende Gleichung mit dem Factor $c_1^{u_1}c_2^{u_2}\ldots c_s^{u_s}$. Wir ertheilen dann jedem der s Exponenten $u_1, u_2, \ldots, u_s$ nach einander die Werthe 0, 1, jedoch so, dass das eine Werthsystem $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_s = 0$ ausgeschlossen wird. Nach Satz 16 bleiben die sämmtlichen $2^s - 1$ aus (5) in dieser Weise entstehenden Ausdrücke für $s = 1$ endlich. Werden dieselben zu (4) addirt, so erhalten wir daher eine Gleichung von der Form

$$(6)\qquad \sum_{(\mathfrak{p})}\left\{1+c_1\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right)\right\}\left\{1+c_2\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right)\right\}\cdots\left\{1+c_s\left(\frac{\alpha_s}{\mathfrak{p}}\right)\right\}\frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} = \log\frac{1}{s-1}+\chi(s),$$

wo $\chi(s)$ wiederum eine für $s = 1$ endlich bleibende Function bedeutet.

Die Richtigkeit des Satzes 17 folgt unmittelbar aus dieser Beziehung (6), wenn wir bedenken, dass der Ausdruck

$$\left\{1+c_1\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right)\right\}\left\{1+c_2\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right)\right\}\cdots\left\{1+c_s\left(\frac{\alpha_s}{\mathfrak{p}}\right)\right\}$$

für alle diejenigen Primideale $\mathfrak{p}$, die den Bedingungen des Satzes 17 genügen, den Werth 2^s besitzt und dass dieser Ausdruck für alle anderen Primideale $\mathfrak{p}$ des Körpers k verschwindet.

Aus der soeben bewiesenen Gleichung des Satzes 17 folgt, indem wir bedenken, dass $\log\frac{1}{s-1}$ für $s = 1$ über alle Grenzen wächst, sofort die folgende Thatsache:

Satz 18. *Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ irgend s ganze Zahlen in k, welche die Bedingung erfüllen, dass kein aus denselben zu bildendes Product gleich dem Quadrat einer Zahl in k wird: es seien ferner $c_1, c_2, \ldots, c_s$ nach Belieben vorgeschriebene Einheiten ± 1: dann giebt es im Körper k stets unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}$, die den Bedingungen*

$$\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right) = c_1,\ \left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right) = c_2, \cdots,\ \left(\frac{\alpha_s}{\mathfrak{p}}\right) = c_s$$

genügen.

II.

Die Theorie der relativquadratischen Körper für einen Grundkörper mit lauter imaginären Conjugirten und von ungerader Classenanzahl.

Um die weiteren Sätze der Theorie der relativquadratischen Zahlkörper in möglichst leicht fasslicher Weise auszudrücken und ihre Beweise in naturgemässer Stufenfolge entwickeln zu können, beschränke ich mich fortan in der gegenwärtigen Arbeit auf die Untersuchung

eines besonderen Falles, indem ich durchweg folgende zwei Annahmen über den zu Grunde gelegten Körper k mache:

1) *Der Körper k vom m^{ten} Grade sei nebst allen conjugirten Körpern $k', \ldots, k^{(m-1)}$ imaginär.*

2) *Die Anzahl h der Idealclassen im Körper k sei ungerade.*

§ 14.

Die relativen Grundeinheiten des Körpers K.

In Folge der ersteren der beiden soeben gemachten Annahmen ist die Anzahl der Einheiten, welche ein volles System von Grundeinheiten in k bilden, gleich $\frac{m}{2} - 1$; es sei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}$ ein volles System von Grundeinheiten in k. Wir beweisen zunächst folgende Thatsache:

Satz 19. (Hülfssatz) Im relativquadratischen Körper $K(\sqrt{\mu})$ lassen sich stets $\frac{m}{2}$ Einheiten $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}$ finden, so dass für irgend eine Einheit E in $K(\sqrt{\mu})$ jedes Mal eine Gleichung von der Gestalt

$$\mathsf{E}^u = \mathsf{H}_1^{U_1} \ldots \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}^{U_{\frac{m}{2}}} [\xi]$$

besteht, wo der Exponent u eine ungerade Zahl und die Exponenten $U_1, \ldots, U_{\frac{m}{2}}$ irgend welche ganze rationale Werthe oder den Werth 0 haben können; endlich bedeutet $[\xi]$ eine Einheit des Körpers k oder eine solche Einheit in $K(\sqrt{\mu})$, deren Quadrat eine Einheit in k wird, so dass $[\xi]$ im allgemeinen eine Einheit in k sein muss und nur dann die Wurzel aus einer Einheit in k darstellen kann, wenn μ eine Einheit in k oder das Product einer solchen in das Quadrat einer Zahl des Körpers k ist.

Die Einheiten $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}$ sind in dem Sinne von einander unabhängig, dass zwischen ihnen keine Relation von der Gestalt

$$\mathsf{H}_1^{U_1} \ldots \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}^{U_{\frac{m}{2}}} [\xi] = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten $U_1, \ldots, U_{\frac{m}{2}}$ besteht, es sei denn, dass diese Exponenten sämmtlich verschwinden und $[\xi] = 1$ ist.

Beweis. Im Körper $K(\sqrt{\mu})$ giebt es ein volles System von $m-1$ Grundeinheiten $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_{m-1}$. Wir betrachten die Gesammtheit der $\frac{3m}{2} - 2$ Einheiten

$$\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_{m-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}.$$

Sobald $\frac{m}{2} - 1 > 0$ ist, besteht zwischen diesen Einheiten jedenfalls eine Relation von der Gestalt

$$\mathsf{H}_1^{A_1} \ldots \mathsf{H}_{m-1}^{A_{m-1}} \varepsilon_1^{a_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}^{a_{\frac{m}{2}-1}} = 1, \tag{1}$$

wo $A_1, \ldots, A_{m-1}, a_1, \ldots, a_{\frac{m}{2}-1}$ ganze rationale Exponenten und $A_1, \ldots, A_{m-1}$ nicht sämmtlich Null sind. Wir setzen

$$A_1 = 2^e A_1', \ldots, A_{m-1} = 2^e A_{m-1}';$$

dabei bedeute 2^e die höchste in den sämmtlichen Zahlen $A_1, \ldots, A_{m-1}$ aufgehende Potenz von 2 und es sei etwa A_{m-1}' eine ungerade Zahl. Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{-a_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}^{-a_{\frac{m}{2}-1}},$$

so erhalten wir aus der Relation (1) die folgende Gleichung

$$\mathsf{H}_1^{A_1'} \ldots \mathsf{H}_{m-1}^{A_{m-1}'} = \sqrt[2^e]{\varepsilon}. \tag{2}$$

Da hier die rechte Seite eine gewisse $2^{e\text{te}}$ Wurzel aus einer Einheit ε in k bedeutet und wegen dieser Relation (2) zugleich eine Einheit in K sein soll, so steht rechter Hand entweder eine Einheit in k oder die Quadratwurzel aus einer Einheit in k; wir schreiben demgemäss die Relation (2) in der Gestalt

$$\mathsf{H}_1^{A_1'} \ldots \mathsf{H}_{m-1}^{A_{m-1}'} = [\xi],$$

und hieraus folgt

$$\mathsf{H}_{m-1}^{A_{m-1}'} = \mathsf{H}_1^{-A_1'} \ldots \mathsf{H}_{m-2}^{-A_{m-2}'} [\xi], \tag{3}$$

wo $[\xi]$ die im Satze 19 erklärte Bedeutung hat.

Nunmehr schalten wir die Einheit H_{m-1} aus dem ursprünglichen System von Grundeinheiten aus und betrachten nur die Gesammtheit der $\frac{3m}{2} - 3$ Einheiten

$$\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_{m-2}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}.$$

Falls noch $\frac{m}{2} - 2 > 0$ ausfällt, besteht zwischen diesen Einheiten eine Relation von der Gestalt

$$(4) \qquad H_1^{B_1} \dots H_{m-2}^{B_{m-2}} \varepsilon_1^{b_1} \dots \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}^{b_{\frac{m}{2}-1}} = 1,$$

wo $B_1, \dots, B_{m-2}, b_1, \dots, b_{\frac{m}{2}-1}$ ganze rationale Exponenten und $B_1, \dots, B_{m-2}$ nicht sämmtlich Null sind. Wir setzen

$$B_1 = 2^f B_1', \dots, B_{m-2} = 2^f B_{m-2}';$$

dabei bedeute 2^f die höchste in den sämmtlichen Zahlen $B_1, \dots, B_{m-2}$ aufgehende Potenz von 2 und es sei etwa B_{m-2}' eine ungerade Zahl. Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1^{-b_1} \dots \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}^{-b_{\frac{m}{2}-1}},$$

so erhalten wir aus der Relation (4) die folgende Gleichung

$$H_1^{B_1'} \dots H_{m-2}^{B_{m-2}'} = \sqrt[2^f]{\bar{\varepsilon}}$$

und hieraus schliessen wir, wie vorhin, die Gleichung

$$(5) \qquad H_{m-2}^{B_{m-2}'} = H_1^{-B_1'} \dots H_{m-3}^{-B_{m-3}'} [\xi],$$

wo $[\xi]$ wiederum die im Satze 19 erklärte Bedeutung hat. Wir betrachten nun das Einheitensystem $H_1, \dots, H_{m-3}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}$. Es lässt sich dann das beschriebene Verfahren offenbar so lange fortsetzen, bis von den ursprünglichen Grundeinheiten $H_1, \dots, H_{m-1}$ nur $\frac{m}{2}$ Einheiten, etwa die Einheiten $H_1, \dots, H_{\frac{m}{2}}$, übrig bleiben; wir erkennen leicht, dass diese Einheiten dann die im Satze 19 verlangte Eigenschaft besitzen. Denn da $H_1, \dots, H_{m-1}$ ein System von Grundeinheiten des Körpers K darstellen, so ist überhaupt jede Einheit E in K in der Gestalt

$$(6) \qquad E = H_1^{U_1} \dots H_{m-1}^{U_{m-1}} Z$$

darstellbar, wo $U_1, \dots, U_{m-1}$ ganze rationale Exponenten und Z eine Einheitswurzel bezeichnet. Nun ist Z offenbar entweder eine in k liegende Einheitswurzel oder die Quadratwurzel aus einer in k liegenden Einheitswurzel, multiplicirt in eine Einheitswurzel Z^* mit ungeradem Wurzelexponenten u^*; wir dürfen daher $Z = [\xi] Z^*$ setzen, wo $[\xi]$ die im Satze 19 erklärte Bedeutung hat. Wenn wir dann die Gleichung (6) in die $u = u^* A_{m-1}' B_{m-2}' \dots^{te}$ Potenz erheben, so folgt,

bei Benutzung der Gleichungen (3), (5) und der späteren analogen, eine Relation, welche, da u ungerade ausfällt, die Richtigkeit des Satzes 19 erkennen lässt.

Definition **10.** Die Einheiten $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}$, welche die Eigenschaft des Satzes 19 besitzen, nenne ich ein System von *relativen Grundeinheiten des Körpers* $K(\sqrt{\mu})$ in Bezug auf k.

Satz **20.** (Hülfssatz) Wenn $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}$ ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers K bilden und deren Relativnormen bez. mit

$$\eta_1 = N(\mathsf{H}_1), \ldots, \eta_{\frac{m}{2}} = N(\mathsf{H}_{\frac{m}{2}})$$

bezeichnet werden, so lässt sich jede Einheit ε in k, welche die Relativnorm irgend einer Einheit E des Körpers K ist, in der Gestalt

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \ldots \eta_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}} N([\xi])$$

darstellen, wo die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}$ gewisse Werthe 0, 1 haben und $[\xi]$ eine Einheit in k oder eine in K liegende Quadratwurzel aus einer Einheit in k bezeichnet.

Beweis. Nach dem Satze 19 gilt für die Einheit E eine Gleichung

$$\mathsf{E}^u = \mathsf{H}_1^{U_1} \ldots \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}^{U_{\frac{m}{2}}} [\xi],$$

wo die Bezeichnungen wie im Satz 19 zu verstehen sind. Indem wir von beiden Seiten dieser Gleichung die Relativnorm bilden, ergiebt sich

$$\varepsilon^u = \eta_1^{U_1} \ldots \eta_{\frac{m}{2}}^{U_{\frac{m}{2}}} N([\xi])$$

und hieraus folgt

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \ldots \eta_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}} N([\xi^*])$$

wenn allgemein $u_i = 0$ oder $= 1$ genommen wird, jenachdem U_i gerade oder ungerade ausfällt und wo ferner

$$[\xi^*] = \eta_1^{\frac{U_1 - u_1}{2}} \ldots \eta_{\frac{m}{2}}^{\frac{U_{\frac{m}{2}} - u_{\frac{m}{2}}}{2}} \varepsilon^{\frac{1-u}{2}} [\xi]$$

gesetzt ist; damit ist Satz 20 bewiesen.

§ 15.

Die Anzahl der aus ambigen Idealen entspringenden ambigen Complexe in K.

Satz 21. Ein ambiger Complex P des relativquadratischen Körpers K enthält lauter ambige Classen. Die Anzahl der ambigen Classen in K ist genau gleich der h-fachen Anzahl der ambigen Complexe.

Beweis. Wenn C irgend eine Classe des ambigen Complexes P ist, so folgt aus $P = SP$ offenbar $C = c \,.\, SC$, wo c eine der h Classen des Körpers k bedeutet. Bilden wir auf beiden Seiten der letzten Gleichung die Relativnorm, so erhalten wir leicht $1 = c^2$ und da andererseits auch $c^h = 1$ ist, wobei die Classenanzahl h eine ungerade Zahl sein soll, so folgt $c = 1$, d. h. es wird $C = SC$; mithin ist C eine ambige Classe. Soll andererseits $C = \mathfrak{c}C$ sein, wo c eine Classe in k ist, so folgt ebenso $c = 1$ und damit ergiebt sich die zweite Aussage des Satzes 21.

Satz 22. Wenn die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ gleich 2^t ist und wenn diejenigen Einheiten in k, welche Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\mu})$ sind, zusammengenommen 2^{v^*} Einheitenverbände in k ausmachen: dann ist die Anzahl derjenigen ambigen Complexe des Körpers $K(\sqrt{\mu})$, welche aus ambigen Idealen entspringen, genau gleich 2^{a^*}, wo a^* den Werth

$$a^* = t + v^* - \frac{m}{2} - 1$$

hat.

Beweis. Wir nehmen im Folgenden zunächst an, dass die Zahl μ nicht das Product einer Einheit in das Quadrat einer Zahl des Körpers k sei; es ist dann jeder Ausdruck $[\xi]$ nothwendig eine in k gelegene Einheit ξ.

Nunmehr mögen, wie in Satz 20, $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}$ ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ und

$$\eta_1 = N(\mathsf{H}_1), \ldots, \eta_{\frac{m}{2}} = N(\mathsf{H}_{\frac{m}{2}})$$

deren Relativnormen bedeuten. Nach Satz 20 lässt sich bei unserer Annahme jede Einheit ε in k, welche die Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist, in der Gestalt

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \ldots \eta_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}} \xi^2$$

darstellen, wo die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}$ gewisse Werthe 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet. Da nun die Anzahl der Verbände

von Einheiten in k, die Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\mu})$ sind, nach Voraussetzung 2^{v^*} betragen soll, so muss es möglich sein, unter den $\frac{m}{2}$ Einheiten $\eta_1, \ldots, \eta_{\frac{m}{2}}$ gewisse v^* auszuwählen — es seien hierfür die Einheiten $\eta_1, \ldots, \eta_{v^*}$ geeignet derart, dass jede Einheit ε in k, welche die Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist, sich auf eine und nur auf eine Weise in der Gestalt

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \ldots \eta_{v^*}^{u_{v^*}} \xi^2$$

darstellen lässt, wo die Exponenten $u_1, \ldots, u_{v^*}$ wiederum gewisse Werthe 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet.

Wir stellen insbesondere die Einheiten $\eta_{v^*+1}, \ldots, \eta_{\frac{m}{2}}$ auf diese Weise dar und setzen demgemäss

$$\eta_i = \eta_1^{u_1^{(i)}} \ldots \eta_{v^*}^{u_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^2,$$
$$\left(i = v^*+1,\ v^*+2, \ldots, \frac{m}{2}\right),$$

wo $u_1^{(i)}, \ldots, u_{v^*}^{(i)}$ gewisse Werthe 0, 1 haben und $\xi^{(i)}$ Einheiten in k sind. Die $\frac{m}{2} - v^*$ Ausdrücke

$$\mathsf{H}_i' = \mathsf{H}_i \mathsf{H}_1^{-u_1^{(i)}} \ldots \mathsf{H}_{v^*}^{-u_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^{-1}, \tag{1}$$
$$\left(i = v^*+1,\ v^*+2, \ldots, \frac{m}{2}\right)$$

sind dann offenbar Einheiten in $K(\sqrt{\mu})$, deren Relativnormen gleich 1 ausfallen, und folglich erfüllen die $\frac{m}{2} - v^*$ ganzen Zahlen

$$\mathsf{M}_1 = 1 + \mathsf{H}_{v^*+1}', \ldots, \mathsf{M}_{\frac{m}{2}-v^*} = 1 + \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}'$$

bez. die Gleichungen

$$\mathsf{M}_1 = \mathsf{H}_{v^*+1}' \cdot S\mathsf{M}_1, \ldots, \mathsf{M}_{\frac{m}{2}-v^*} = \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}' \cdot S\mathsf{M}_{\frac{m}{2}-v^*}. \tag{2}$$

Wir setzen noch $\mathsf{M} = \sqrt{\mu}$ und betrachten dann die durch

$$\mathsf{M}, \mathsf{M}_1, \ldots, \mathsf{M}_{\frac{m}{2}-v^*}$$

bestimmten Hauptideale

$$(\mathsf{M}) = \mathfrak{M},\ (\mathsf{M}_1) = \mathfrak{M}_1, \ldots, (\mathsf{M}_{\frac{m}{2}-v^*}) = \mathfrak{M}_{\frac{m}{2}-v^*}.$$

Da wegen (2) diese Hauptideale je ihren relativconjugirten Idealen gleich ausfallen und mithin Producte ambiger Ideale mit Idealen in k sein müssen, so können wir wegen Definition 3 setzen:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M} &= \mathfrak{D}_1^{a_1} \quad \dots \quad \mathfrak{D}_t^{a_t} \quad \mathfrak{j}, \\
\mathfrak{M}_1 &= \mathfrak{D}_1^{a_1^{(1)}} \quad \dots \quad \mathfrak{D}_t^{a_t^{(1)}} \quad \mathfrak{j}^{(1)}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathfrak{M}_{\frac{m}{2}-\sigma^*} &= \mathfrak{D}_1^{a_1^{\left(\frac{m}{2}-\sigma^*\right)}} \quad \dots \quad \mathfrak{D}_t^{a_t^{\left(\frac{m}{2}-\sigma^*\right)}} \quad \mathfrak{j}^{\left(\frac{m}{2}-\sigma^*\right)},
\end{aligned} \tag{3}
$$

wo $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_t$ die t ambigen Primideale des Körpers $K(\sqrt{\mu})$, ferner $\mathfrak{j}, \mathfrak{j}^{(1)}, \dots, \mathfrak{j}^{\left(\frac{m}{2}-\sigma^*\right)}$ Ideale in k und $a_1, a_2, \dots, a_t^{\left(\frac{m}{2}-\sigma^*\right)}$ gewisse Exponenten 0, 1 bedeuten.

Wir wollen nun beweisen, dass zwischen den Idealen

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{\frac{m}{2}-\sigma^*}$$

keine Relation von der Gestalt

$$\mathfrak{M}^e \mathfrak{M}_1^{e_1} \dots \mathfrak{M}_{\frac{m}{2}-\sigma^*}^{e_{\frac{m}{2}-\sigma^*}} = \mathfrak{j}^* \tag{4}$$

stattfinden kann, wo die Exponenten $e, e_1, \dots, e_{\frac{m}{2}-\sigma^*}$ irgend welche Werthe 0, 1 haben und $\mathfrak{j}^*$ ein Ideal in k bedeutet, es sei denn, dass diese Exponenten sämmtlich gleich 0 sind und $\mathfrak{j}^* = 1$ wird.

Zu dem Zwecke erheben wir die Relation (4) in die h^{te} Potenz und setzen $\mathfrak{j}^h = (\iota)$, wo ι eine ganze Zahl in k bedeutet; wir erhalten dann eine Relation von der Gestalt

$$\mathsf{M}^{eh} \mathsf{M}_1^{e_1 h} \dots \mathsf{M}_{\frac{m}{2}-\sigma^*}^{e_{\frac{m}{2}-\sigma^*} h} = \iota \mathsf{E},$$

wo E eine Einheit des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ ist. Wenden wir auf diese Relation die Substitution S an und dividiren sie dann durch die so entstehende neue Relation, so folgt

$$\left(\frac{\mathsf{M}}{S\mathsf{M}}\right)^{eh} \left(\frac{\mathsf{M}_1}{S\mathsf{M}_1}\right)^{e_1 h} \dots \left(\frac{\mathsf{M}_{\frac{m}{2}-\sigma^*}}{S\mathsf{M}_{\frac{m}{2}-\sigma^*}}\right)^{e_{\frac{m}{2}-\sigma^*} h} = \frac{\mathsf{E}}{S\mathsf{E}}$$

oder vermöge (2)

$$(-1)^{eh} \mathsf{H}'^{e_1 h}_{\sigma^*+1} \dots \mathsf{H}'^{e_{\frac{m}{2}-\sigma^*} h}_{\frac{m}{2}} = \frac{\mathsf{E}}{S\mathsf{E}}.$$

Wir schreiben diese Relation in der Gestalt

$$(5) \qquad H_{\varrho^*+1}^{\prime e_1 h} \dots H_{\frac{m}{2}}^{\prime \frac{e_m}{2} - \varrho^* h} = E^2 \xi,$$

wo $\xi = \frac{(-1)^{\varrho h}}{N(E)}$ eine Einheit in k bezeichnet.

Nach Satz 19 giebt es für jede Einheit E einen ungeraden Exponenten u, so dass

$$(6) \qquad E^u = H_1^{U_1} \dots H_{\frac{m}{2}}^{\frac{U_m}{2}} \xi'$$

wird, wo die Exponenten $U_1, \dots, U_{\frac{m}{2}}$ gewisse ganze rationale Werthe haben und ξ' eine Einheit in k ist; aus (5) und (6) folgt mit Rücksicht auf (1) eine Gleichung von der Gestalt

$$(7) \qquad H_1^{E_1} \dots H_{\varrho^*}^{E_{\varrho^*}} H_{\varrho^*+1}^{e_1 h u - 2 U_{\varrho^*+1}} \dots H_{\frac{m}{2}}^{\frac{e_m}{2} - \varrho^* h u - 2 \frac{U_m}{2}} \xi'' = 1,$$

wo $E_1, \dots, E_{\varrho^*}$ gewisse ganze rationale Exponenten sind und ξ'' wiederum eine Einheit in k bedeutet. Da h und u ungerade Zahlen sind, so würde, wenn unter den Zahlen $e_1, \dots, e_{\frac{m}{2} - \varrho^*}$ auch nur eine gleich 1 ausfiele, nothwendig der betreffende Exponent in der Reihe

$$e_1 hu - 2U_{\varrho^*+1}, \dots, e_{\frac{m}{2} - \varrho^*} hu - 2U_{\frac{m}{2}}$$

ungerade und daher gewiss von 0 verschieden sein; dann aber widerspräche die Relation (7) der zweiten Aussage des Satzes 19. Hiermit ist gezeigt, dass in der Relation (4) die Exponenten $e_1, \dots, e_{\frac{m}{2} - \varrho^*}$ nothwendig sämmtlich gleich 0 sind.

Nunmehr erkennen wir leicht, dass in (4) auch der Exponent e verschwinden muss. Würde e nämlich den Werth 1 haben können, so wäre $\mathfrak{M} = \sqrt{\mu}$ ein Ideal $\mathfrak{j}$ in k und folglich $\mu = \mathfrak{j}^2$; das Erheben zur h^{ten} Potenz würde $\mu^h = \mathfrak{j}^{2h}$ liefern und, wenn $\mathfrak{j}^h = (\iota)$ gesetzt wird, wo ι eine ganze Zahl in k bedeutet, so würde $\mu^h = \varepsilon \iota^2$ oder $\mu = \varepsilon \alpha^2$ folgen, wo ε eine Einheit in k und $\alpha = \frac{\iota}{\mu^{\frac{h-1}{2}}}$ eine gewisse Zahl in k bedeutet. Diese Annahme ist jedoch zu Anfang unseres Beweises vorläufig ausgeschlossen. Hiermit ist in der That bewiesen, dass eine Relation von der Gestalt (4) nicht stattfinden kann; es sei denn, dass die Exponenten $e, e_1, \dots, e_{\frac{m}{2} - \varrho^*}$ sämmtlich gleich 0 sind.

Nunmehr kehren wir zu den Gleichungen (3) zurück und wählen unter den t ambigen Primidealen $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_t$ solche $\frac{m}{2} - v^* + 1$ aus — es seien dazu etwa $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+1}$ geeignet —, welche sich vermöge dieser Gleichungen (3) durch die Ideale $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{\frac{m}{2}-v^*}$, durch die übrigen ambigen Primideale $\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}, \ldots, \mathfrak{D}_t$ und gewisse Ideale $\mathfrak{m}^{(i)}$ des Körpers k, wie folgt, ausdrücken lassen:

$$(8) \qquad \mathfrak{D}_i = \mathfrak{M}^{b^{(i)}} \mathfrak{M}_1^{b_1^{(i)}} \ldots \mathfrak{M}_{\frac{m}{2}-v^*}^{b_{\frac{m}{2}-v^*}^{(i)}} \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}^{d_{\frac{m}{2}-v^*+2}^{(i)}} \ldots \mathfrak{D}_t^{d_t^{(i)}} \mathfrak{m}^{(i)},$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - v^* + 1\right),$$

wo die Exponenten $b^{(i)}, b_1^{(i)}, \ldots, b_{\frac{m}{2}-v^*}^{(i)}, d_{\frac{m}{2}-v^*+2}^{(i)}, \ldots, d_t^{(i)}$ gewisse Werthe 0, 1 haben. Dass dies möglich sein muss, erkennen wir, wenn wir die vorhin bewiesene Thatsache benutzen, derzufolge eine Relation von der Gestalt (4) nicht stattfinden kann, es sei denn, dass sämmtliche Exponenten $e, e_1, \ldots, e_{\frac{m}{2}-v^*}$ verschwinden. Ueberdies haben wir dabei den Umstand zu berücksichtigen, dass die Quadrate der ambigen Primideale $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_t$ und ebenso die Quadrate der Ideale

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{\frac{m}{2}-v^*}$$

Ideale in k werden.

Da die Ideale $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{\frac{m}{2}-v^*}$ Hauptideale sind, so zeigen die Gleichungen (8) unmittelbar, dass die durch $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+1}$ bestimmten ambigen Complexe gewisse Producte derjenigen Complexe sind, die durch die Ideale $\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}, \ldots, \mathfrak{D}_t$ bestimmt sind. Die Anzahl der von einander unabhängigen, aus ambigen Idealen entspringenden Complexe ist also sicher nicht grösser als $a^* = t + v^* - \frac{m}{2} - 1$ und die Anzahl aller überhaupt aus ambigen Idealen entspringenden Complexe ist demnach nicht grösser als 2^{a^*}.

Wir beweisen jetzt, dass die aus den a^* ambigen Primidealen $\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}, \ldots, \mathfrak{D}_t$ entspringenden a^* Complexe wirklich von einander unabhängig sind. In der That würde einer dieser Complexe, etwa der

aus $\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-\sigma^*+2}$ entspringende Complex, sich durch die übrigen ausdrücken lassen, so müsste eine Aequivalenz von der Gestalt

$$\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-\sigma^*+2} \sim \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-\sigma^*+3}^{e_{\frac{m}{2}-\sigma^*+3}} \dots \mathfrak{D}_t^{e_t}\mathfrak{j}$$

statthaben, worin $e_{\frac{m}{2}-\sigma^*+3}, \dots, e_t$ gewisse Exponenten 0, 1 bedeuten und $\mathfrak{j}$ ein Ideal in k ist. Verstehen wir unter $\mathfrak{j}'$ ein Ideal in k, für welches in k die Aequivalenz $\mathfrak{j}'\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-\sigma^*+2}^2 \sim \mathfrak{j}$ gilt, so folgt die weitere Aequivalenz

$$\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-\sigma^*+2}\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-\sigma^*+3}^{e_{\frac{m}{2}-\sigma^*+3}} \dots \mathfrak{D}_t^{e_t}\mathfrak{j}' \sim 1;$$

wir können demnach

$$\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-\sigma^*+2}\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-\sigma^*+3}^{e_{\frac{m}{2}-\sigma^*+3}} \dots \mathfrak{D}_t^{e_t}\mathfrak{j}' = (\mathsf{A}) \tag{9}$$

setzen, wobei A eine ganze Zahl des Körpers K bedeuten soll.

Da der Gleichung (9) zufolge, das Hauptideal (A) seinem relativ conjugirten Ideale gleich sein muss, so findet eine Gleichung von der Gestalt

$$\mathsf{A} = \mathsf{E} \,.\, S\mathsf{A} \tag{10}$$

statt, wo E eine Einheit in K bedeutet. Nun wenden wir den Satz 19 auf die Einheit E an; es sei demgemäss u ein ungerader Exponent, so dass

$$\mathsf{E}^u = \mathsf{H}_1^{U_1} \dots \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}^{U_{\frac{m}{2}}} \xi$$

wird, wo die Exponenten $U_1, \dots, U_{\frac{m}{2}}$ gewisse ganze rationale Werthe haben und ξ eine Einheit in k ist. Wegen (1) können wir auch setzen

$$\mathsf{E}^u = \mathsf{H}_1^{U_1'} \dots \mathsf{H}_{\sigma^*}^{U_{\sigma^*}'} \mathsf{H}'^{U_{\sigma^*+1}}_{\sigma^*+1} \dots \mathsf{H}'^{U_{\frac{m}{2}}}_{\frac{m}{2}} \xi', \tag{11}$$

wo $\mathsf{H}'_{\sigma^*+1}, \dots, \mathsf{H}'_{\frac{m}{2}}$ die in (1) bestimmten Einheiten, $U_1', \dots, U_{\sigma^*}'$ gewisse ganze rationale Exponenten sind und ξ' wiederum eine Einheit in k bedeutet. Wenn wir hierin auf beiden Seiten die Relativnorm bilden und berücksichtigen, dass wegen (10) $N(\mathsf{E}) = 1$ wird und dass auch die Relativnormen der Einheiten (1) den Werth 1 haben, so ergiebt sich leicht

$$1 = \eta_1^{U_1'} \dots \eta_{\sigma^*}^{U_{\sigma^*}'} \xi'^2;$$

da die durch $\eta_1, \ldots, \eta_{v^*}$ bestimmten Einheitenverbände in k von einander unabhängig sein sollen, so folgt hieraus, dass die Exponenten $U_1', \ldots, U_{v^*}'$ sämmtlich gerade sind. Wir setzen nun in Formel (11) die Werthe

$$\mathsf{E} = \frac{\mathsf{A}}{S\mathsf{A}},$$

$$\mathsf{H}_1^{U_1'} = \left(\frac{\mathsf{H}_1}{S\mathsf{H}_1}\,\eta_1\right)^{\frac{1}{2}U_1'}, \ldots, \mathsf{H}_{v^*}^{U_{v^*}'} = \left(\frac{\mathsf{H}_{v^*}}{S\mathsf{H}_{v^*}}\,\eta_{v^*}\right)^{\frac{1}{2}U_{v^*}'},$$

$$\mathsf{H}_{v^*+1}' = \frac{\mathsf{M}_1}{S\mathsf{M}_1}, \ldots, \mathsf{H}_{\frac{m}{2}}' = \frac{\mathsf{M}_{\frac{m}{2}-v^*}}{S\mathsf{M}_{\frac{m}{2}-v^*}}$$

ein und erhalten dann, wenn zur Abkürzung

$$\mathsf{B} = \mathsf{A}^{-u}\mathsf{H}_1^{\frac{1}{2}U_1'} \ldots \mathsf{H}_{v^*}^{\frac{1}{2}U_{v^*}'} \cdot \mathsf{M}_1^{U_{v^*+1}} \ldots \mathsf{M}_{\frac{m}{2}-v^*}^{U_{\frac{m}{2}}} \tag{12}$$

gesetzt wird, aus (11) die Gleichung

$$\frac{\mathsf{B}}{S\mathsf{B}} = \xi'', \tag{13}$$

wo ξ'' wiederum eine Einheit in k bezeichnet. Wir bilden die Relativnorm von (13) und erhalten so $\xi''^2 = 1$; wir setzen $\xi'' = (-1)^a$, wo a einen der Werthe 0, 1 bedeute. Demgemäss können wir (13) in die Gestalt

$$\frac{\mathsf{B}(\sqrt{\mu})^a}{S\{\mathsf{B}(\sqrt{\mu})^a\}} = 1 \quad \text{oder} \quad \mathsf{B}(\sqrt{\mu})^a = S\{\mathsf{B}(\sqrt{\mu})^a\}$$

bringen, d. h. $\mathsf{B}(\sqrt{\mu})^a$ ist eine Zahl in k. Indem wir die Werthe (9) und (12) für die Zahlen A und B benutzen und bedenken, dass u eine ungerade Zahl ist, leiten wir aus der zuletzt gefundenen Thatsache leicht eine Relation von der Gestalt

$$\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2} = \mathfrak{M}^b\mathfrak{M}_1^{b_1} \ldots \mathfrak{M}_{\frac{m}{2}-v^*}^{b_{\frac{m}{2}-v^*}} \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+3}^{d_{\frac{m}{2}-v^*+3}} \ldots \mathfrak{D}_t^{d_t}\mathfrak{m} \tag{14}$$

ab, worin $b, b_1, \ldots, b_{\frac{m}{2}-v^*}, d_{\frac{m}{2}-v^*+3}, \ldots, d_t$ gewisse Werthe 0, 1 bedeuten und $\mathfrak{m}$ ein Ideal in k ist. Setzen wir diesen Werth für $\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}$ in die rechten Seiten der Formeln (8) ein und fügen wir den so entstehenden $\frac{m}{2} - v^* + 1$ Gleichungen noch die Gleichung (14) hinzu, so erhalten wir ein System von $\frac{m}{2} - v^* + 2$ Gleichungen von der Gestalt

$$(15)\qquad \mathfrak{D}_i = \mathfrak{M}^{B^{(i)}}\mathfrak{M}_1^{B_1^{(i)}}\cdots\mathfrak{M}_{\frac{m}{2}-v^*}^{B_{\frac{m}{2}-v^*}^{(i)}}\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}^{L_{\frac{m}{2}-v^*+2}^{(i)}}\cdots\mathfrak{D}_t^{D_t^{(i)}}\mathfrak{n}^{(i)},$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - v^* + 2\right),$$

worin

$$B^{(i)}, B_1^{(i)}, \ldots, B_{\frac{m}{2}-v^*}^{(i)}, D_{\frac{m}{2}-v^*+2}^{(i)}, \ldots, D_t^{(i)}$$

gewisse Exponenten 0, 1 und $\mathfrak{n}^{(i)}$ wiederum gewisse Ideale in k sind. Das Bestehen dieser Gleichungen (15) ist aber unmöglich. In der That, bestimmen wir $\frac{m}{2} - v^* + 2$ ganze rationale Zahlen

$$a^{(1)}, \ldots, a^{\left(\frac{m}{2}-v^*+2\right)},$$

die nicht sämmtlich gerade sind, derart dass nach dem Modul 2 die $\frac{m}{2} - v^* + 1$ Congruenzen

$$\sum_{(i)} a^{(i)}B^{(i)} \equiv 0,\ \sum_{(i)} a^{(i)}B_1^{(i)} \equiv 0,\ \ldots,\ \sum_{(i)} a^{(i)}B_{\frac{m}{2}-v^*}^{(i)} \equiv 0,\ (2),$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - v^* + 2\right)$$

gelten, so ergiebt sich, indem wir (15) in die $a^{(i)}$te Potenz erheben und die so für $i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - v^* + 2$ entstehenden Gleichungen mit einander multipliciren, eine Gleichung von der Gestalt:

$$(16)\qquad \mathfrak{D}_1^{a^{(1)}}\cdots\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}^{a^{\left(\frac{m}{2}-v^*+2\right)}} = \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+3}^{E^{\left(\frac{m}{2}-v^*+3\right)}}\cdots\mathfrak{D}_t^{E^{(i)}}\mathfrak{n},$$

wo die Exponenten $E^{\left(\frac{m}{2}-v^*+3\right)}, \ldots, E^{(i)}$ gewisse Werthe 0, 1 bedeuten und $\mathfrak{n}$ ein Ideal in k ist. Diese Gleichung (16) ist unmöglich, weil ihre linke Seite wenigstens einen der Primfactoren $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}$ zu einer ungeraden Potenz erhoben enthält, rechts dagegen diese Primfactoren nur in $\mathfrak{m}$ und also sämmtlich zu einer geraden Potenz vorkommen. Wir müssen daher unsere ursprüngliche Annahme verwerfen, wonach der aus $\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}$ entspringende Complex sich durch die aus $\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+3}, \ldots, \mathfrak{D}_t$ entspringenden Complexe sollte ausdrücken lassen; mithin haben wir gezeigt, dass es in $K(\sqrt{\mu})$ genau 2^{v^*} Complexe von der Art giebt, wie es Satz 22 behauptet.

In dem soeben geführten Beweise für Satz 22 wurde zu Anfang der Fall ausgeschlossen, dass μ gleich dem Product einer Einheit in

das Quadrat einer Zahl des Körpers k ausfällt; es lassen sich jedoch ohne Schwierigkeit die Abänderungen auffinden, welche in diesem speciellen Falle an dem eben mitgetheilten Beweise anzubringen sind.

Da die Anzahl der aus ambigen Idealen entspringenden Complexe mindestens gleich 1 ist, so folgt insbesondere aus dem Satze 22 die Ungleichung

$$t + v^* - \frac{m}{2} > 0.$$

§ 16.

Die Anzahl aller ambigen Complexe in K.

Satz 23. Wenn die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ gleich 2^t ist und wenn diejenigen Einheiten in k, welche Relativnormen von Einheiten oder von gebrochenen Zahlen des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ sind, zusammen genau 2^v Einheitenverbände in k ausmachen: dann ist die Anzahl aller ambigen Complexe des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ genau 2^a, wo a die Zahl

$$a = t + v - \frac{m}{2} - 1$$

bedeutet.

Beweis. Wir machen über die Zahl μ zunächst wieder die nämliche Annahme, wie zu Beginn des Beweises von Satz 22 und benutzen durchweg die dort angewandte Bezeichnungsweise. Da die Anzahl der Verbände von Einheiten in k, welche Relativnormen irgend welcher Zahlen in K sind, 2^v betragen soll, so muss es möglich sein, zu den im vorigen Beweise bestimmten Einheiten $\eta_1, \ldots, \eta_{v^*}$ gewisse $v - v^*$ Einheiten $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{v-v^*}$ von folgenden Eigenschaften hinzuzufügen: die Einheiten $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{v-v^*}$ sind Relativnormen von gewissen gebrochenen Zahlen $\Theta_1, \ldots, \Theta_{v-v^*}$ des Körpers K, so dass die Gleichungen

$$\vartheta_1 = N(\Theta_1), \ \ldots, \ \vartheta_{v-v^*} = N(\Theta_{v-v^*}) \tag{1}$$

bestehen, und überdies soll jede Einheit ε in k, welche Relativnorm einer Einheit oder einer gebrochenen Zahl in K ist, auf eine und nur auf eine Weise in der Gestalt

$$\varepsilon = \eta_1^{e_1} \ldots \eta_{v^*}^{e_{v^*}} \vartheta_1^{f_1} \ldots \vartheta_{v-v^*}^{f_{v-v^*}} \xi^2$$

darstellbar sein, wo die Exponenten $e_1, \ldots, e_{v^*}, f_1, \ldots, f_{v-v^*}$ gewisse Werthe 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet. Es sind dann die aus $\eta_1, \ldots, \eta_{v^*}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{v-v^*}$ entspringenden Einheitenverbände von einander unabhängig.

Wir setzen nun

$$\Theta_i = \frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{B}_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, v - v^*),$$

wo $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ je zwei zu einander prime Ideale des Körpers K seien; dann folgt wegen (1) $\mathfrak{B}_i = S\mathfrak{A}_i$ und hieraus

$$\Theta_i = \frac{\mathfrak{A}_i}{S\mathfrak{A}_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, v - v^*) \tag{2}$$

und aus dieser Gleichung (2) wiederum schliessen wir $\mathfrak{A}_i \sim S\mathfrak{A}_i$ d. h. die durch die Ideale $\mathfrak{A}_i$ bestimmten Complexe sind sämmtlich ambig.

Wir wollen nun beweisen, dass diese $v - v^*$ durch die Ideale $\mathfrak{A}_i$ bestimmten Complexe zusammen mit den im Beweise zu Satz 22 gefundenen aus den ambigen Idealen $\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}, \ldots, \mathfrak{D}_t$ entspringenden

$$a^* = t + v^* - \frac{m}{2} - 1$$

ambigen Complexen ein System von einander unabhängiger Complexe bilden und dass ferner überhaupt jeder ambige Complex des Körpers K ein Product von denjenigen

$$a = v - v^* + a^* = t + v - \frac{m}{2} - 1$$

ambigen Complexen ist, die aus den Idealen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{v-v^*}$, $\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}, \ldots, \mathfrak{D}_t$ entspringen.

In der That, nehmen wir an, es seien diese Complexe nicht von einander unabhängig, so müsste für die betreffenden Ideale eine Relation von der Gestalt

$$\mathfrak{A}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{A}_{v-v^*}^{a_{v-v^*}} \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-v^*+2}^{e_1} \ldots \mathfrak{D}_t^{e_{a^*}} \cdot \mathfrak{j} = \Theta \tag{3}$$

gelten, worin die Exponenten $a_1, \ldots, a_{v-v^*}, e_1, \ldots, e_{a^*}$ gewisse Werthe 0, 1, jedoch nicht sämmtlich den Werth 0 haben, ferner j ein Ideal in k und Θ eine ganze Zahl in K bedeutet. Aus (3) folgt leicht wegen (2) die Gleichung

$$\frac{\Theta}{S\Theta} = \Theta_1^{a_1} \ldots \Theta_{v-v^*}^{a_{v-v^*}} \mathsf{H}, \tag{4}$$

wo H eine gewisse Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist. Indem wir von beiden Seiten der Formel (4) die Relativnorm bilden, erhalten wir mit Rücksicht auf (1)

$$N(\mathsf{H}) = \vartheta_1^{-a_1} \ldots \vartheta_{v-v^*}^{-a_{v-v^*}}$$

und hieraus ersehen wir, dass die Einheit

$$\vartheta = \vartheta_1^{-a_1} \ldots \vartheta_{v-v^*}^{-a_{v-v^*}} \tag{5}$$

die Relativnorm einer Einheit in K ist. Wir dürfen folglich

$$\vartheta = \eta_1^{b_1} \ldots \eta_{v^*}^{b_{v^*}} \xi^2 \tag{6}$$

setzen, wo $b_1, \ldots, b_{\varrho^*}$ gewisse Werthe 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet. Aus (5) und (6) erhalten wir die Gleichung

$$\eta_1^{b_1} \ldots \eta_{\varrho^*}^{b_{\varrho^*}} \vartheta_1^{a_1} \ldots \vartheta_{\varrho-\varrho^*}^{a_{\varrho-\varrho^*}} \xi^2 = 1.$$

Wegen der Unabhängigkeit der durch $\eta_1, \ldots, \eta_{\varrho^*}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{\varrho-\varrho^*}$ bestimmten Einheitenverbände ist diese Gleichung nur möglich, wenn sämmtliche Exponenten $b_1, \ldots, b_{\varrho^*}, a_1, \ldots, a_{\varrho-\varrho^*}$ gerade und also gleich 0 sind. Hierdurch erhält die Relation (3) die Gestalt

$$\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-\varrho^*+2}^{e_1} \ldots \mathfrak{D}_t^{e_{a^*}} \mathfrak{j} = \Theta$$

und diese Relation erfordert wegen der Unabhängigkeit der aus $\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-\varrho^*+2}, \ldots, \mathfrak{D}_t$ entspringenden Complexe, dass auch sämmtliche Exponenten $e_1, \ldots, e_{a^*}$ gleich 0 sind — eine Folgerung, die unserer ursprünglichen Annahme über die Exponenten in der Relation (3) widerspricht.

Es bleibt noch übrig, den Nachweis dafür zu führen, dass jeder ambige Complex A als Product von solchen Complexen dargestellt werden kann, die aus den Idealen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{\varrho-\varrho^*}, \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-\varrho^*+2}, \ldots, \mathfrak{D}_t$ entspringen. Ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Ideal des Complexes A, so gilt wegen Satz 21 eine Gleichung von der Gestalt

$$\frac{S\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} = \Theta, \tag{7}$$

wo Θ eine Zahl in K bedeutet. Indem wir auf beiden Seiten dieser Gleichung (7) die Relativnorm bilden, erkennen wir, dass die Relativnorm der Zahl Θ eine Einheit ϑ in k wird; wir können demgemäss

$$\vartheta = N(\Theta) = \eta_1^{e_1} \ldots \eta_{\varrho^*}^{e_{\varrho^*}} \vartheta_1^{f_1} \ldots \vartheta_{\varrho-\varrho^*}^{f_{\varrho-\varrho^*}} \xi^2$$

setzen, wo die Exponenten $e_1, \ldots, e_{\varrho^*}, f_1, \ldots, f_{\varrho-\varrho^*}$ gewisse Werthe 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet. Wir entnehmen hieraus für die Zahl

$$\Theta' = \pm \Theta H_1^{-e_1} \ldots H_{\varrho^*}^{-e_{\varrho^*}} \Theta_1^{-f_1} \ldots \Theta_{\varrho-\varrho^*}^{-f_{\varrho-\varrho^*}} \xi^{-1},$$

wo das Vorzeichen so angenommen werde, dass jedenfalls $\Theta' \neq -1$ ist, die Gleichung

$$N(\Theta') = 1.$$

Wegen dieser Gleichung haben wir

$$\Theta' = \frac{\Theta' + 1}{S(\Theta' + 1)}. \tag{8}$$

Nunmehr entsteht aus der Gleichung

$$\pm \Theta' \Theta^{-1} H_1^{e_1} \dots H_{g^*}^{e_{g^*}} \Theta_1^{f_1} \dots \Theta_{g-g^*}^{f_{g-g^*}} \xi = 1$$

vermöge (2), (7), (8) die Gleichung für Ideale

$$\frac{(\Theta'+1)\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1^{f_1} \dots \mathfrak{A}_{g-g^*}^{f_{g-g^*}}}{S(\Theta'+1)S\mathfrak{A}\,S\mathfrak{A}_1^{f_1} \dots S\mathfrak{A}_{g-g^*}^{f_{g-g^*}}} = 1,$$

und wenn daher zur Abkürzung

$$\mathfrak{D} = (\Theta'+1)\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1^{f_1} \dots \mathfrak{A}_{g-g^*}^{f_{g-g^*}} \tag{9}$$

gesetzt wird, so erhalten wir schliesslich

$$\mathfrak{D} = S\mathfrak{D},$$

d. h. $\mathfrak{D}$ ist ein Product eines gewissen ambigen Ideals in ein Ideal des Körpers k und folglich zeigt die Gleichung (9), dass $\mathfrak{A}$ einem Product von gewissen Idealen aus der Reihe $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{g-g^*}, \mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_t$ in ein Ideal des Körpers k äquivalent ist. Da die ambigen Ideale $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-g^*+1}$ als gewisse Producte aus den Idealen $\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-g^*+2}, \dots, \mathfrak{D}_t$ darstellbar sind, so ist hiermit der Beweis des Satzes 23 vollständig geführt. Wird angenommen, dass μ gleich dem Product einer Einheit in das Quadrat einer Zahl in k ist, so sind geringe Abänderungen dieses Beweises nöthig.

§ 17.

Das Charakterensystem einer Zahl und eines Ideals im Körper K.

Wir erörtern nunmehr die Eintheilung der Idealclassen des relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$ in Geschlechter. Zu dem Zwecke bezeichnen wir die t in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgehenden Primideale des Körpers k mit $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_t$ und machen für die folgenden Definitionen und Beweise in § 17—§ 19 *die vorläufige Annahme, dass diese Primideale* $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_t$ *sämmtlich zu 2 prim sind*, oder, was nach Satz 5 im Wesentlichen auf das Nämliche hinauskommt, dass die Zahl μ zu 2 prim ist und zugleich dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach 2^2 congruent ausfällt. Erst im Laufe der weiteren Untersuchung werden wir diese Einschränkung aufheben.

Definition 11. Zu einer beliebigen ganzen von 0 verschiedenen Zahl ν des Körpers k gehören bestimmte Werthe der t einzelnen Symbole

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{b}_1}\right), \dots, \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{b}_t}\right),$$

welche gemäss der Definition 6 gewisse t Einheiten ± 1 bedeuten; diese Einheiten sollen das *Charakterensystem der Zahl ν im Körper $K(\sqrt{\mu})$* heissen.

Um auch einem jeden Ideal $\mathfrak{J}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ in bestimmter Weise ein Charakterensystem zuzuordnen, bilden wir die Relativnorm $N(\mathfrak{J}) = \mathfrak{j}$ und dann ihre h^{te} Potenz $\mathfrak{j}^h = (\nu)$, wo ν eine ganze Zahl in k sein soll. Nunmehr verstehen wir unter ξ_1 eine Einheit in k. Haben dann für jede beliebige Einheit ξ_1 alle t Symbole

$$\left(\frac{\xi_1, \mu}{\mathfrak{b}_1}\right), \ldots, \left(\frac{\xi_1, \mu}{\mathfrak{b}_t}\right)$$

durchweg den Werth $+1$, so setzen wir $r = t$ und bezeichnen die r Einheitswurzeln

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{b}_1}\right), \ldots, \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{b}_r}\right)$$

als das *Charakterensystem des Ideals* $\mathfrak{J}$; dasselbe ist dann durch das Ideal $\mathfrak{J}$ völlig eindeutig bestimmt.

Es sei andererseits eine specielle Einheit ε_1 in k vorhanden, für welche wenigstens eines der t Symbole

$$\left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{b}_1}\right), \ldots, \left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{b}_t}\right)$$

gleich -1 wird; dann können wir, ohne damit eine Beschränkung einzuführen, annehmen, es sei etwa $\left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{b}_t}\right) = -1$. Wir betrachten nun alle diejenigen Einheiten ξ_2 in k, für welche $\left(\frac{\xi_2, \mu}{\mathfrak{b}_t}\right) = +1$ wird. Es sei unter diesen wieder eine solche Einheit $\xi_2 = \varepsilon_2$ vorhanden, für welche wenigstens eines der $t-1$ Symbole

$$\left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{b}_1}\right), \ldots, \left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{b}_{t-1}}\right)$$

gleich -1 wird; dann können wir annehmen, es sei etwa $\left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{b}_{t-1}}\right) = -1$. Wir betrachten ferner alle diejenigen Einheiten ξ_3, für welche sowohl $\left(\frac{\xi_3, \mu}{\mathfrak{b}_t}\right) = +1$ als auch $\left(\frac{\xi_3, \mu}{\mathfrak{b}_{t-1}}\right) = +1$ wird, und sehen nach, ob unter diesen eine Einheit $\xi_3 = \varepsilon_3$ vorhanden ist, für welche wenigstens eines der $t-2$ Symbole

$$\left(\frac{\varepsilon_3, \mu}{\mathfrak{b}_1}\right), \ldots, \left(\frac{\varepsilon_3, \mu}{\mathfrak{b}_{t-2}}\right)$$

gleich -1 wird. Fahren wir in der begonnenen Weise fort, so erhalten wir schliesslich eine gewisse Anzahl r^* und dazu ein System von r^* Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{r^*}$ des Körpers k, von der Art, dass bei geeigneter Anordnung der Primideale $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_t$ die Gleichungen

$$(1)\quad\begin{cases}\left(\frac{\varepsilon_1,\mu}{\mathfrak{b}_t}\right)=-1,\\ \left(\frac{\varepsilon_2,\mu}{\mathfrak{b}_t}\right)=+1,\ \left(\frac{\varepsilon_2,\mu}{\mathfrak{b}_{t-1}}\right)=-1,\\ \left(\frac{\varepsilon_3,\mu}{\mathfrak{b}_t}\right)=+1,\ \left(\frac{\varepsilon_3,\mu}{\mathfrak{b}_{t-1}}\right)=+1,\ \left(\frac{\varepsilon_3,\mu}{\mathfrak{b}_{t-2}}\right)=-1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left(\frac{\varepsilon_{r^*},\mu}{\mathfrak{b}_t}\right)=+1,\ \left(\frac{\varepsilon_{r^*},\mu}{\mathfrak{b}_{t-1}}\right)=+1,\ \left(\frac{\varepsilon_{r^*},\mu}{\mathfrak{b}_{t-2}}\right)=+1,\cdots,\left(\frac{\varepsilon_{r^*},\mu}{\mathfrak{b}_{t-r^*+1}}\right)=-1\end{cases}$$

gelten und dass ausserdem für eine jede solche Einheit ξ, die den r^* Gleichungen

$$\left(\frac{\xi,\mu}{\mathfrak{b}_t}\right)=+1,\ \left(\frac{\xi,\mu}{\mathfrak{b}_{t-1}}\right)=+1,\ \cdots,\ \left(\frac{\xi,\mu}{\mathfrak{b}_{t-r^*+1}}\right)=+1$$

genügt, nothwendig auch die $t-r^*$ Symbole

$$\left(\frac{\xi,\mu}{\mathfrak{b}_1}\right),\ \cdots,\ \left(\frac{\xi,\mu}{\mathfrak{b}_{t-r^*}}\right)$$

sämmtlich den Werth $+1$ besitzen.

Wir können nunmehr mit Rücksicht auf die zweite Formel in Satz 14 die vorhin aus dem Ideal $\mathfrak{J}$ gebildete Zahl ν des Körpers k derart mit gewissen der Einheiten $\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_{r^*}$ multipliciren, dass das entstehende Product $\bar{\nu}$ den Gleichungen

$$\left(\frac{\bar{\nu},\mu}{\mathfrak{b}_t}\right)=+1,\ \left(\frac{\bar{\nu},\mu}{\mathfrak{b}_{t-1}}\right)=+1,\ \cdots,\ \left(\frac{\bar{\nu},\mu}{\mathfrak{b}_{t-r^*+1}}\right)=+1$$

genügt; ist $\bar{\nu}$ derart bestimmt, so bezeichne ich die $r=t-r^*$ Einheiten ± 1

$$\left(\frac{\bar{\nu},\mu}{\mathfrak{b}_1}\right),\ \cdots,\ \left(\frac{\bar{\nu},\mu}{\mathfrak{b}_r}\right)$$

als das *Charakterensystem des Ideals* $\mathfrak{J}$. Dasselbe ist durch das Ideal $\mathfrak{J}$ völlig eindeutig bestimmt. In § 19 wird gezeigt werden, dass stets $r^*<t$ und mithin $r\geqq 1$ wird.

§ 18.

Der Begriff des Geschlechtes.

Wir erkennen sofort die Thatsache, dass die Ideale ein und derselben Classe des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ sämmtlich dasselbe Charakterensystem besitzen. Hierdurch ist überhaupt einer jeden Idealclasse des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ ein bestimmtes Charakterensystem zugeordnet.

Definition 12. Alle diejenigen Idealclassen, denen ein und dasselbe Charakterensystem zugeordnet ist, deren Ideale also sämmtlich

ein und dasselbe Charakterensystem besitzen, fassen wir zu einem *Geschlecht* zusammen und definiren insbesondere das *Hauptgeschlecht* als die Gesammtheit aller derjenigen Classen, deren Charakterensystem aus lauter Einheiten $+1$ besteht. Da das Charakterensystem der Hauptclasse offenbar von der letzteren Eigenschaft ist, so gehört insbesondere die Hauptclasse stets zum Hauptgeschlecht.

Aus der zweiten Formel des Satzes 14 entnehmen wir leicht die folgenden Thatsachen: Wenn G und G' zwei beliebige Geschlechter sind und die Classen in G mit den Classen in G' multiplicirt werden, so bilden sämmtliche solche Producte wiederum ein Geschlecht; dieses werde das *Product der Geschlechter* G und G' genannt. Das Charakterensystem desselben erhalten wir durch Multiplication der entsprechenden Charaktere der beiden Geschlechter G und G'.

Jedes Geschlecht des Körpers K enthält gleich viel Classen, nämlich so viel Classen als das Hauptgeschlecht. Die zu irgend einer Classe C relativ conjugirte Classe SC gehört zu demselben Geschlechte wie C selbst. Das Quadrat einer jeden Classe C gehört stets zum Hauptgeschlecht.

Die h Classen eines beliebigen Complexes P gehören offenbar sämmtlich zu dem nämlichen Geschlecht; ich bezeichne dieses Geschlecht als das *Geschlecht des Complexes* P.

§ 19.

Obere Grenze für die Anzahl der Geschlechter in K.

Es entsteht die wichtige Frage, ob ein System von r beliebig vorgelegten Einheiten ± 1 stets das Charakterensystem für ein Geschlecht in K sein kann. Wir beweisen zunächst einige zur Beantwortung dieser Frage nothwendige Hülfssätze.

Satz 24. (Hülfssatz) Wenn t und v die Bedeutung wie in Satz 23 haben und r wie in § 17 die Anzahl der Charaktere ist, welche das Geschlecht einer Idealclasse in K bestimmen, so ist stets

$$t + v - \frac{m}{2} \leqq r.$$

Beweis. Im Beweise zu Satz 22 und Satz 23 sind v^* Einheiten $\eta_1, \ldots, \eta_{v^*}$ und $v - v^*$ Einheiten $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{v-v^*}$ mit gewissen dort entwickelten Eigenschaften aufgestellt worden. Es seien ferner $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r^*}$ diejenigen besonderen r^* Einheiten des Körpers k, die in § 17 eingeführt worden sind; dann ist $r = t - r^*$. Wir beweisen zunächst, dass die $r^* + v$ aus

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r^*}, \quad \eta_1, \ldots, \eta_{v^*}, \quad \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{v-v^*}$$

entspringenden Einheitenverbände von einander unabhängig sind. In

der That, nehmen wir an, es gäbe zwischen den genannten $r^* + v$ Einheiten eine Relation von der Gestalt

$$(1) \qquad \varepsilon_1^{a_1} \dots \varepsilon_{r^*}^{a_{r^*}} \eta_1^{b_1} \dots \eta_{v^*}^{b_{v^*}} \vartheta_1^{c_1} \dots \vartheta_{v-v^*}^{c_{v-v^*}} = \xi^2,$$

so dass die Exponenten $a_1, \dots, a_{r^*}, b_1, \dots, b_{v^*}, c_1, \dots, c_{v-v^*}$ gewisse Werthe 0, 1, jedoch nicht sämmtlich den Werth 0 haben und ξ eine geeignete Einheit in k vorstellt: dann müsste für jedes Primideal $\mathfrak{w}$ des Körpers k

$$\left(\frac{\varepsilon_1^{a_1} \dots \varepsilon_{r^*}^{a_{r^*}} \eta_1^{b_1} \dots \eta_{v^*}^{b_{v^*}} \vartheta_1^{c_1} \dots \vartheta_{v-v^*}^{c_{v-v^*}}, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

ausfallen, und wenn wir berücksichtigen, dass die Einheiten

$$\eta_1, \dots, \eta_{v^*}, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{v-v^*}$$

sämmtlich Relativnormen von Zahlen in K sind und daher auch stets

$$\left(\frac{\eta_x, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1, \quad \left(\frac{\vartheta_y, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$
$$(x = 1, 2, \dots, v^*; \; y = 1, 2, \dots, v - v^*)$$

sein muss, so ergiebt sich

$$\left(\frac{\varepsilon_1^{a_1} \dots \varepsilon_{r^*}^{a_{r^*}}, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1.$$

Hierin setzen wir der Reihe nach für $\mathfrak{w}$ jedes der r^* in der Relativdiscriminante von K aufgehenden Primideale $\mathfrak{b}_{t-r^*+1}, \dots, \mathfrak{b}_t$ ein und erhalten so die Gleichungen

$$(2) \qquad \left(\frac{\varepsilon_1^{a_1} \dots \varepsilon_{r^*}^{a_{r^*}}, \mu}{\mathfrak{b}_i}\right) = +1, \quad (i = t - r^* + 1, \dots, t).$$

Wegen des in § 18 aufgestellten Systems von Formeln (1) für die Einheiten $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r^*}$ können diese Gleichungen (2) nur bestehen, wenn die Exponenten $a_1, \dots, a_{r^*}$ sämmtlich gerade und also gleich 0 sind. Die Relation (1) erhält dann die Gestalt

$$\eta_1^{b_1} \dots \eta_{v^*}^{b_{v^*}} \vartheta_1^{c_1} \dots \vartheta_{v-v^*}^{c_{v-v^*}} = \xi^2.$$

Das Bestehen dieser Relation ist aber, da nach § 16 die durch $\eta_1, \dots, \eta_{v^*}, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{v-v^*}$ bestimmten Einheitsverbände von einander unabhängig sind, nur möglich, falls die Exponenten $b_1, \dots, b_{v^*}$, $c_1, \dots, c_{v-v^*}$ sämmtlich gerade und also gleich 0 sind. Daraus folgt, dass eine Relation von der Gestalt (1), wie wir sie annahmen, nicht statthaben kann, d. h. die aus den Einheiten $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r^*}, \eta_1, \dots, \eta_{v^*}$, $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{v-v^*}$ entspringenden Verbände sind von einander unabhängig; durch Multiplication erhalten wir also aus diesen Verbänden genau 2^{r^*+v} von einander verschiedene Einheitenverbände in k, und da

es im Ganzen in k nach § 11 nur $2^{\frac{m}{2}}$ Einheitenverbände giebt, so haben wir $r^* + v \leqq \frac{m}{2}$. Hiermit deckt sich die Aussage des Satzes 24.

Da nach der Bemerkung am Schluss von § 15 stets $t + v^* - \frac{m}{2} > 0$ und also umsomehr $t + v - \frac{m}{2} > 0$ ausfällt, so folgt aus Satz 24 insbesondere $r \geqq 1$ und also $r^* < t$.

Satz 25. (Hülfssatz) Die Anzahl g der verschiedenen Geschlechter im Körper $K(\sqrt{\mu})$ ist kleiner oder höchstens gleich der Anzahl A der ambigen Complexe des Körpers $K(\sqrt{\mu})$.

Beweis. Wenn g die Anzahl der Geschlechter ist, in welche sich die Ideale oder die Idealclassen des Körpers K eintheilen, so zerfallen zufolge der letzten Bemerkung in § 18 auch die Complexe des Körpers K genau in g Geschlechter. Bezeichnen wir daher mit f die Anzahl der Complexe vom Hauptgeschlecht, so ist die Anzahl aller überhaupt vorhandenen Complexe, welche M heisse, genau

$$M = gf.$$

Wie bereits in § 18 bemerkt worden ist, gehört das Quadrat einer beliebigen Classe C stets zum Hauptgeschlecht, und daher ist auch das Quadrat eines beliebigen Complexes stets ein Complex des Hauptgeschlechtes. Wir fassen nun diejenigen Complexe des Hauptgeschlechtes ins Auge, welche Quadrate von Complexen sind; ihre Anzahl sei f', und wir bezeichnen sie mit $P_1, \ldots, P_{f'}$, so dass $P_1 = Q_1^2, \ldots, P_{f'} = Q_{f'}^2$ wird, wo $Q_1, \ldots, Q_{f'}$ gewisse Complexe bedeuten. Es fällt offenbar $f' \leqq f$ aus. Ist jetzt P ein beliebiger Complex, so wird P^2 nothwendig ein bestimmter der f' Complexe $P_1, \ldots, P_{f'}$; es sei etwa $P^2 = P_i$. Dann folgt $P^2 = Q_i^2$, d. h. $(PQ_i^{-1})^2 = 1$ und nach § 12 ist aus diesem Grunde PQ_i^{-1} ein ambiger Complex A; es wird $P = AQ_i$, und folglich stellt der Ausdruck AQ_i überhaupt alle Complexe dar, sobald A alle ambigen Complexe und Q_i die f' Complexe $Q_1, \ldots, Q_{f'}$ durchläuft. Auch ist klar, dass diese Darstellung für jeden Complex nur auf eine Weise möglich ist; es ist daher die Anzahl aller überhaupt vorhandenen Complexe

$$M = \mathrm{A}f'.$$

Die Zusammenstellung dieser Gleichung mit der vorhin gefundenen $M = gf$ liefert $gf = \mathrm{A}f'$, und wegen $f' \leqq f$ folgt hieraus $g \leqq \mathrm{A}$, womit der Satz 25 bewiesen ist.

Nunmehr sind wir im Stande, die folgende Thatsache zu beweisen, welche für unsere späteren Entwickelungen von besonderer Bedeutung ist:

Satz 26. (Hülfssatz) Wenn im Körper K die Anzahl der Charaktere, welche das Geschlecht einer Classe bestimmen, gleich r ist, so genügt die Anzahl g der Geschlechter jenes Körpers stets der Bedingung

$$g \leqq 2^{r-1}.$$

Beweis. Nach Satz 23 ist die Anzahl A aller ambigen Complexe in K

$$A = 2^a = 2^{t+v-\frac{m}{2}-1}.$$

Nach Satz 24 gilt die Ungleichung

$$t + v - \frac{m}{2} \leqq r;$$

mithin ist auch

$$A \leqq 2^{r-1}$$

und daraus folgt, vermöge Satz 25, die Richtigkeit des Satzes 26.

§ 20.

Das primäre Primideal $\mathfrak{p}$ und das Symbol $\left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{p}}\right)$.

Es ist für die folgenden Entwickelungen von Nutzen, eine gewisse Art von Primidealen in k besonders zu benennen.

Definition 13. Ein solches zu 2 primes Primideal des Körpers k, nach welchem jede Einheit in k quadratischer Rest ist, möge ein *primäres Primideal* heissen; dagegen möge jedes solche Primideal *nichtprimär* genannt werden, nach welchem wenigstens eine Einheit in k quadratischer Nichtrest ist.

Wir führen für primäre Primideale noch ein neues Symbol ein.

Definition 14. Es sei $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal und $\mathfrak{j}$ ein beliebiges Ideal in k; es werde $\mathfrak{j}^h = (\iota)$ gesetzt, wo ι eine ganze Zahl in k bedeutet; dieselbe ist bis auf eine Einheit als Factor eindeutig durch das Ideal $\mathfrak{j}$ bestimmt. Das Symbol $\left(\frac{\iota}{\mathfrak{p}}\right)$ ist folglich ein durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{j}$ völlig bestimmter Werth $+1$ oder -1 oder 0; dieser Werth werde mit $\left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{p}}\right)$ bezeichnet, so dass das neue Symbol $\left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{p}}\right)$ durch die Gleichung

$$\left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\iota}{\mathfrak{p}}\right)$$

definirt ist.

Sind $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$ irgend zwei zu $\mathfrak{p}$ prime Ideale in k, so gilt offenbar stets die Gleichung

$$\left(\frac{\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{j}_1}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\mathfrak{j}_2}{\mathfrak{p}}\right).$$

Ist η eine ganze Zahl in k und $\mathfrak{h} = (\eta)$ das durch η dargestellte Hauptideal, so ist offenbar

$$\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{p}}\right);$$

denn da h ungerade ist, so haben beide Seiten dieser Gleichung den Werth $\left(\frac{\pi^h}{\mathfrak{p}}\right)$.

In § 21 werden wir gewisse Systeme von $\frac{m}{2}$ nichtprimären Primidealen des Körpers k untersuchen und in § 23 die wichtigste Eigenschaft der primären Primideale beweisen.

§ 21.

Ein System von $\frac{m}{2}$ nichtprimären Primidealen des Körpers k.

Es sei, wie zu Beginn von § 14, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}$ ein volles System von Grundeinheiten in k; ferner sei $\varepsilon_{\frac{m}{2}} = \zeta$ eine wie in § 11 bestimmte Einheitswurzel in k, so dass nach § 11 jede beliebige Einheit ε des Körpers k sich auf eine und nur auf eine Weise in der Gestalt

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{e_1} \varepsilon_2^{e_2} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{e_{\frac{m}{2}}} \xi^2$$

darstellen lässt, wo $e_1, \ldots, e_{\frac{m}{2}}$ gewisse Werthe $0, 1$ haben und ξ eine Einheit in k bedeutet. Es sind dann die aus $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}$ entspringenden Verbände des Körpers k von einander unabhängig und diese $\frac{m}{2}$ Verbände liefern durch Multiplication die sämmtlichen $2^{\frac{m}{2}}$ Einheitenverbände des Körpers k.

Satz 27*). *Die Relativdiscriminante eines relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$ in Bezug auf k ist stets von 1 verschieden.*

Beweis. Zufolge der Bemerkung am Ende des § 15 gilt bei Benutzung der in Satz 22 erklärten Bezeichnungen die Ungleichung

$$t + v^* - \frac{m}{2} > 0.$$

Da die Anzahl sämmtlicher Einheitenverbände im Körper k genau $2^{\frac{m}{2}}$ beträgt, so ist nothwendig $\frac{m}{2} \geqq v^*$ und mithin erhalten wir $t > 0$. Diese Folgerung stimmt mit der Aussage des Satzes 27 überein.

Satz 28. Wenn eine Einheit ε des Körpers k congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl nach 2^2 ausfällt, so ist sie das Quadrat einer Einheit in k.

---

*) Vgl. „Algebraische Zahlkörper" Satz 94 S. 279, sowie die daselbst zu diesem Satze gemachte Bemerkung.

Beweis. Nehmen wir im Gegentheil an, es wäre ε nicht das Quadrat einer Zahl in k, so würde $\sqrt{\varepsilon}$ einen relativquadratischen Körper bestimmen; wegen der Sätze 4 und 5 besässe dieser Körper die Relativdiscriminante 1 und, da dies nach Satz 27 nicht sein kann, so ist die Annahme, von der wir ausgingen, unzutreffend.

Die Gültigkeit der Sätze 27 und 28 ist wesentlich durch die beiden besonderen Annahmen bedingt, welche wir im Anfange dieses Abschnittes II (S. 27) für den Körper k gemacht haben. Wenn also etwa k^* ein Zahlkörper ist, der entweder selbst reell ist, bez. einen reellen conjugirten Körper besitzt oder dessen Classenanzahl gerade ausfällt, so kann es sehr wohl einen relativquadratischen Körper K^* geben, der in Bezug auf k^* die Relativdiscriminante 1 besitzt, und es ist die Aufstellung und Untersuchung aller solcher relativquadratischen Körper K^* sogar die wichtigste und schwierigste Aufgabe, die sich bei der Ausdehnung unserer Theorie auf beliebige Grundkörper k^* bietet.

Satz 29. Es sei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}$ das zu Beginn dieses § 21 aufgestellte System von Einheiten in k; es seien ferner $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}$ solche zu 2 prime Primideale des Körpers k, für welche allemal

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) = -1, \quad \left(\frac{\varepsilon_k}{\mathfrak{q}_i}\right) = +1, \quad (i \neq k),$$

$$\left(i, k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right)$$

ausfällt; endlich setzen wir

$$\mathfrak{q}_1^h = (\varkappa_1), \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}^h = \left(\varkappa_{\frac{m}{2}}\right),$$

so dass $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\frac{m}{2}}$ gewisse ganze Zahlen des Körpers k bedeuten: dann gilt für jede beliebige zu 2 prime ganze Zahl ω in k nach dem Modul 2^2 eine Congruenz von der Gestalt

$$\omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \alpha^2, \quad (2^2),$$

worin die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ gewisse Werthe 0, 1 haben und α eine geeignete ganze Zahl in k ist.

Beweis. Wir behandeln zunächst die Annahme, es gäbe m Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ die gewisse Werthe 0, 1 haben, aber nicht sämmtlich gleich 0 sind, derart, dass die vermöge dieser Exponenten gebildete Zahl

$$\mu = \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}} \varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \tag{1}$$

dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 congruent werde. Die Zahl $\sqrt{\mu}$ bestimmt, wie leicht ersichtlich, einen relativquadratischen Körper $K(\sqrt{\mu})$ in Bezug auf k. Zufolge des Satzes 5 ist die Relativdiscriminante dieses Körpers $K(\sqrt{\mu})$ prim zu 2 und nach Satz 4 besitzt sie diejenigen von den Primidealen $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}$ zu Factoren, für welche in (1) die betreffenden Exponenten $v_1, \dots, v_{\frac{m}{2}}$ gleich 1 werden. Wegen Satz 27 ist die Anzahl t dieser Primideale mindestens gleich 1; es seien etwa die t Primideale $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$ diejenigen, die in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ als Factoren enthalten sind.

Ist nun ε irgend eine Einheit in k, die gleich der Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ gesetzt werden kann, und bringen wir ε in die Gestalt

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{e_1} \dots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{e_{\frac{m}{2}}} \xi^2,$$

wo die Exponenten $e_1, \dots, e_{\frac{m}{2}}$ gewisse Werthe 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet, so folgt aus Definition 6 unmittelbar

$$\left(\frac{\varepsilon, \mu}{\mathfrak{q}_i}\right) = +1$$

für $i = 1, 2, \dots, t$ und, da nach Satz 9 mit Rücksicht auf unsere über $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}$ gemachten Voraussetzungen

$$\left(\frac{\varepsilon, \mu}{\mathfrak{q}_i}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_i}\right) = (-1)^{e_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, t)$$

ausfällt, so folgt nothwendig

$$e_1 = 0, \; e_2 = 0, \; \dots, \; e_t = 0,$$

d. h. die Einheit ε muss ein Product aus gewissen von den $\frac{m}{2} - t$ Einheiten $\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+2}, \dots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}$ in das Quadrat einer Einheit des Körpers k sein. Die sämmtlichen Einheiten in k, welche Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\mu})$ sind, machen also höchstens $2^{\frac{m}{2}-t}$ Verbände in k aus; somit würde unter Anwendung der in Satz 22 erklärten Bezeichnungsweise

$$v^* \leqq \frac{m}{2} - t \text{ oder } t + v^* - \frac{m}{2} \leqq 0$$

sein müssen, was der Bemerkung am Schluss von § 15 widerspricht. Unsere vorhin versuchte Annahme ist also unzutreffend, d. h. es ist keine Zahl μ von der Gestalt (1) nach 2^2 dem Quadrat einer ganzen Zahl in k congruent, es sei denn, dass die Exponenten

$$u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$$

sämmtlich gleich 0 sind.

Wir verstehen nun unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\varphi(2)}$ ein volles System von $\varphi(2)$ ganzen nach dem Modul 2 einander incongruenten und zu 2 primen Zahlen in k. Dann stellt der Ausdruck

$$(2) \qquad \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \alpha_i^2$$

$$\left(u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}} = 0, 1;\ i = 1, 2, 3, \ldots, \varphi(2)\right)$$

ein System von $2^m \varphi(2)$ Zahlen dar, welche unter einander nach 2^2 incongruent sind. In der That, wären zwei von diesen $2^m \varphi(2)$ Zahlen (2) nach 2^2 congruent, wäre etwa

$$\varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \alpha_i^2 \equiv \varepsilon_1^{u_1'} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}'} \varkappa_1^{v_1'} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}'} \alpha_{i'}^2, \quad (2^2),$$

so würde, da $\alpha_i, \alpha_{i'}$ zu 2 prim sind, aus dem vorhin Bewiesenen sofort folgen, dass die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ sämmtlich bez. mit den Exponenten $u_1', \ldots, u_{\frac{m}{2}}', v_1', \ldots, v_{\frac{m}{2}}'$ übereinstimmen, und es wäre mithin

$$(3) \qquad \alpha_i^2 \equiv \alpha_{i'}^2, \quad (2^2).$$

Betrachten wir jetzt ein in der Zahl 2 als Factor enthaltenes Primideal $\mathfrak{l}$ und nehmen an, es gehe dasselbe in 2 genau zur l^{ten} Potenz auf, so folgt aus (3)

$$(\alpha_i - \alpha_{i'})(\alpha_i + \alpha_{i'}) \equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{2l});$$

es ist mithin entweder $\alpha_i - \alpha_{i'}$ oder $\alpha_i + \alpha_{i'}$ durch $\mathfrak{l}^l$ theilbar, und da offenbar

$$\alpha_i - \alpha_{i'} \equiv \alpha_i + \alpha_{i'}, \quad (2)$$

ist, so folgt in jedem Falle

$$\alpha_i \equiv \alpha_{i'}, \quad (\mathfrak{l}^l).$$

Die nämliche Betrachtung gilt für jedes in 2 aufgehende Primideal und daher erhalten wir

$$\alpha_i \equiv \alpha_{i'}, \quad (2)$$

und schliessen hieraus

$$\alpha_i = \alpha_{i'},$$

d. h. die beiden ganzen Zahlen des Systems (2) waren nicht von einander verschieden. Bezeichnen wir die verschiedenen in 2 aufgehenden Primideale des Körpers k mit $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$, so haben wir

$$\varphi(2)^*) = 2^m \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{l}_1)}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{l}_s)}\right),$$

$$\varphi(2^2) = 2^{2m} \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{l}_1)}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{l}_s)}\right);$$

es ist somit $2^m \varphi(2) = \varphi(2^2)$ und die Zahlen von der Gestalt (2), deren Anzahl $\varphi(2^2)$ ist, bilden folglich ein volles System von Resten nach dem Modul 2^2, die zu 2 prim sind; dies ist die Aussage des Satzes 29.

§ 22.

Die unendliche Reihe $\sum_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}}\right) \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{w})^s}$.

Ehe wir näher die Natur der primären Primideale ergründen, entwickeln wir einige Sätze, die sich an die Ueberlegungen in § 13 anschliessen.

Satz 30. (Hülfssatz) Die reellen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ mögen als rechtwinklige Coordinaten eines m-dimensionalen Raumes betrachtet werden und es sei in diesem Raume eine endliche Anzahl von $(m-1)$-dimensionalen Flächenschaaren durch Gleichungen von der Gestalt

$$f_1(x_1, \ldots, x_m, \tau) = 0, \quad f_2(x_1, \ldots, x_m, \tau) = 0, \ldots$$

gegeben, wo $f_1, f_2, \ldots$ analytische Functionen der Argumente $x_1, \ldots, x_m, \tau$ bedeuten, die in der Umgebung des Parameterwerthes $\tau = 0$ sich regulär verhalten; diese Flächen mögen, wenn wir dem Parameter τ einen festen positiven Werth oder den Werth 0 ertheilen, einen bestimmten ganz im Endlichen gelegenen Theil R_τ des m-dimensionalen Raumes abgrenzen. Nunmehr wählen wir für den Parameter τ einen positiven Werth und fixiren in dem m-dimensionalen Raume alle Punkte, deren Coordinaten von der Form

$$x_1 = u_1 \tau, \; x_2 = u_2 \tau, \ldots, x_m = u_m \tau$$

sind, wo $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sämmtliche ganze rationale Zahlen durchlaufen: dann wird die Anzahl T aller derjenigen solchen Punkte, die in jenem Raume R_τ liegen, durch die Formel

$$T = \frac{J}{\tau^m} + \frac{M}{\tau^{m-1}}$$

dargestellt, wo J den Inhalt des für $\tau = 0$ sich ergebenden Raumes R_0 und M eine von τ abhängige Grösse bezeichnet, welche stets zwischen endlichen Grenzen bleibt, sobald τ gegen 0 convergirt.

---

*) Vergl. Algebraische Zahlkörper Satz 23, S. 192.

Dieser Hülfssatz ist eine Erweiterung desjenigen Satzes, welchen bereits H. Minkowski*) und H. Weber**) aufgestellt und bewiesen haben, und man erkennt ohne Schwierigkeit die Abänderungen, welche diese Beweise verlangen, wenn man die Richtigkeit der soeben von mir aufgestellten Erweiterung einsehen will.

Satz 31. Ist $\mathfrak{p}$ ein bestimmtes primäres Primideal, so stellt die über sämmtliche Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k zu erstreckende unendliche Summe

$$\sum_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}}\right) \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s}, \qquad (s > 1)$$

eine solche Function der reellen Veränderlichen s dar, welche stets unterhalb einer *positiven* endlichen Grenze bleibt, wenn die reelle Veränderliche s sich der Grenze 1 nähert.

Beweis. Aus den m conjugirten Körpern $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ wählen wir irgend solche $\frac{m}{2} - 1$ Körper aus, von denen keine zwei zu einander conjugirt imaginär sind, und bezeichnen diese mit $k_1, k_2, \ldots, k_{\frac{m}{2}-1}$. Ist ferner α irgend eine von 0 verschiedene Zahl in k, so bezeichnen wir die zu α conjugirten in $k_1, \ldots, k_{\frac{m}{2}-1}$ liegenden Zahlen bez. mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{m}{2}-1}$ und nennen die $\frac{m}{2} - 1$ reellen Logarithmen

$$\begin{aligned} l_1(\alpha) &= 2 \log |\alpha_1|, \\ l_2(\alpha) &= 2 \log |\alpha_2|, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ l_{\frac{m}{2}-1}(\alpha) &= 2 \log \left|\alpha_{\frac{m}{2}-1}\right| \end{aligned}$$

kurz die Logarithmen zur Zahl α. Endlich bezeichnen wir mit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}$ ein System von $\frac{m}{2} - 1$ Grundeinheiten in k und berechnen dann aus den Gleichungen

$$l_1(\alpha) - \frac{2}{m} \log n(\alpha) = e_1(\alpha) l_1(\varepsilon_1) + \cdots + e_{\frac{m}{2}-1}(\alpha) l_1\left(\varepsilon_{\frac{m}{2}-1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_{\frac{m}{2}-1}(\alpha) - \frac{2}{m} \log n(\alpha) = e_1(\alpha) l_{\frac{m}{2}-1}(\varepsilon_1) + \cdots + e_{\frac{m}{2}-1}(\alpha) l_{\frac{m}{2}-1}\left(\varepsilon_{\frac{m}{2}-1}\right)$$

---

*) Geometrie der Zahlen, Teubner 1896, S. 62.

**) Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung, Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1896, S. 275. H. Weber hat diesen Satz hernach in seinen Untersuchungen „Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern" zweite Abhandlung Math. Ann. Bd. 49, S. 83 auf ein dem meinigen verwandtes Problem der Zahlentheorie angewandt.

$\frac{m}{2} - 1$ reelle Grössen $e_1(\alpha), \ldots, e_{\frac{m}{2}-1}(\alpha)$; diese $\frac{m}{2} - 1$ Grössen mögen kurz die Exponenten zur Zahl α heissen. Es ist klar, dass jede Zahl α durch Multiplication mit ganzen Potenzen von $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}$ auf eine und nur auf eine Weise in eine solche Zahl α^* verwandelt werden kann, zu der die Exponenten $e_1, \ldots, e_{\frac{m}{2}-1}$ den Bedingungen

$$0 \leqq e_1 < 1,\ 0 \leqq e_2 < 1, \ldots, 0 \leqq e_{\frac{m}{2}-1} < 1$$

genügen. Umgekehrt sehen wir leicht, dass zwei Einheiten, deren Exponenten bez. einander gleich sind, sich nur um einen Factor unterscheiden können, welcher eine Einheitswurzel ist. Die Anzahl aller in k liegenden Einheitswurzeln werde mit w bezeichnet.

Es sei nun C eine beliebige Idealclasse in k und $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{p}$ primes Ideal der zu C reciproken Classe C^{-1}; ferner bestimmen wir ein volles System von quadratischen Resten nach $\mathfrak{p}$, etwa $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$, und zwar derart, dass diese $\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}$ Zahlen $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ sämmtlich durch $\mathfrak{a}$ theilbar sind: dann lässt sich offenbar jede durch $\mathfrak{a}$ theilbare ganze Zahl in k, welche quadratischer Rest nach $\mathfrak{p}$ ist, in einer der $\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}$ Formen

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1 x^{(1)} + \cdots + u_m x^{(m)} + \varrho, \\ u_1 x^{(1)} + \cdots + u_m x^{(m)} + \varrho', \\ u_1 x^{(1)} + \cdots + u_m x^{(m)} + \varrho'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

darstellen, wo $u_1, \ldots, u_m$ gewisse ganze rationale Zahlen und $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ die Basiszahlen des Ideals $\mathfrak{p}\mathfrak{a}$ bedeuten. Es sei ferner α irgend ein durch $\mathfrak{a}$ theilbarer quadratischer Rest nach $\mathfrak{p}$; da $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal sein soll, so besitzt jede Zahl α^*, die durch Multiplication der Zahl α mit einer beliebigen Einheit entspringt, die gleiche Eigenschaft und ist mithin ebenfalls in einer jener Formen (1) darstellbar.

Indem wir diese Thatsachen zusammennehmen, erkennen wir Folgendes: das w-fache der Anzahl $F(t)$ aller durch $\mathfrak{a}$ theilbaren Hauptideale $\mathfrak{h}$, deren Normen die reelle positive Zahl t nicht überschreiten und für welche $\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ ausfällt, ist gleich der Anzahl T der verschiedenen Systeme von rationalen ganzzahligen Werthen $u_1, \ldots, u_m$, für welche die Ungleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} n(u_1 x^{(1)} + \cdots + u_m x^{(m)} + \varrho) \leqq t, \\ 0 \leqq e_1 (u_1 x^{(1)} + \cdots + u_m x^{(m)} + \varrho) < 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \leqq e_{\frac{m}{2}-1} (u_1 x^{(1)} + \cdots + u_m x^{(m)} + \varrho) < 1 \end{cases}$$

erfüllt sind, vermehrt um die entsprechenden Anzahlen T', T'', ..., wo allgemein $T^{(s)}$ die Anzahl der verschiedenen rationalen ganzzahligen Werthsysteme $u_1, \ldots, u_m$ bedeutet, für welche die Ungleichungen

$$\begin{aligned} n(u_1 x^{(1)} + \cdots + u_m x^{(m)} + \varrho^{(s)}) &\leqq t, \\ 0 \leqq e_1(u_1 x^{(1)} + \cdots + u_m x^{(m)} + \varrho^{(s)}) &< 1, \\ \cdots\cdots\cdots\

in den durch die Ungleichungen (3) charakterisirten Theil des x_m-Raumes fallen. Dieser Raumtheil liegt ganz im Endlichen wird durch eine endliche Anzahl analytischer Flächen begrenzt. Gleichungen dieser Flächen enthalten noch einen Parameter τ, da ihre linken Seiten für $\tau = 0$ im fraglichen Gebiete sich regulär alten, so sind alle Voraussetzungen des Satzes 30 erfüllt. Wir chnen mit J den Inhalt dieses Raumtheiles für $\tau = 0$, d. h. den lt desjenigen Raumtheiles, der durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} n(x_1 \varkappa^{(1)} + \cdots + x_m \varkappa^{(m)}) &\leqq 1, \\ 0 \leqq e_1 &< 1, \\ \cdots\cdots & \\ 0 \leqq e_{\frac{m}{2}-1} &< 1 \end{aligned}$$

akterisirt ist, wo jetzt die Grössen $e_1, \ldots, e_{\frac{m}{2}-1}$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} e_1 l_1(\varepsilon_1) + \cdots + e_{\frac{m}{2}-1} l_1\left(\varepsilon_{\frac{m}{2}-1}\right) &= 2\log\left|x_1 \varkappa_1^{(1)} + \cdots + x_m \varkappa_1^{(m)}\right| \\ &\quad - \frac{2}{m}\log n(x_1 \varkappa^{(1)} + \cdots + x_m \varkappa^{(m)}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ {}_{-1}(\varepsilon_1) + \cdots + e_{\frac{m}{2}-1} l_{\frac{m}{2}-1}\left(\varepsilon_{\frac{m}{2}-1}\right) &= 2\log\left|x_1 \varkappa_{\frac{m}{2}-1}^{(1)} + \cdots + x_m \varkappa_{\frac{m}{2}-1}^{(m)}\right| \\ &\quad - \frac{2}{m}\log n(x_1 \varkappa^{(1)} + \cdots + x_m \varkappa^{(m)}) \end{aligned}$$

Functionen von $x_1, \ldots, x_m$ zu bestimmen sind.
Nach Satz 30 ist die Anzahl T derjenigen Punkte mit den Coaten

$$x_1 = u_1 \tau, \ \ldots, \ x_m = u_m \tau,$$

in den durch (3) definirten Theil des $x_1 \ldots x_m$-Raumes fallen, h die Formel

$$T = \frac{J}{\tau^m} + \frac{M}{\tau^{m-1}} = Jt + Mt^{1-\frac{1}{m}}$$

estellt, wo M eine von t abhängige Grösse bedeutet, die für unch wachsende t stets zwischen endlichen Grenzen bleibt. Ebenso folgt

$$\begin{aligned} T' &= Jt + M' t^{1-\frac{1}{m}}, \\ T'' &= Jt + M'' t^{1-\frac{1}{m}}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

M', M'', ... ebenfalls von t abhängige und für unendlich wachsende t

zwischen endlichen Grenzen bleibende Grössen bedeuten. Durch Addition aller solchen $\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}$ Formeln erhalten wir

$$T+T'+T''+\cdots=\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}Jt+(M+M'+M''+\cdots)t^{1-\frac{1}{m}};$$

und folglich ist

$$(5)\qquad F(t)=\frac{1}{w}\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}Jt+\frac{1}{w}(M+M'+M''+\cdots)t^{1-\frac{1}{m}}.$$

Nach der nämlichen Methode erhalten wir für die Anzahl $G(t)$ aller durch $\mathfrak{a}$ theilbaren Hauptideale $\mathfrak{h}$ des Körpers k, deren Normen die reelle positive Zahl t nicht überschreiten und für welche $\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{p}}\right)=-1$ wird,

$$(6)\qquad G(t)=\frac{1}{w}\frac{n(\mathfrak{p})-1}{2}Jt+\frac{1}{w}(N+N'+N''+\cdots)t^{1-\frac{1}{m}},$$

wo N, N', N'', ... wiederum von t abhängige Grössen bedeuten, die für unendlich wachsende t stets zwischen endlichen Grenzen bleiben. Durch Subtraction der beiden Formeln (5), (6) ergiebt sich

$$(7)\qquad \Phi(t)=F(t)-G(t)=Dt^{1-\frac{1}{m}},$$

wo D ebenfalls eine von t abhängige Grösse bezeichnet, die für unendlich wachsende t zwischen endlichen Grenzen bleibt.

Wir haben offenbar

$$\sum_{(\mathfrak{h})}\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{p}}\right)\frac{1}{n(\mathfrak{h})^s}=\sum_{(\mathfrak{h}^{(+)})}\frac{1}{n(\mathfrak{h}^{(+)})^s}-\sum_{(\mathfrak{h}^{(-)})}\frac{1}{n(\mathfrak{h}^{(-)})^s},\quad (s>1),$$

wenn die Summe linker Hand über alle zu $\mathfrak{p}$ primen und durch $\mathfrak{a}$ theilbaren Hauptideale $\mathfrak{h}$ des Körpers k erstreckt wird, während auf der rechten Seite die erste Summe über alle zu $\mathfrak{p}$ primen und durch $\mathfrak{a}$ theilbaren Hauptideale $\mathfrak{h}^{(+)}$ mit der Eigenschaft $\left(\frac{\mathfrak{h}^{(+)}}{\mathfrak{p}}\right)=+1$ und die zweite Summe über alle zu $\mathfrak{p}$ primen und durch $\mathfrak{a}$ theilbaren Hauptideale $\mathfrak{h}^{(-)}$ mit der Eigenschaft $\left(\frac{\mathfrak{h}^{(-)}}{\mathfrak{p}}\right)=-1$ genommen wird. Andererseits ist mit Rücksicht auf die Bedeutung der Anzahlen $F(t)$, $G(t)$

$$\sum_{(\mathfrak{h}^{(+)})}\frac{1}{n(\mathfrak{h}^{(+)})^s}=\sum_{(t)}\frac{F(t)-F(t-1)}{t^s},\quad (s>1),$$

$$\sum_{(\mathfrak{h}^{(-)})}\frac{1}{n(\mathfrak{h}^{(-)})^s}=\sum_{(t)}\frac{G(t)-G(t-1)}{t^s},\quad (s>1)$$

und folglich wird

$$(8)\qquad \sum_{(\mathfrak{b})}\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{p}}\right)\frac{1}{n(\mathfrak{b})^s}=\sum_{(t)}\frac{\Phi(t)-\Phi(t-1)}{t^s},\quad (s>1),$$

wo die Summen rechter Hand stets über $t=1,2,3,\ldots$ zu erstrecken sind und $F(0)$, $G(0)$, $\Phi(0)$ gleich Null zu setzen sind. Nun haben wir

$$\sum_{(t)}\frac{\Phi(t)-\Phi(t-1)}{t^s}=\sum_{(t)}\Phi(t)\left(\frac{1}{t^s}-\frac{1}{(t+1)^s}\right),$$

und da für $t>0$, $s>1$

$$\frac{1}{t^s}-\frac{1}{(t+1)^s}=\frac{1}{t^s}\left\{1-\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-s}\right\},$$
$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-s}=1-\frac{s\vartheta}{t},\quad (0<\vartheta<1)$$

ist, so erhalten wir weiter

$$\sum_{(t)}\frac{\Phi(t)-\Phi(t-1)}{t^s}=\sum_{(t)}\Phi(t)\frac{s\vartheta}{t^{s+1}},\qquad (0<\vartheta<1),$$

und wegen (7) und (8) folgt hieraus

$$(9)\qquad \sum_{(\mathfrak{b})}\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{p}}\right)\frac{1}{n(\mathfrak{b})^s}=\sum_{(t)}\frac{s\vartheta D}{t^{s+\frac{1}{m}}},\quad (s>1).$$

Da nach dem vorhin Bewiesenen D für unendlich wachsende t zwischen endlichen Grenzen bleibt und der Werth der unendlichen Reihe

$$\sum_{(t)}\frac{1}{t^{s+\frac{1}{m}}}$$

für $s=1$ gegen eine endliche Grenze convergirt, so folgt aus (9), dass auch die unendliche Summe

$$(10)\qquad \sum_{(\mathfrak{b})}\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{p}}\right)\frac{1}{n(\mathfrak{b})^s},\quad (s>1)$$

eine Function von s darstellt, welche für $s=1$ gegen eine endliche Grenze convergirt.

Setzen wir in (10) $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{j}$, so gehört das zu $\mathfrak{p}$ prime Ideal $\mathfrak{j}$ der Classe C an und wir erhalten mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{p}}\right)$$

aus der zuletzt bewiesenen Thatsache das Resultat, dass die über alle zu $\mathfrak{p}$ primen Ideale $\mathfrak{j}$ der Classe C zu erstreckende unendliche Summe

$$(11)\qquad \sum_{(\mathfrak{j})}\left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{p}}\right)\frac{1}{n(\mathfrak{j})^s},\quad (s>1)$$

ebenfalls eine Function von s darstellt, welche für $s = 1$ gegen eine endliche Grenze convergirt. Bilden wir die dem Ausdrucke (11) entsprechenden unendlichen Summen unter Benutzung der h verschiedenen Classen des Körpers k und addiren alle so entstehenden h unendlichen Summen, so erkennen wir, dass auch die über alle zu $\mathfrak{p}$ primen Ideale $\mathfrak{j}$ des Körpers k erstreckte unendliche Summe

$$\sum_{(\mathfrak{j})} \left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{p}}\right) \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s}, \quad (s>1) \tag{12}$$

für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwerth convergirt.

Nun ist

$$\sum_{(\mathfrak{j})} \left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{p}}\right) \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} = \prod_{(\mathfrak{w})} \frac{1}{1-\left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}}\right) n(\mathfrak{w})^{-s}},$$

wenn das Product $\prod_{(\mathfrak{w})}$ über alle Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k erstreckt wird und folglich erhalten wir

$$\log \sum_{(\mathfrak{j})} \left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{p}}\right) \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} = \sum_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}}\right) \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} + f(s), \quad (s>1), \tag{13}$$

wobei die Summe $\sum_{(\mathfrak{w})}$ ebenfalls über alle Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k zu erstrecken ist und wo $f(s)$ eine Grösse darstellt, die für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwerth convergirt. Da (12) für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwerth convergirt, so muss nothwendig (13) für $s = 1$ entweder ebenfalls gegen einen endlichen Grenzwerth convergiren oder negativ über alle Grenzen wachsen; in beiden Fällen ersehen wir mithin die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes 31.

§ 23.

Eine Eigenschaft primärer Primideale.

Durch die beiden Sätze 29 und 31 gelangen wir zu folgendem wichtigen Satze über primäre Primideale:

Satz 32. Wenn $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal ist, so ist es stets möglich, in k eine ganze Zahl π zu finden, so dass das Ideal (π) gleich $\mathfrak{p}^4$ wird und überdies die Zahl π nach dem Modul 2^2 eine Congruenz von der Gestalt

$$\pi \equiv \alpha^2, \qquad (2^2)$$

erfüllt, wo α eine geeignete ganze Zahl des Körpers k ist.

Beweis. Es sei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}$ das zu Beginn von § 21 aufgestellte System von Einheiten in k; es seien ferner $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}$, wie in

Satz 29, solche zu 2 prime Primideale des Körpers k, für welche allemal

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) = -1, \quad \left(\frac{\varepsilon_k}{\mathfrak{q}_i}\right) = +1, \quad (i \neq k),$$
$$\left(i, k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right)$$

ausfällt. Die Existenz solcher Primideale folgt aus Satz 18. Wir setzen dann

$$\mathfrak{p}^k = (\pi^*), \ \mathfrak{q}_1^k = (\varkappa_1), \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}^k = (\varkappa_{\frac{m}{2}}),$$

so dass π^*, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\frac{m}{2}}$ gewisse ganze Zahlen des Körpers k bedeuten. Wenden wir nun den Satz 29 insbesondere auf die ganze Zahl π^* an, so ergiebt sich, dass π^* einer Congruenz von der Gestalt

$$\pi^* \equiv \varepsilon \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \alpha^2, \qquad (2^2) \tag{1}$$

genügt, wo ε eine geeignete Einheit in k, ferner $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ gewisse Exponenten 0, 1 und α eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet. Hätten in diesem Ausdrucke (1) rechter Hand die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ sämmtlich den Werth 0, so wäre bereits $\pi = \pi^* \varepsilon$ eine Zahl von der Art, wie sie Satz 32 verlangt. Wir nehmen also an, die Anzahl e derjenigen unter den Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$, welche gleich 1 ausfallen, sei grösser als 0.

Setzen wir

$$\mu = \pi^* \varepsilon \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}},$$

so besitzt nach Satz 5 der relativquadratische Körper $K(\sqrt{\mu})$ eine zu 2 prime Relativdiscriminante. Für diesen Fall ist der Satz 26 von uns bereits bewiesen worden. Indem wir die in Definition 11 gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, haben wir offenbar

$$t = e + 1, \quad r^* = e, \quad r = t - r^* = 1,$$

und nach dem Satze 26 ist folglich die Anzahl g der Geschlechter des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ höchstens gleich 1 und also gleich 1, d. h. alle Idealclassen des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ sind vom Hauptgeschlecht.

Aus der eben bewiesenen Thatsache, ziehen wir folgende Schlüsse: es sei $\mathfrak{r}$ irgend ein zu 2 primes Primideal in k mit der Eigenschaft

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right) = +1,$$

so dass $\mathfrak{r}$ nach Satz 7 in $K(\sqrt{\mu})$ in das Product zweier Primideale $\mathfrak{R}$, $S\mathfrak{R}$ zerfällt. Soll nun $\mathfrak{R}$ zum Hauptgeschlechte gehören, so muss

das Charakterensystem dieses Primideals im Körper $K(\sqrt{\mu})$ aus lauter Einheiten $+1$ bestehen; es muss also das Charakterensystem einer Zahl $\xi\varrho$, wobei ξ eine geeignete Einheit in k und ϱ eine ganze Zahl in h mit der Eigenschaft $\mathfrak{r}^h = (\varrho)$ bedeutet, ein aus lauter Einheiten $+1$ bestehendes Charakterensystem besitzen. Wir bilden insbesondere den Charakter der Zahl $\xi\varrho$ in Bezug auf das in der Relativdiscriminante von $K(\sqrt{\mu})$ aufgehende Primideal $\mathfrak{p}$ und erhalten dadurch

$$\left(\frac{\xi\varrho, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\xi\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

und wenn wir berücksichtigen, dass $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal ist, so wird

$$\left(\frac{\xi\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

d. h. jedes Primideal $\mathfrak{r}$ für welches $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right) = +1$ ausfällt, besitzt auch die Eigenschaft $\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}\right) = +1$.

Wir bestimmen nun an Stelle der Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}$ irgend $\frac{m}{2}$ andere Primideale $\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}'$ mit den entsprechenden Eigenschaften

$$\left(\frac{\mathfrak{s}_i}{\mathfrak{q}_i'}\right) = -1, \quad \left(\frac{\mathfrak{s}_k}{\mathfrak{q}_i'}\right) = +1, \qquad (i \neq k),$$

$$\left(i, k = 1, 2, \cdots, \frac{m}{2}\right)$$

und setzen wiederum $\mathfrak{q}_1'^h = (\varkappa_1')$, $\ldots$, $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}'^h = (\varkappa_{\frac{m}{2}}')$, wo $\varkappa_1', \ldots, \varkappa_{\frac{m}{2}}'$ ganze Zahlen in k sind; sodann denken wir uns die sämmtlichen Schlussfolgerungen dieses Beweises für das neue System von Primidealen $\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}'$ wiederholt. Auf diese Weise gelangen wir zu einem Ausdruck

$$\mu' = \pi^* \varepsilon' \varkappa_1'^{v_1'} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}'^{v_{\frac{m}{2}}'} \equiv \alpha'^2, \ (2^2),$$

in dem ε' eine gewisse Einheit und $v_1', \ldots, v_{\frac{m}{2}}'$ gewisse Exponenten 0, 1 bedeuten. Hätten hier die Exponenten $v_1', \ldots, v_{\frac{m}{2}}'$ sämmtlich den Werth 0, so wäre wiederum $\pi = \pi^* \varepsilon'$ eine Zahl von der Art, wie sie Satz 32 verlangt; wir nehmen also an, dass diese Exponenten $v_1', \ldots, v_{\frac{m}{2}}'$ nicht sämmtlich gleich 0 ausfallen und folgern dann wie vorhin, dass jedes Primideal $\mathfrak{r}$, für welches $\left(\frac{\mu'}{\mathfrak{r}}\right) = +1$ ist, auch die Eigenschaft $\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ besitzt.

Wir bezeichnen nun kurz mit $\mathfrak{r}_\mu$ alle diejenigen Primideale in k, für welche

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}_\mu}\right) = +1$$

ist und mit $\mathfrak{r}_{\mu\mu'}$ alle diejenigen Primideale in k, für welche zugleich

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}_{\mu\mu'}}\right) = -1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\mu'}{\mathfrak{r}_{\mu\mu'}}\right) = +1$$

ausfällt, ferner mit $\mathfrak{r}_\mathfrak{p}^{(+)}$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{p}^{(-)}$ diejenigen Primideale, für welche

$$\left(\frac{\mathfrak{r}_\mathfrak{p}^{(+)}}{\mathfrak{p}}\right) = +1 \quad \text{bez.} \quad \left(\frac{\mathfrak{r}_\mathfrak{p}^{(-)}}{\mathfrak{p}}\right) = -1$$

wird. Da die Zahlen μ, μ' sicher nicht Quadrate von ganzen Zahlen in k sind und bei unseren Annahmen das Nämliche auch für das Product $\mu\mu'$ gilt, so folgen aus Satz 17 die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{(\mathfrak{r}_\mu)} \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_\mu)^s} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{s-1} + f_\mu(s), & (s>1), \\ \sum\limits_{(\mathfrak{r}_{\mu\mu'})} \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_{\mu\mu'})^s} = \frac{1}{4}\log\frac{1}{s-1} + f_{\mu\mu'}(s), & (s>1); \end{cases}$$

hier sind die unendlichen Summen über alle Primideale $\mathfrak{r}_\mu$ bez. $\mathfrak{r}_{\mu\mu'}$ zu erstrecken und $f_\mu(s)$, $f_{\mu\mu'}(s)$ bedeuten Functionen der reellen Veränderlichen s, welche stets zwischen endlichen Grenzen bleiben, wenn s sich dem Werthe 1 nähert.

Die Primideale $\mathfrak{r}_\mu$ sind offenbar sämmtlich von den Primidealen $\mathfrak{r}_{\mu\mu'}$ verschieden und da nach dem vorhin Bewiesenen die Primideale $\mathfrak{r}_\mu$, $\mathfrak{r}_{\mu\mu'}$ sämmtlich unter den Primidealen $\mathfrak{r}_\mathfrak{p}^{(+)}$ vorkommen, so haben wir

$$\sum_{(\mathfrak{r}_\mathfrak{p}^{(+)})} \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_\mathfrak{p}^{(+)})^s} \geqq \sum_{(\mathfrak{r}_\mu)} \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_\mu)^s} + \sum_{(\mathfrak{r}_{\mu\mu'})} \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_{\mu\mu'})^s}$$

und folglich wegen (2)

$$(3) \qquad \sum_{(\mathfrak{r}_\mathfrak{p}^{(+)})} \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_\mathfrak{p}^{(+)})^s} \geqq \frac{3}{4}\log\frac{1}{s-1} + f_\mu(s) + f_{\mu\mu'}(s);$$

hier sind die unendlichen Summen wiederum über alle Primideale mit den betreffenden Eigenschaften zu erstrecken.

Die Primideale $\mathfrak{r}_\mathfrak{p}^{(+)}$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{p}^{(-)}$ erschöpfen offenbar, wenn man von dem einen Primideale $\mathfrak{p}$ absieht, die sämmtlichen Primideale $\mathfrak{w}$ in k und es ist daher

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum_{(r_\mathfrak{p}^{(+)})} \frac{1}{n(r_\mathfrak{p}^{(+)})^s} + \sum_{(r_\mathfrak{p}^{(-)})} \frac{1}{n(r_\mathfrak{p}^{(-)})^s} = -\frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} + \sum_{(\mathfrak{w})} \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} \\ \qquad\qquad = \log \frac{1}{s-1} + f(s), \end{cases}$$

wo die Summe $\sum_{(\mathfrak{w})}$ über sämmtliche Primideale $\mathfrak{w}$ in k erstreckt werden soll und $f(s)$ wiederum eine für $s=1$ zwischen endlichen Grenzen bleibende Grösse bezeichnet. Aus (3) und (4) zusammen folgt die Ungleichung

$$(5)\qquad \sum_{(r_\mathfrak{p}^{(+)})} \frac{1}{n(r_\mathfrak{p}^{(+)})^s} - \sum_{(r_\mathfrak{p}^{(-)})} \frac{1}{n(r_\mathfrak{p}^{(-)})^s} \geqq \tfrac{1}{2} \log \frac{1}{s-1} + 2f_\mu(s) + 2f_{\mu\mu'}(s) - f(s).$$

Wegen

$$\sum_{(r_\mathfrak{p}^{(+)})} \frac{1}{n(r_\mathfrak{p}^{(+)})^s} - \sum_{(r_\mathfrak{p}^{(-)})} \frac{1}{n(r_\mathfrak{p}^{(-)})^s} = \sum_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}}\right) \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s}$$

enthält die Ungleichung (5) unmittelbar einen Widerspruch gegen den Satz 31 und mithin sind unsere Annahmen zu verwerfen, d. h. es müssen die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ in der Congruenz (1) oder das zweite Mal die Exponenten $v_1', \ldots, v_{\frac{m}{2}}'$ in der entsprechenden Congruenz sämmtlich 0 sein; dann ist aber, wie bereits hervorgehoben wurde, $\pi = \pi^* \varepsilon$ bez. $\pi = \pi^* \varepsilon'$ eine Zahl von der Art, wie sie der Satz 32 verlangt und damit haben wir die Richtigkeit dieses Satzes erkannt.

Auch die Umkehrung des Satzes 32 ist gültig, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 33. Wenn π eine ganze Zahl in k bedeutet, welche dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach 2^2 congruent ausfällt, und wenn überdies (π) gleich $\mathfrak{p}^h$ ist, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal in k bedeutet, so ist dieses Primideal $\mathfrak{p}$ stets primär.

Beweis. Wir betrachten den Körper $K(\sqrt{\pi})$: Wegen Satz 4 und 5 besitzt die Relativdiscriminante dieses Körpers nur den einen Primfactor $\mathfrak{p}$. Mit Hülfe von Satz 22, nach der Bemerkung am Schluss von § 15, und bei Anwendung der Bezeichnungsweise dieses Satzes 22 für den Körper $K(\sqrt{\pi})$ erhalten wir wegen $t = 1$ die Ungleichung

$$1 + v^* - \frac{m}{2} > 0 \quad \text{d. h.} \quad v^* \geqq \frac{m}{2}.$$

Da andererseits v^* nach § 11 nicht grösser als $\frac{m}{2}$ sein kann, so haben wir $v^* = \frac{m}{2}$; es ist mithin jede Einheit ξ in k die Relativnorm einer Einheit des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ und hieraus folgt nach Satz 9

$$\left(\frac{\xi, \pi}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

d. h. $\mathfrak{p}$ ist ein primäres Primideal.

§ 24.

Zwei besondere Fälle des Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste im Körper k.

Auf Grund des Satzes 32 können wir folgende neue Definition aufstellen:

Definition 15. Wenn $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k ist und $\mathfrak{p}^h = (\pi)$ wird, wo π eine solche ganze Zahl in k bedeutet, die dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 congruent ausfällt, so nenne ich π eine Primärzahl des primären Primideals $\mathfrak{p}$. Wegen Satz 28 ist die Primärzahl π durch das primäre Primideal $\mathfrak{p}$ bis auf das Quadrat einer Einheit in k bestimmt.

Satz 34. Es sei $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k und $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Primideal in k; ferner sei π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$ und ϱ irgend eine ganze Zahl in k, so dass $(\varrho) = \mathfrak{r}^h$ wird: wenn dann $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = +1$ ist, so fällt auch $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ aus.

Beweis. Mit Rücksicht auf Definition 15 und wegen Satz 4 und 5 besitzt die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ nur den einen Primfactor $\mathfrak{p}$, und daher ist wegen Satz 26 in diesem Relativkörper die Anzahl der Geschlechter gleich 1, d. h. es gehören alle Ideale des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ dem Hauptgeschlechte an. Wegen der Annahme $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = +1$ ist nach Satz 7 $\mathfrak{r}$ in $K(\sqrt{\pi})$ in das Product zweier Primideale zerlegbar; für den Charakter eines jeden dieser beiden Primideale erhalten wir den Werth

$$\left(\frac{\varrho, \pi}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

womit der Satz 34 bewiesen ist.

Satz 35. Wenn $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}^*$ zwei primäre Primideale in k und π, π^* bez. Primärzahlen von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}^*$ sind, so gilt die Gleichung

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right) = \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{p}}\right).$$

Beweis. Im Falle $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right) = +1$ folgt die Richtigkeit dieses Satzes unmittelbar aus dem Satze 34. Nehmen wir andererseits $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right) = -1$ an, so muss nothwendig auch $\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{p}}\right) = -1$ sein; denn wäre $\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, so würde aus dem nämlichen Satze 34 die Gleichung $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right) = +1$ folgen, was der Annahme widerspricht.

§ 25.

Das Product $\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für ein zu 2 primes ν und bei gewissen Annahmen über μ.

Wir sind jetzt im Stande, einen weiteren wichtigen Bestandtheil des Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste im Körper k abzuleiten.

Satz 36. *Wenn ν, μ zu 2 prime ganze Zahlen in k sind und überdies die Zahl μ dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 congruent wird, so ist stets*

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

wo das Product über sämmtliche zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k erstreckt werden soll.

Beweis. Wir nehmen *erstens* ν gleich einer Zahl $\varkappa$ des Körpers k an, die von der Beschaffenheit ist, dass das Ideal $(\varkappa)$ die h^{te} Potenz eines nichtprimären Primideals $\mathfrak{q}$ in k wird; die Zahl μ dagegen sei ein Product von lauter Potenzen primärer Primideale. Bedeuten $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_t$ diejenigen unter diesen Primfactoren von μ, die in μ zu einer ungeraden Potenz aufgehen, so finden wir, wenn bez. $\delta_1, \ldots, \delta_t$ Primärzahlen von $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_t$ bezeichnen, bei Anwendung des Satzes 28 leicht die Gleichung

$$\mu^h = \delta_1 \ldots \delta_t \alpha^2, \tag{1}$$

wo α eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet. Wir betrachten den Körper $K(\sqrt{\mu})$; nach Satz 4 sind $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_t$ die in der Relativdiscriminante von $K(\sqrt{\mu})$ aufgehenden Primideale. Da diese t Primideale sämmtlich primär sein sollen und mithin für jede Einheit ξ stets

$$\left(\frac{\xi,\mu}{\mathfrak{b}_i}\right) = \left(\frac{\xi}{\mathfrak{b}_i}\right) = +1, \quad (i = 1, 2, \ldots, t)$$

ausfällt, so ist $r = t$ die Anzahl der Charaktere, welche das Geschlecht einer Classe in diesem Körper $K(\sqrt{\mu})$ bestimmen; es giebt daher nach Satz 26 in $K(\sqrt{\mu})$ höchstens 2^{t-1} Geschlechter.

Wir weisen nun nach, dass im Körper $K(\sqrt{\mu})$ wirklich 2^{t-1} Geschlechter vorhanden sind. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit $c_1, \ldots, c_t$ irgend t solche Einheiten ± 1, deren Product gleich $+1$ ist, und bestimmen dann ein Primideal $\mathfrak{p}$ in k, welches den Bedingungen

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\varepsilon_m}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\delta_1}{\mathfrak{p}}\right) = c_1, \cdots, \left(\frac{\delta_t}{\mathfrak{p}}\right) = c_t \tag{3}$$

genügt, wobei $\varepsilon_1, \ldots, \underset{2}{\varepsilon_m}$ das zu Beginn von § 21 aufgestellte System von Einheiten in k bedeuten soll; nach Satz 18 giebt es sicher Primideale $\mathfrak{p}$ von der verlangten Beschaffenheit. Wegen (2) ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal; es sei π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$. Nach Satz 35 folgen aus den Gleichungen (3) die Gleichungen

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_1}\right) = c_1, \ \ldots, \ \left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_t}\right) = c_t. \tag{4}$$

Wenn wir die Gleichungen (3) miteinander multipliciren, erhalten wir wegen (1) und wegen $c_1 \ldots c_t = +1$ die Gleichung

$$\left(\frac{\delta_1 \ldots \delta_t}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

d. h. $\mathfrak{p}$ zerfällt im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei Primfactoren. Die Charaktere eines jeden dieser Primfactoren stimmen wegen (4) mit $c_1, \ldots, c_t$ überein. Die Anzahl der möglichen Systeme von Einheiten $c_1, \ldots, c_t$ mit der Bedingung $c_1 \ldots c_t = +1$ ist offenbar 2^{t-1}; es existiren daher wirklich so viele Geschlechter, und da es nach dem vorhin Bewiesenen eine grössere Anzahl von Geschlechtern nicht geben kann, so erkennen wir hieraus die Thatsache, dass das Charakterensystem $c_1, \ldots, c_t$ eines jeden Geschlechts im Körper $K(\sqrt{\mu})$ nothwendig die Bedingung $c_1 \ldots c_t = +1$ erfüllen muss.

Um aus dieser Thatsache unter den an erster Stelle gemachten Annahmen den Satz 36 abzuleiten, nehmen wir zunächst an, es sei $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right) = +1$. Dann zerfällt $\mathfrak{q}$ in $K(\sqrt{\mu})$ in zwei Primfactoren; das Charakterensystem eines jeden dieser Primfactoren ist

$$\left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{b}_1}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_1}\right), \ \ldots, \ \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{b}_t}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_t}\right).$$

Da das Product dieser Charaktere nach dem vorhin Bewiesenen gleich $+1$ sein soll, so folgt wegen

$$\left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right) = +1$$

nothwendig die Gleichung

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

wenn das Product über alle zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k erstreckt wird; diese Gleichung zeigt unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung.

Ist dagegen $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right) = -1$, so bestimme man ein von den Primidealen $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_t$ verschiedenes primäres Primideal $\mathfrak{p}$ von der Art,

dass $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = -1$ ausfällt; nach Satz 18 ist dies stets möglich. Bezeichnet π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$, so muss nothwendig auch $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = -1$ ausfallen, weil im entgegengesetzten Falle aus Satz 34 $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ folgen würde. Nunmehr ist $\left(\frac{\mu\pi}{\mathfrak{q}}\right) = +1$, und wenn wir daher in der voranstehenden Betrachtung an Stelle von μ jetzt $\mu\pi$ nehmen, so geht aus derselben die Gleichung

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\varkappa, \mu\pi}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

hervor. Es ist aber

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = +1$$

und folglich

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\varkappa, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1; \tag{5}$$

damit ist die Behauptung des Satzes 36 unter den an erster Stelle gemachten Annahmen als richtig erkannt.

Wenden wir die Formel (5) insbesondere auf den Fall an, dass μ eine Primärzahl π eines primären Primideals $\mathfrak{p}$ ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = +1; \tag{6}$$

es ist folglich stets

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right). \tag{7}$$

Wir behandeln *zweitens* den Fall, dass ν eine Primärzahl π eines primären Primideals $\mathfrak{p}$ sei, während die Zahl μ beliebige primäre oder nichtprimäre Primideale enthalten möge. Setzen wir $(\mu) = \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\ldots$, wo $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ Primideale sind, und bezeichnen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ ganze Zahlen in k, so dass

$$(\varrho_1) = \mathfrak{r}_1^h, \ (\varrho_2) = \mathfrak{r}_2^h, \ \ldots$$

ausfällt, so wird

$$\mu^h = \eta\varrho_1\varrho_2\ldots,$$

wobei η eine Einheit in k sein muss. Bei Anwendung der dritten Formel des Satzes 14 erhalten wir

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\pi, \mu^h}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\pi, \eta}{\mathfrak{w}}\right)\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\pi, \varrho_1}{\mathfrak{w}}\right)\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\pi, \varrho_2}{\mathfrak{w}}\right)\ldots. \tag{8}$$

Andererseits ist mit Rücksicht auf Satz 13

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\pi, \eta}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right) = +1. \tag{9}$$

Ferner gelten die Gleichungen

$$(10)\qquad \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi, \varrho_i}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\varrho_i}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\pi}{\tau_i}\right) = +1, \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

wie wir für ein primäres τ_i aus Satz 35 und für ein nichtprimäres τ_i aus Formel (6) schliessen. Nunmehr führt die Gleichung (8) in Verbindung mit (9) und (10) zu der Gleichung

$$(11)\qquad \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

und diese lehrt die Richtigkeit des Satzes 36 für den an zweiter Stelle behandelten Fall.

Wir nehmen *drittens* an, es sei ν gleich einer Einheit ε in k, während μ beliebige primäre oder nichtprimäre Primideale enthalten möge. Wir betrachten den Relativkörper $K(\sqrt{\mu})$. Bedeuten, wie in unserem ersten Falle, $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_t$ diejenigen unter den Primfactoren von μ, die in μ zu einer ungeraden Potenz aufgehen, und sind $\delta_1, \ldots, \delta_t$ solche ganze Zahlen in k, dass

$$(\delta_1) = \mathfrak{b}_1^h, \ \ldots, \ (\delta_t) = \mathfrak{b}_t^h$$

wird, so finden wir eine Gleichung von der Gestalt

$$(12)\qquad \mu^h = \eta \delta_1 \ldots \delta_t \alpha^2,$$

wo η eine Einheit in k und α eine ganze Zahl in k bezeichnet. Nach Satz 4 sind $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_t$ die in die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgehenden Primideale. Wir bezeichnen mit r die Anzahl der Charaktere, die das Geschlecht einer Classe in $K(\sqrt{\mu})$ bestimmen, und es seien unter den Primidealen $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_t$ die Primideale $\mathfrak{b}_t, \mathfrak{b}_{t-1}, \ldots, \mathfrak{b}_{r+1}$ nach der in Definition 11 gemachten Vorschrift ausgewählt. Dann beweisen wir folgende Thatsache: wenn $c_1, \ldots, c_r$ irgend r Einheiten ± 1 sind, deren Product $c_1 \ldots c_r = +1$ ausfällt, so giebt es im Körper $K(\sqrt{\mu})$ stets Ideale, deren Charaktere mit $c_1, \ldots, c_r$ übereinstimmen. In der That nach Satz 18 giebt es in k sicher ein Primideal $\mathfrak{p}$, welches den Gleichungen

$$(13)\qquad \left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \ \ldots, \ \left(\frac{\varepsilon_m}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

$$(14)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\delta_1}{\mathfrak{p}}\right) = c_1, \ \ldots, \ \left(\frac{\delta_r}{\mathfrak{p}}\right) = c_r, \\ \left(\frac{\delta_{r+1}}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \ \ldots, \ \left(\frac{\delta_t}{\mathfrak{p}}\right) = +1 \end{cases}$$

genügt. Wegen (13) ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal; es sei π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$. Vermöge des Satzes 35 bez. der Relation (7) folgen aus (14) die Gleichungen

$$(15)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\pi}{b_1}\right) = c_1, \ \ldots, \left(\frac{\pi}{b_r}\right) = c_r, \\ \left(\frac{\pi}{b_{r+1}}\right) = 1, \ \ldots, \left(\frac{\pi}{b_t}\right) = +1. \end{cases}$$

Da $c_1 \ldots c_r = +1$ sein soll, so erhalten wir aus (14)

$$\left(\frac{\delta_1 \ldots \delta_t}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

und folglich ist wegen (12)

$$\left(\frac{\mu^h}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

d. h. $\mathfrak{p}$ zerfällt in $K(\sqrt{\mu})$ in zwei Primfactoren. Die Charaktere eines jeden dieser Primfactoren stimmen wegen (15) mit $c_1, \ldots, c_r$ überein.

Da die Anzahl der Systeme von je r Einheiten $c_1, \ldots, c_r$ mit der Bedingung $c_1 \ldots c_r = +1$ gleich 2^{r-1} ist und andererseits nach Satz 26 im Körper $K(\sqrt{\mu})$ nicht mehr als 2^{r-1} Geschlechter existiren können, so schliessen wir, wie in unserem ersten Falle, dass das Charakterensystem $c_1, \ldots, c_r$ eines jeden in $K(\sqrt{\mu})$ vorhandenen Geschlechtes nothwendig die Bedingung $c_1 \ldots c_r = +1$ erfüllen muss.

Um aus dieser Thatsache im gegenwärtigen dritten Falle den Satz 36 zu beweisen, sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, welches den Bedingungen

$$(16)\qquad \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

$$(17)\qquad \left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \ \left(\frac{\varepsilon_2}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\varepsilon_m^{\frac{1}{2}}}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

$$(18)\qquad \left(\frac{\delta_{r+1}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{b_{r+1}}\right), \ \left(\frac{\delta_{r+2}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{b_{r+2}}\right), \cdots, \left(\frac{\delta_t}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{b_t}\right)$$

genügt. Wegen der Gleichung (16) zerfällt $\mathfrak{p}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei Primfactoren und wegen der Gleichungen (17) ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal; es sei π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$. Wegen (18) erhalten wir unter Benutzung des Satzes 35 bez. der Relation (7) die Gleichungen

$$(19)\qquad \left(\frac{\varepsilon\pi, \mu}{b_i}\right) = \left(\frac{\varepsilon\pi}{b_i}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{b_i}\right)\left(\frac{\pi}{b_i}\right) = +1$$
$$(i = r+1, r+2, \ldots, t)$$

und daher haben die r Charaktere eines Primfactors von $\mathfrak{p}$ folgende Werthe

$$\left(\frac{\varepsilon\pi, \mu}{b_1}\right), \ \left(\frac{\varepsilon\pi, \mu}{b_2}\right), \cdots, \left(\frac{\varepsilon\pi, \mu}{b_r}\right).$$

Nun muss nach dem vorhin Bewiesenen das Product dieser Charaktere gleich $+1$ sein; dies liefert mit Rücksicht auf (16) und (19) die Beziehung

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\varepsilon\pi,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=+1,$$

und da wegen der an zweiter Stelle bewiesenen Thatsache

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=+1$$

sein muss, so folgt auch die Gleichung

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\varepsilon,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=+1, \tag{20}$$

womit der Satz 36 unter den an dritter Stelle gemachten Annahmen als richtig erkannt ist. Das Product $\prod_{(\mathfrak{w})}{}'$ ist hier wie auch im Folgenden stets über alle zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k zu erstrecken.

Wir machen *viertens* die Annahme, dass ν die h^{te} Potenz eines nichtprimären Primideals $\mathfrak{q}$ sei, und setzen $(\varkappa)=\mathfrak{q}^h$, wo $\varkappa$ eine ganze Zahl in k bedeutet; die Zahl μ enthalte jedoch beliebig viele primäre oder nichtprimäre Primideale als Factoren. Wir betrachten den Körper $K(\sqrt{\mu})$, wenden für ihn die Bezeichnungen wie im vorigen Falle an und entnehmen aus der Behandlung dieses dritten Falles die Thatsache, dass das Product der r Charaktere eines Geschlechtes in $K(\sqrt{\mu})$ gleich $+1$ sein muss. Es sei zunächst $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right)=+1$; dann zerfällt $\mathfrak{q}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei Primfactoren. Die r Charaktere eines jeden dieser Primfactoren von $\mathfrak{q}$ sind, wenn ξ eine geeignete Einheit in k bedeutet, und im Uebrigen die Bezeichnungsweise, die im dritten Falle benutzt wurde, beibehalten wird:

$$\left(\frac{\xi\varkappa,\mu}{\mathfrak{b}_1}\right),\ \left(\frac{\xi\varkappa,\mu}{\mathfrak{b}_2}\right),\ \cdots,\ \left(\frac{\xi\varkappa,\mu}{\mathfrak{b}_r}\right), \tag{21}$$

während überdies die Gleichungen

$$\left(\frac{\xi\varkappa,\mu}{\mathfrak{b}_{r+1}}\right)=+1,\ \left(\frac{\xi\varkappa,\mu}{\mathfrak{b}_{r+2}}\right)=+1,\ \cdots,\ \left(\frac{\xi\varkappa,\mu}{\mathfrak{b}_t}\right)=+1 \tag{22}$$

gelten. Durch Multiplication dieser Gleichungen (21), (22) folgt leicht

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\xi\varkappa,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right)=+1$$

und vermöge der im dritten Falle bewiesenen Relation (20) schliessen wir hieraus

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\varkappa,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=+1. \tag{23}$$

Fällt andererseits $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right) = -1$ aus, so bestimmen wir ein primäres Primideal $\mathfrak{p}$ von der Art, dass $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}}\right) = -1$ ausfällt. Bezeichnet π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$, so erhalten wir wegen (7) $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = -1$ und folglich wird $\left(\frac{\pi\mu}{\mathfrak{q}}\right) = +1$. Nach der eben bewiesenen Formel (23) folgt mithin, wenn wir jetzt $\pi\mu$ an Stelle von μ nehmen,

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\varkappa, \pi\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

und hieraus wiederum mit Hinzuziehung von (11)

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\varkappa, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1; \tag{24}$$

damit ist der Satz 36 auch unter der vierten Annahme bewiesen.

Wir beweisen endlich den Satz 36 allgemein. Zu dem Zwecke setzen wir

$$\nu^h = \varepsilon \varrho_1 \varrho_2 \cdots,$$

wo ε eine Einheit in k und $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ sei es Primärzahlen von primären Primidealen sei es solche ganze Zahlen in k bedeuten, die h^{te} Potenzen von nichtprimären Primidealen darstellen. Dann entnehmen wir aus (20), (11), (24) die zu beweisende Gleichung

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu^h, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1.$$

Der Satz 36 enthält bereits wesentliche Bestandtheile des quadratischen Reciprocitätsgesetzes zwischen den zu 2 primen Zahlen im Körper k. Wir fassen einige wichtige Folgerungen des Satzes 36 in nachstehendem Satze zusammen:

Satz 37. Bedeuten ν, μ, ν^*, μ^* irgend welche ganze Zahlen in k, die zu 2 prim sind und nach dem Modul 2^2 den Congruenzen

$$\nu \equiv \nu^*, \quad \mu \equiv \mu^*, \quad (2^2)$$

genügen, und fällt überdies ν zu μ und ν^* zu μ^* prim aus, so gilt stets die Formel

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \left(\frac{\nu^*}{\mu^*}\right)\left(\frac{\mu^*}{\nu^*}\right).$$

Bedeuten ν, μ irgend welche zu einander und zu 2 prime ganze Zahlen in k, von denen wenigstens eine dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach 2^2 congruent ausfällt, so gilt stets die Formel

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

Beweis. Unter den zuerst gemachten Annahmen haben wir nach Satz 36

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu\nu^*,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu^*,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=+1,$$
$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu^*,\mu\mu^*}{\mathfrak{w}}\right)=\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu^*,\mu}{\mathfrak{w}}\right)\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu^*,\mu^*}{\mathfrak{w}}\right)=+1$$

und mithin

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu^*,\mu^*}{\mathfrak{w}}\right);$$

hieraus entnehmen wir leicht die erste Aussage des Satzes 37. Die zweite Aussage folgt unmittelbar durch Anwendung des Satzes 36.

Die Formeln das Satzes 37 können auf die mannigfaltigste Weise durch numerische Beispiele bestätigt werden.

§ 26.

Das primäre Ideal und seine Eigenschaften.

Wir erweitern die Definition 13 in folgender Weise:

Definition **16.** Ein solches zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ des Körpers k, in Bezug auf das für jede Einheit ξ in k

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right)=+1$$

ausfällt, heisse ein *primäres Ideal;* dagegen mögen diejenigen Ideale *nichtprimär* genannt werden, in Bezug auf die jene Gleichung nicht für jede Einheit ξ erfüllt ist.

Auf Grund des Satzes 36 gelingt es nun, den Satz 32 in folgender Weise zu verallgemeinern:

Satz **38.** Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges primäres Ideal in k: dann ist es stets möglich, in k eine ganze Zahl α zu finden, so dass das Ideal (α) gleich $\mathfrak{a}^h$ wird, und überdies die Zahl α nach dem Modul 2^2 dem Quadrat einer ganzen Zahl des Körpers k congruent ausfällt.

Beweis. Es sei α^* irgend eine ganze Zahl in k, so dass $(\alpha^*)=\mathfrak{a}^h$ wird. Bezeichnen ferner $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}$, $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{\frac{m}{2}}$ die $\frac{m}{2}$ Ideale bez. ganze Zahlen, wie in Satz 29, so ist nach dem dort Bewiesenen jede ganze zu 2 prime Zahl nach dem Modul 2^2 in einer gewissen Gestalt (vgl. S. 50) darstellbar; wir dürfen danach insbesondere

$$\alpha^*\equiv\varepsilon^*\varkappa_1^{\nu_1}\ldots\varkappa_{\frac{m}{2}}^{\nu_{\frac{m}{2}}}\beta^2,\quad(2^2) \tag{1}$$

setzen, wo ε^* eine geeignete Einheit in k, ferner $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ gewisse Exponenten 0, 1 und β eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet. Da wegen (1) die Zahl

$$\alpha^* \varepsilon^* \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}}$$

congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 ausfällt, so ist nach dem Satze 36 für jede Einheit ξ in k

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\xi, \alpha^* \varepsilon^* \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}}}{\mathfrak{w}} \right) = +1$$

und folglich

$$\left(\frac{\xi}{\alpha^* \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}}} \right) = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \left(\frac{\xi}{\mathfrak{q}_1}\right)^{v_1} \ldots \left(\frac{\xi}{\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}}\right)^{v_{\frac{m}{2}}} = +1;$$

da nach Voraussetzung $\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) = +1$ sein soll, so entnehmen wir hieraus, dass für jede Einheit ξ in k die Gleichung

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{q}_1}\right)^{v_1} \ldots \left(\frac{\xi}{\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}}\right)^{v_{\frac{m}{2}}} = +1$$

bestehen muss. Indem wir hierin der Reihe nach für ξ die in § 21 aufgestellten Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}$ einsetzen, schliessen wir aus den Formeln S. 50, dass die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ sämmtlich gleich 0 sind, und daher ist wegen (1) $\alpha = \alpha^* \varepsilon^*$ eine ganze Zahl in k von der im Satze 38 verlangten Beschaffenheit.

Die Umkehruug des Satzes 38 stellt eine Verallgemeinerung des Satzes 33 dar und lautet, wie folgt:

Satz 39. Wenn $\mathfrak{a}$ ein zu 2 primes Ideal in k und α eine ganze Zahl in k von der Beschaffenheit ist, dass das Ideal (α) gleich $\mathfrak{a}^h$ wird und überdies die Zahl α nach dem Modul 2^2 dem Quadrat einer ganzen Zahl des Körpers k congruent ausfällt, so ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k.

Den Beweis dieses Satzes gewinnen wir aus Satz 36, wenn wir in der Gleichung dieses Satzes 36 für ν eine beliebige Einheit ξ in k und für μ die Zahl α nehmen.

§ 27.

Beispiele für die Sätze 32, 33, 38, 39.

Die Sätze 32, 33 entsprechen dem bekannten Satze aus der Theorie der rationalen Zahlen, demzufolge -1 quadratischer Rest oder Nichtrest nach einer rationalen positiven Primzahl ist, jenachdem diese von der Form $4n+1$ oder $4n+3$ ausfällt. Zur Erläuterung und Bestätigung der genannten Sätze 32, 33, wie der allgemeineren Sätze 38, 39 mögen folgende Beispiele dienen:

Beispiel 1. Der quadratische Körper $k(\sqrt{-7})$ hat die Classenanzahl $h=1$; er besitzt zwei Einheitenverbände, nämlich diejenigen, die durch die Einheiten $+1$ und -1 bestimmt sind. Die Zahlen

$$3,\quad \sqrt{-7},\quad 2+\sqrt{-7},\quad 4+\sqrt{-7},\quad 1+2\sqrt{-7},$$

sind Primzahlen mit den Normen bez.

$$3^2,\quad 7,\quad 11,\quad 23,\quad 29.$$

Nun gelten die Congruenzen:

$$-1\equiv(\sqrt{-7})^2,\ (3)\quad\text{und}\quad -1\equiv 12^2,\ (1+2\sqrt{-7});$$

also haben wir im Körper $k(\sqrt{-7})$

$$\left(\frac{-1}{3}\right)=+1\quad\text{und}\quad\left(\frac{-1}{1+2\sqrt{-7}}\right)=+1,$$

d. h. die Primideale (3) und $(1+2\sqrt{-7})$ sind primär. Dagegen finden wir mittelst Satz 1

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{-7}}\right)=(-1)^{\frac{7-1}{2}}=-1,\quad\left(\frac{-1}{2+\sqrt{-7}}\right)=(-1)^{\frac{11-1}{2}}=-1,$$

$$\left(\frac{-1}{4+\sqrt{-7}}\right)=(-1)^{\frac{23-1}{2}}=-1;$$

d. h. die Primideale $(\sqrt{-7})$, $(2+\sqrt{-7})$, $(4+\sqrt{-7})$ sind nichtprimär. In Uebereinstimmung mit dem Satze 32 haben wir in der That

$$-3\equiv 1^2,\ (2^2)\quad\text{und}\quad -1-2\sqrt{-7}\equiv 1^2,\ (2^2),$$

d. h. -3 und $-1-2\sqrt{-7}$ sind Primärzahlen der Primideale (3) bez. $(1+2\sqrt{-7})$. Dagegen ist von den sechs Zahlen

$$\pm\sqrt{-7},\ \pm(2+\sqrt{-7}),\ \pm(4+\sqrt{-7})$$

keine dem Quadrat einer ganzen Zahl in $k(\sqrt{-7})$ nach dem Modul 2^2 congruent, womit Satz 33 bestätigt wird.

Nach Definition 16 sind die Ideale

$$(\sqrt{-7})\,(2+\sqrt{-7})=(-7+2\sqrt{-7}),$$
$$(\sqrt{-7})\,(4+\sqrt{-7})=(-7+4\sqrt{-7})$$

primär; in der That gelten in Bestätigung des Satzes 38 nach dem Modul 2^2 die Congruenzen

$$-(-7+2\sqrt{-7}) \equiv 1^2, \quad (2^2),$$
$$-7+4\sqrt{-7} \equiv 1^2, \quad (2^2).$$

Beispiel 2. Der biquadratische Körper $k(\sqrt{-1}, \sqrt{5})$ hat die Classenanzahl $h=1$; wir setzen $i=\sqrt{-1}$ und $\vartheta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, so dass $i^2+1=0$ und $\vartheta^2-\vartheta-1=0$ wird. Der Körper $k(i, \vartheta)$ besitzt 4 Einheitenverbände, nämlich diejenigen, die durch die Einheiten $1, i, \vartheta, i\vartheta$ bestimmt sind.

Die Zahlen

(1) $\quad i+\vartheta, \quad 3+2i, \quad 2i+\vartheta, \quad 1-2\vartheta+i\vartheta, \quad 1+2i+2\vartheta, \quad 3i+\vartheta$

sind Primzahlen mit den Normen bez.

$$5, \quad 13^2, \quad 29, \quad 41, \quad 89, \quad 109.$$

Wir finden nun leicht mittelst Satz 1 im Körper $k(i, \vartheta)$ die Gleichungen

$$\left(\frac{i}{i+\vartheta}\right)=i^{\frac{5-1}{2}}=-1, \qquad \left(\frac{\vartheta}{i+\vartheta}\right)=\left(\frac{-i}{i+\vartheta}\right)=-1,$$
$$\left(\frac{i}{3+2i}\right)=+1, \qquad \left(\frac{\vartheta}{3+2i}\right)=+1,$$
$$\left(\frac{i}{2i+\vartheta}\right)=-1, \qquad \left(\frac{\vartheta}{2i+\vartheta}\right)=+1,$$
$$\left(\frac{i}{1-2\vartheta+i\vartheta}\right)=+1, \qquad \left(\frac{\vartheta}{1-2\vartheta+i\vartheta}\right)=-1,$$
$$\left(\frac{i}{1+2i+2\vartheta}\right)=+1, \qquad \left(\frac{\vartheta}{1+2i+2\vartheta}\right)=+1,$$
$$\left(\frac{i}{3i+\vartheta}\right)=-1, \qquad \left(\frac{\vartheta}{3i+\vartheta}\right)=-1.$$

Dem Satze 33 zufolge darf daher keine der vier Primzahlen $i+\vartheta$, $2i+\vartheta$, $1-2\vartheta+i\vartheta$, $3i+\vartheta$ nach dem Modul 2^2 einem Ausdrucke von der Gestalt $i^u\vartheta^v\alpha^2$ congruent sein, wo u, v gewisse Werthe 0, 1 haben dürfen und α irgend eine ganze Zahl in $k(i, \vartheta)$ bedeutet; dagegen muss nach Satz 32 jede der beiden übrigen Zahlen aus der Reihe (1) einer solchen Congruenz genügen. In der That ist

$$3+2i\equiv\vartheta(1-i-\vartheta)^2, (2^2) \text{ und } 1+2i+2\vartheta\equiv(1+\vartheta+i\vartheta)^2, (2^2).$$

Aus der obigen Tabelle erkennen wir ferner, dass die Ideale

$$(i+\vartheta)(3i+\vartheta) = (-2+\vartheta+4i\vartheta),$$
$$(i+\vartheta)(2i+\vartheta)(1-2\vartheta+i\vartheta) = (-6-5i-2\vartheta-3i\vartheta)$$

primär sind; in der That gelten in Bestätigung der Sätze 38 und 39 die Congruenzen:

$$-2+\vartheta+4i\vartheta \equiv -(1-\vartheta)^2, \quad (2^2),$$
$$-6-5i-2\vartheta-3i\vartheta \equiv -i(1+i-\vartheta)^2, \quad (2^2).$$

Beispiel 3. Der biquadratische Körper $k\left(\sqrt{1+4\sqrt{-1}}\right)$ hat die Classenanzahl $h=1$; wir setzen $i=\sqrt{-1}$ und $\vartheta=\frac{1+\sqrt{1+4i}}{2}$, so dass $\vartheta^2-\vartheta-i=0$ wird. Der Körper $k(\sqrt{\vartheta})$ besitzt 4 Einheitenverbände, nämlich diejenigen, die durch die Einheiten 1, i, ϑ, $i\vartheta$ bestimmt sind.

Durch Zerlegung der Zahl 5 erhalten wir in $k(\sqrt{\vartheta})$ die drei Primzahlen

$$2+i,\quad 1+\vartheta,\quad 2-\vartheta; \tag{2}$$

das Product der beiden letzteren ist gleich $2-i$ und das Product aller drei Primzahlen ist gleich 5. Wir finden leicht in diesem Körper $k(\vartheta)$:

$$\left(\frac{i}{2+i}\right)=i^{\frac{5^2-1}{2}}=+1,\quad \left(\frac{i}{1+\vartheta}\right)=i^{\frac{5-1}{2}}=-1,\quad \left(\frac{i}{2-\vartheta}\right)=-1, \tag{3}$$

und

$$\left(\frac{\vartheta}{2+i}\right)=-1,\qquad \left(\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\right)=+1,\qquad \left(\frac{\vartheta}{2-\vartheta}\right)=-1, \tag{4}$$

und in der That ist keine der drei Primzahlen (2) nach dem Modul 2^2 einem Ausdruck von der Gestalt $i^u\vartheta^v\alpha^2$ congruent, wo u, v gewisse Werthe 0, 1 haben und α irgend eine ganze Zahl in $k(\vartheta)$ bedeutet. Dagegen ist $5\equiv 1^2$ nach 2^2 und wegen (3), (4) haben wir

$$\left(\frac{i}{5}\right)=\left(\frac{i}{2+i}\right)\left(\frac{i}{1+\vartheta}\right)\left(\frac{i}{2-\vartheta}\right)=+1,$$

$$\left(\frac{\vartheta}{5}\right)=\left(\frac{\vartheta}{2+i}\right)\left(\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\right)\left(\frac{\vartheta}{2-\vartheta}\right)=+1,$$

d. h. das Ideal (5) ist in Uebereinstimmung mit Satz 39 primär.

Die Zahl 37 ist in $k(\vartheta)$ gleich dem Product der drei Primzahlen

$$6+i,\qquad -3+\vartheta,\qquad 2+\vartheta.$$

Wir finden leicht

$$\left(\frac{i}{6+i}\right)=+1,\quad \left(\frac{i}{3-\vartheta}\right)=-1,\quad \left(\frac{i}{2+\vartheta}\right)=-1 \tag{5}$$

und

$$\left(\frac{\vartheta}{6+i}\right)=-1,\quad \left(\frac{\vartheta}{3-\vartheta}\right)=+1,\quad \left(\frac{\vartheta}{2+\vartheta}\right)=-1. \tag{6}$$

Die Primfactoren von 37 sind ebenso wie diejenigen von 5 sämmtlich nichtprimär; dagegen ist das Ideal (37) primär. Ferner sind wegen (3), (4), (5), (6) die Ideale

$$\left((2+i)(6+i)\right),\quad \left((1+\vartheta)(3-\vartheta)\right),\quad \left((2-\vartheta)(2+\vartheta)\right)$$

primär; in der That gelten in Uebereinstimmung mit Satz 38 die Congruenzen

$$(2+i)(6+i) \equiv (2+i)^2, \quad (2^2),$$
$$-(1+\vartheta)(3-\vartheta) \equiv (1-\vartheta)^2, \quad (2^2),$$
$$-(2-\vartheta)(2+\vartheta) \equiv \quad \vartheta^2 \quad , \quad (2^2).$$

Die Zahlen 3 und 7 sind in $k(\vartheta)$ unzerlegbar, und da $-3 \equiv 1^2$ und $-7 \equiv 1^2$ nach dem Modul 2^2 ausfällt, so müssen nach Satz 33 (3) und (7) primäre Primideale mit den Primärzahlen -3 und -7 sein. In der That sind die Einheiten i, ϑ beide in $k(\vartheta)$ quadratische Reste nach den Moduln (3) und (7); denn wir haben

$$\left(\frac{i}{3}\right) = i^{\frac{3^4-1}{2}} = +1 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{i}{7}\right) = i^{\frac{7^4-1}{2}} = +1$$

sowie ferner

$$\vartheta \equiv (1-\vartheta+i\vartheta)^2, \ (3) \quad \text{und} \quad \vartheta \equiv (1+3i-3\vartheta-i\vartheta)^2, \ (7).$$

Beispiel 4. Der biquadratische Körper $k(\sqrt[4]{-2})$ hat die Classenanzahl $h = 1$; wir setzen $\vartheta = \sqrt[4]{-2}$, so dass $\vartheta^4 + 2 = 0$ wird. Der Körper $k(\vartheta)$ besitzt 4 Einheitenverbände, nämlich diejenigen, die durch die Einheiten $1, -1, \varepsilon, -\varepsilon$ bestimmt sind, wobei zur Abkürzung

$$\varepsilon = 1 - \vartheta^2 + \vartheta^3$$

gesetzt ist.

Die Zahlen

$$(7) \quad \begin{cases} 1-\vartheta, & 1+\vartheta, & 1+\vartheta-2\vartheta^2+2\vartheta^3, \\ & 1+\vartheta+2\vartheta^2+\vartheta^3, & 1+2\vartheta-\vartheta^2 \end{cases}$$

sind Primzahlen ersten Grades in $k(\vartheta)$ mit den Normen bez.

$$\begin{array}{lll} 3, & 3, & 19, \\ & 59, & 73; \end{array}$$

wir schliessen hieraus mittelst Satz 1

$$(8) \quad \begin{cases} \left(\frac{-1}{1-\vartheta}\right) = -1, & \left(\frac{-1}{1+\vartheta}\right) = -1, & \left(\frac{-1}{1+\vartheta-2\vartheta^2+2\vartheta^3}\right) = -1, \\ & \left(\frac{-1}{1+\vartheta+2\vartheta^2+\vartheta^3}\right) = -1, & \left(\frac{-1}{1+2\vartheta-\vartheta^2}\right) = +1. \end{cases}$$

Die Zahl ϑ genügt nach den Primzahlen in (7) bez. den Congruenzen

$$\begin{array}{lll} \vartheta \equiv 1, & \vartheta \equiv -1, & \vartheta \equiv -5, \\ & \vartheta \equiv \ \ 6, & \vartheta \equiv -31 \end{array}$$

und daher gelten für ε bez. nach jenen Primzahlen die Congruenzen

$$\begin{array}{lll} \varepsilon \equiv 1, & \varepsilon \equiv -1, & \varepsilon \equiv \ \ 3, \\ & \varepsilon \equiv \ \ 4, & \varepsilon \equiv -18. \end{array}$$

Da nun im Bereiche der rationalen Zahlen 1 quadratischer Rest nach 3,

— 1 Nichtrest nach 3, 3 Nichtrest nach 19, 4 Rest nach 59 und — 18 Rest nach 73 ist, so haben wir im Körper $k(\vartheta)$ die Gleichungen

$$(9)\begin{cases}\left(\frac{\varepsilon}{1-\vartheta}\right)=+1, & \left(\frac{\varepsilon}{1+\vartheta}\right)=-1, & \left(\frac{\varepsilon}{1+\vartheta-2\vartheta^2+2\vartheta^3}\right)=-1,\\ \left(\frac{\varepsilon}{1+\vartheta+2\vartheta^2+\vartheta^3}\right)=+1, & \left(\frac{\varepsilon}{1+2\vartheta-\vartheta^3}\right)=+1.\end{cases}$$

Wegen (8), (9) ist von den fünf Primzahlen in (7) nur die letzte primär und in der That gilt in Bestätigung des Satzes 32 nach dem Modul 2^2 die Congruenz

$$-(1+2\vartheta-\vartheta^2)\equiv(1+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3)^2,\quad (2^2),$$

so dass $-1-2\vartheta+\vartheta^2$ eine Primärzahl des Primideals $(1+2\vartheta-\vartheta^2)$ wird.

Die Zahlen

$$1-2\vartheta+2\vartheta^2,\qquad 1-4\vartheta^2+2\vartheta^3$$

sind Primzahlen zweiten Grades in $k(\vartheta)$ mit den Normen bez.

$$7^2,\qquad 31^2.$$

Zunächst ergiebt sich

$$\left(\frac{-1}{1-2\vartheta+2\vartheta^2}\right)=(-1)^{\frac{7^2-1}{2}}=+1.$$

Ferner finden wir mit Benutzung der Congruenz

$$\vartheta^2\equiv\vartheta+3,\qquad (1-2\vartheta+2\vartheta^2)$$

leicht, dass ε quadratischer Nichtrest nach $1-2\vartheta+2\vartheta^2$ ist, d. h. wir haben

$$\left(\frac{\varepsilon}{1-2\vartheta+2\vartheta^2}\right)=-1,$$

und die Primzahl $1-2\vartheta+2\vartheta^2$ ist mithin nichtprimär. Dagegen gilt die Congruenz

$$-1+4\vartheta^2-2\vartheta^3\equiv(1+\vartheta^2+\vartheta^3)^2,\quad (2^2).$$

Nach Satz 33 muss mithin $(1-4\vartheta^2+2\vartheta^3)$ ein primäres Primideal sein. In der That haben wir

$$\left(\frac{-1}{1-4\vartheta^2+2\vartheta^3}\right)=(-1)^{\frac{31^2-1}{2}}=+1$$

und überdies gilt die Congruenz

$$\varepsilon\equiv(3-2\vartheta)^2,\qquad (1-4\vartheta^2+2\vartheta^3).$$

Endlich sind wegen (8), (9) die Ideale

$$\left((1+\vartheta)(1+\vartheta-2\vartheta^2+2\vartheta^3)\right),\quad \left((1-\vartheta)(1+\vartheta+2\vartheta^2+\vartheta^3)\right)$$

primär und in Bestätigung des Satzes 38 finden wir in der That

$$-(1+\vartheta)(1+\vartheta-2\vartheta^2+2\vartheta^3)\equiv(1+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3)^2,\quad (2^2),$$
$$-\varepsilon(1-\vartheta)(1+\vartheta+2\vartheta^2+\vartheta^3)\equiv\varepsilon^2,\quad (2^2).$$

Die Zahl 5 ist in $k(\vartheta)$ unzerlegbar und wegen $5 \equiv 1^2$ nach 2^2 ist mithin dem Satze 33 zufolge (5) ein primäres Primideal; in der That ist ε quadratischer Rest nach 5 wegen der Congruenz

$$\varepsilon \equiv (1+2\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3)^2, \quad (5).$$

Beispiel 5. Der durch die 5^{ten} Einheitswurzeln bestimmte Körper ist ein biquadratischer cyklischer Körper mit der Classenanzahl $h=1$; es sei ϑ eine von 1 verschiedene 5^{te} Einheitswurzel, so dass

$$\vartheta^4+\vartheta^3+\vartheta^2+\vartheta+1=0$$

wird. Der Körper $k(\vartheta)$ besitzt 4 Einheitenverbände, nämlich diejenigen, welche durch die Einheiten $+1$, -1, $1+\vartheta$, $-1-\vartheta$ bestimmt sind.

Die Zahlen

$$(10) \qquad \begin{cases} 1+2\vartheta^2, & 2-\vartheta^2, & 3+2\vartheta+\vartheta^2, \\ 3+\vartheta, & 3+4\vartheta^2, & 1+5\vartheta^2 \end{cases}$$

sind Primzahlen ersten Grades in $k(\vartheta)$ mit den Normen bez.

$$\begin{array}{lll} 11, & 31, & 41, \\ 61, & 181, & 521; \end{array}$$

wir schliessen hieraus mittelst Satz 1 leicht

$$(11) \qquad \begin{cases} \left(\frac{-1}{1+2\vartheta^2}\right)=-1, & \left(\frac{-1}{2-\vartheta^2}\right)=-1, & \left(\frac{-1}{3+2\vartheta+\vartheta^2}\right)=+1, \\ \left(\frac{-1}{3+\vartheta}\right)=+1, & \left(\frac{-1}{3+4\vartheta^2}\right)=+1, & \left(\frac{-1}{1+5\vartheta^2}\right)=+1. \end{cases}$$

Die Einheit $1+\vartheta$ genügt nach den Primzahlen (10) bez. den Congruenzen

$$\begin{array}{lll} 1+\vartheta \equiv 5, & \equiv 9, & \equiv 11, \\ \equiv -2, & \equiv 43, & \equiv 26. \end{array}$$

Da nun im Bereich der rationalen Zahlen 5 quadratischer Rest nach 11, 9 quadratischer Rest nach 31, 11 Nichtrest nach 41, -2 Nichtrest nach 61, 43 Rest nach 181, und 26 Rest nach 521 ist, so haben wir im Körper $k(\vartheta)$ die Gleichungen

$$(12) \qquad \begin{cases} \left(\frac{1+\vartheta}{1+2\vartheta^2}\right)=+1, & \left(\frac{1+\vartheta}{2-\vartheta^2}\right)=+1, & \left(\frac{1+\vartheta}{3+2\vartheta+\vartheta^2}\right)=-1, \\ \left(\frac{1+\vartheta}{3+\vartheta}\right)=-1, & \left(\frac{1+\vartheta}{3+4\vartheta^2}\right)=+1, & \left(\frac{1+\vartheta}{1+5\vartheta^2}\right)=+1. \end{cases}$$

Wegen (11), (12) sind von den sechs Primzahlen in (10) nur die zwei letzten primär, und in der That gelten in Bestätigung der Sätze 32 und 33 nach dem Modul 2^2 die Congruenzen

$$\begin{aligned} 3+4\vartheta^2 &\equiv -1, && (2^2), \\ 1+5\vartheta^2 &\equiv -\frac{\vartheta^4}{1+\vartheta}, && (2^2), \end{aligned}$$

so dass

$$-3-4\vartheta^2 \text{ und } -(1+\vartheta)(1+5\vartheta^2) = -1-\vartheta-5\vartheta^2-5\vartheta^3$$

Primärzahlen der betreffenden beiden Primideale werden.

Aus den Gleichungen (11), (12) entnehmen wir leicht die Gleichungen

$$\left(\frac{-1}{(1+2\vartheta^2)(2-\vartheta^2)}\right) = +1, \quad \left(\frac{-1}{(3+2\vartheta+\vartheta^2)(3+\vartheta)}\right) = +1,$$
$$\left(\frac{1+\vartheta}{(1+2\vartheta^2)(2-\vartheta^2)}\right) = +1, \quad \left(\frac{1+\vartheta}{(3+2\vartheta+\vartheta^2)(3+\vartheta)}\right) = +1.$$

Die Zahlen $(1+2\vartheta^2)(2-\vartheta^2)$ und $(3+2\vartheta+\vartheta^2)(3+\vartheta)$ müssen daher dem Satze 38 zufolge dem Producte einer Einheit in das Quadrat einer ganzen Zahl des Körpers $k(\vartheta)$ nach dem Modul 2^2 congruent ausfallen; in der That gelten die Congruenzen:

$$(1+2\vartheta^2)(2-\vartheta^2) \equiv 2\vartheta+\vartheta^2+2\vartheta^3 \equiv (1+\vartheta)(1+\vartheta^4)^2, \quad (2^2),$$
$$(3+2\vartheta+\vartheta^2)(3+\vartheta) \equiv -\vartheta^4 \quad , \quad (2^2).$$

Beispiel 6. Der durch eine Wurzel ϑ der Gleichung

$$\vartheta^4+\vartheta+1=0$$

bestimmte Körper ist ein biquadratischer Körper ohne quadratischen Unterkörper; er hat die Classenanzahl $h=1$ und besitzt 4 Einheitenverbände, nämlich diejenigen, die durch die Einheiten $+1, -1, \vartheta, -\vartheta$ bestimmt sind.

Für die Zahlen 3, 5 gelten in $k(\vartheta)$ die Zerlegungen

$$3 = (1-\vartheta)(2+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3),$$
$$5 = (1+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3)(2-4\vartheta+2\vartheta^2-\vartheta^3),$$

worin beidemal der erste Factor auf der rechten Seite eine Primzahl ersten Grades und der zweite Factor eine Primzahl dritten Grades ist. Mit Hülfe des Satzes 1 erhalten wir darnach leicht

$$(13)\quad \begin{cases} \left(\frac{-1}{1-\vartheta}\right) = -1, & \left(\frac{-1}{2+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3}\right) = (-1)^{\frac{3^3-1}{2}} = -1, \\ \left(\frac{-1}{1+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3}\right) = +1, & \left(\frac{-1}{2-4\vartheta+2\vartheta^2-\vartheta^3}\right) = (-1)^{\frac{5^3-1}{2}} = +1. \end{cases}$$

Andererseits findet man aus den Congruenzen

$$\vartheta \equiv 1, \ (1-\vartheta) \text{ und } \vartheta \equiv -2, \ (1+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3)$$

die Gleichungen

$$(14)\qquad \left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right) = +1, \quad \left(\frac{\vartheta}{1+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3}\right) = -1.$$

Wegen $-3 \equiv 1^2$ und $5 \equiv 1^2$ nach 2^2 sind (3), (5) nach Satz 39 primäre Ideale und mithin folgt

$$\left(\frac{\vartheta}{3}\right) = \left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right)\left(\frac{\vartheta}{2+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3}\right) = +1,$$
$$\left(\frac{\vartheta}{5}\right) = \left(\frac{\vartheta}{1+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3}\right)\left(\frac{\vartheta}{2-4\vartheta+2\vartheta^2-\vartheta^3}\right) = +1;$$

hieraus entnehmen wir mit Rücksicht auf (14), dass nothwendig

$$(15)\quad \left(\frac{\vartheta}{2+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3}\right) = +1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\vartheta}{2-4\vartheta+2\vartheta^2-\vartheta^3}\right) = -1$$

sein muss. In der That wird die erstere Gleichung durch die Congruenz

$$\vartheta \equiv (\vartheta-\vartheta^2)^2, \qquad (2+\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3)$$

bestätigt. Um die letztere Gleichung zu bestätigen, berücksichtigen wir, dass wegen

$$\vartheta^3 \equiv 2(1-\vartheta)^2, \qquad (2-4\vartheta+2\vartheta^2-\vartheta^3)$$
$$\left(\frac{\vartheta}{2-4\vartheta+2\vartheta^2-\vartheta^3}\right) = \left(\frac{2}{2-4\vartheta+2\vartheta^2-\vartheta^3}\right)$$

und wegen

$$2^{\frac{5^3-1}{2}} \equiv -1, \quad (5)$$

nach Satz 1

$$\left(\frac{2}{2-4\vartheta+2\vartheta^2-\vartheta^3}\right) = -1$$

ausfällt.

Die Zahl 7 ist in $k(\vartheta)$ unzerlegbar und wegen $-7 \equiv 1^2$ nach 2^2 muss demnach ϑ nach 7 quadratischer Rest in $k(\vartheta)$ sein; in der That finden wir

$$\vartheta \equiv (\vartheta+\vartheta^2+3\vartheta^3)^2, \quad (7).$$

Die Zahlen $2-\vartheta$, $2-\vartheta^2$ sind Primzahlen ersten Grades in $k(\vartheta)$ mit den Normen 19 bez. 23. Wir erhalten leicht

$$\left(\frac{-1}{2-\vartheta}\right) = -1, \quad \left(\frac{\vartheta}{2-\vartheta}\right) = -1$$
$$\left(\frac{-1}{2-\vartheta^2}\right) = -1, \quad \left(\frac{\vartheta}{2-\vartheta^2}\right) = +1.$$

Hieraus und aus (13), (14), (15) entnehmen wir die Gleichungen

$$\left(\frac{-1}{(1-\vartheta)(2-\vartheta)(2-4\vartheta+2\vartheta^2-\vartheta^3)}\right) = +1, \quad \left(\frac{-1}{(1-\vartheta)(2-\vartheta^2)}\right) = +1.$$

Dem Satze 38 zufolge muss daher jedes der beiden betreffenden Primzahlproducte nach Multiplication mit einer geeigneten Einheit dem Quadrat einer ganzen Zahl in $k(\vartheta)$ nach dem Modul 2^2 congruent werden; in der That ist

$$-(1-\vartheta)(2-\vartheta)(2-4\vartheta+2\vartheta^2-\vartheta^3) \equiv (1-\vartheta)^2, \quad (2^2)$$
$$-\vartheta(1-\vartheta)(2-\vartheta^2) \equiv (\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3)^2, \quad (2^2).$$

Beispiel 7. Der durch die 7^{ten} Einheitswurzeln bestimmte Körper ist ein Abel'scher Körper 6^{ten} Grades mit der Classenanzahl $h = 1$; derselbe lässt sich aus einem quadratischen und einem cubischen Körper zusammensetzen. Verstehen wir unter ϑ eine von 1 verschiedene 7^{te} Einheitswurzel und setzen

$$\zeta = \vartheta + \vartheta^2 + \vartheta^4 \quad \text{und} \quad \eta = \vartheta + \vartheta^6,$$

so wird

$$\zeta^2 + \zeta + 2 = 0 \quad \text{und} \quad \eta^3 + \eta^2 - 2\eta - 1 = 0.$$

Der Körper $k(\vartheta)$ besitzt 8 Einheitenverbände, nämlich diejenigen, welche durch die Einheiten $+1$, -1, $+\eta$, $-\eta$, $2-\eta^2$, $-2+\eta^2$ $\eta(2-\eta^2)$, $-\eta(2-\eta^2)$ bestimmt sind.

Die Zahlen

$$(16) \qquad 1 - \vartheta + 2\vartheta^3, \qquad 1 + 3\vartheta + \vartheta^2 + \vartheta^3$$

sind Primzahlen ersten Grades in $k(\vartheta)$ mit den Normen bez.

$$113, \qquad 197.$$

Da überdies nach jenen Primzahlen bez. die Congruenzen

$$\begin{cases} \eta \equiv 9, \\ 2 - \eta^2 \equiv 34, \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta \equiv -39 \\ 2 - \eta^2 \equiv 57 \end{cases}$$

gelten, so finden wir leicht

$$\left(\frac{-1}{1-\vartheta+2\vartheta^3}\right) = +1, \quad \left(\frac{\eta}{1-\vartheta+2\vartheta^3}\right) = +1, \quad \left(\frac{2-\eta^2}{1-\vartheta+2\vartheta^3}\right) = -1,$$

$$\left(\frac{-1}{1+3\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3}\right) = +1, \quad \left(\frac{\eta}{1+3\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3}\right) = +1, \quad \left(\frac{2-\eta^2}{1+3\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3}\right) = -1.$$

Nach Definition 16 ist also das Product der beiden Primzahlen in (16) ein primäres Ideal des Körpers $k(\vartheta)$, und in der That gilt in Bestätigung der Sätze 38 und 39 nach dem Modul (2^2) die Congruenz

$$(1-\vartheta+2\vartheta^3)(1+3\vartheta+\vartheta^2+\vartheta^3) \equiv (2-\eta^2)\vartheta^2.$$

Die Zahl 37 gestattet die Zerlegung

$$37 = (1-4\zeta)(5+4\zeta),$$

wobei die beiden Factoren rechter Hand Primzahlen dritten Grades in $k(\vartheta)$ sind. Da dieselben nach dem Modul 2^2 congruent 1^2 ausfallen, so stellen sie nach Satz 33 primäre Primideale dar. In Uebereinstimmung damit finden wir

$$\left(\frac{-1}{1-4\zeta}\right) = +1,$$

$$\eta \equiv (14+17\eta+19\eta^2)^2, \quad (37),$$

$$-2+\eta^2 \equiv (19\eta+2\eta^2)^2, \quad (37).$$

Die Zahl 3 ist Primzahl in $k(\vartheta)$ und wegen $-3 \equiv 1^2$ nach 2^2 ist das Ideal (3) nach Satz 33 ein primäres Primideal. In der That haben wir

$$\left(\frac{-1}{3}\right) = (-1)^{\frac{3^2-1}{2}} = +1,$$

$$\eta \equiv (\eta-\eta^2)^2, \qquad (3),$$

$$-2+\eta^2 \equiv (1+\eta-\eta^2)^2, \qquad (3).$$

Die angeführten Beispiele lassen erkennen, welche reiche Mannigfaltigkeit an arithmetischen Wahrheiten insbesondere in den Sätzen 32, 33, 38, 39 enthalten ist — und doch bilden diese Sätze nur Bestandtheile des *ersten* Ergänzungssatzes zu dem später von mir zu entwickelnden allgemeinen Reciprocitätsgesetze für quadratische Reste. Der vollständige erste Ergänzungssatz wird erst im Satz 53 (§ 36) zum Ausdruck kommen. Endlich erinnern wir daran, dass wir des leichteren Verständnisses wegen in dem zweiten Abschnitte der vorliegenden Abhandlung durchweg über den Grundkörper k die auf Seite 27 angegebenen besonderen Annahmen gemacht haben; wir müssen es uns daher auch an dieser Stelle versagen, mitzutheilen, wie der erste Ergänzungssatz lautet und wie tief derselbe das Wesen des Begriffes der Idealclasse berührt, falls der zu Grunde gelegte Körper k eine *gerade* Classenanzahl aufweist.

§ 28.

Das Product $\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für ein beliebiges ν und bei gewissen Annahmen über μ.

Für die späteren Entwickelungen ist es erforderlich, den Satz 36 in folgender Weise zu erweitern:

Satz 40. Es seien $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_s$ die sämmtlichen von einander verschiedenen Primfactoren der Zahl 2 und es gehe $\mathfrak{l}_1$ genau zur l_1^{ten}, $\mathfrak{l}_2$ genau zur $l_2^{\text{ten}}, \ldots, \mathfrak{l}_s$ genau zur l_s^{ten} Potenz in 2 auf, so dass

$$2 = \mathfrak{l}_1^{l_1}\mathfrak{l}_2^{l_2}\ldots\mathfrak{l}_s^{l_s}$$

wird; wenn dann ν eine beliebige ganze Zahl und μ eine solche ganze Zahl in k bedeutet, die zu 2 prim ist und dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent ist, so fällt stets

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

aus, wo das Product über alle zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k erstreckt werden soll.

Beweis. Wir setzen

$$\nu = \mathfrak{n}\mathfrak{l}_1^{e_1}\ldots\mathfrak{l}_s^{e_s},$$

so dass $e_1, \ldots, e_s$ gewisse ganze rationale Exponenten und $\mathfrak{n}$ ein zu 2 primes Ideal bedeutet. Nach Satz 8 sind die Ideale $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$ sämmtlich im Körper $K(\sqrt{\mu})$ weiter zerlegbar; es seien $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_s$ bez. je ein Primfactor von $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$ in $K(\sqrt{\mu})$; endlich sei A eine durch das Ideal $\mathfrak{L}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{L}_s^{e_s}$ theilbare ganze Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ von der Art, dass der Quotient $\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{L}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{L}_s^{e_s}}$ zu 2 prim ausfällt. Die Relativnorm α der Zahl A erhält dann die Gestalt

$$\alpha = N(\mathsf{A}) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{l}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{l}_s^{e_s},$$

wo $\mathfrak{a}$ ein zu 2 primes Ideal des Körpers K bedeutet, und es lässt sich infolgedessen der Quotient $\frac{\nu}{\alpha}$ als ein Bruch $\frac{\varrho}{\sigma}$ darstellen, dessen Zähler ϱ und dessen Nenner σ ganze zu 2 prime Zahlen sind. Wegen der Definition 6 ist für jedes Primideal $\mathfrak{w}$

$$\left(\frac{N(\mathsf{A}), \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

und mithin auch

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\alpha, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

wo $\prod'$ über alle zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ in k erstreckt werden soll. Berücksichtigen wir ferner, dass nach Satz 36 die Gleichungen

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\sigma, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1, \quad \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\varrho, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

gelten, so erhalten wir mit Rücksicht auf die zweite Formel in Satz 14

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu\sigma, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\alpha\varrho, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\alpha, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

wie der zu beweisende Satz 40 behauptet.

§ 23.

Der Fundamentalsatz über die Anzahl der Geschlechter in einem relativquadratischen Körper.

In § 19 haben wir für den Fall, dass die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ zu 2 prim ist, den Satz 26 bewiesen und dadurch eine obere Grenze für die Anzahl der Geschlechter in $K(\sqrt{\mu})$ aufgestellt. Wir sind nunmehr im Stande, unter der nämlichen Einschränkung das folgende wichtige Theorem zu beweisen:

Satz 41. *Es sei r die Anzahl der Charaktere, welche ein Geschlecht des relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$ bestimmen; ist dann ein System*

von r beliebigen Einheiten ± 1 vorgelegt, so wird dieses System dann und nur dann das Charakterensystem eines Geschlechtes in $K(\sqrt{\mu})$, wenn das Product der sämmtlichen r Einheiten gleich $+1$ ist. Die Anzahl g der in $K(\sqrt{\mu})$ vorhandenen Geschlechter ist daher gleich 2^{r-1}.

Beweis. Es seien $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_t$ die t in der Relativdiscriminante von $K(\sqrt{\mu})$ aufgehenden Primideale des Körpers $K(\mu)$ und man setze

$$\mathfrak{b}_1^{h_1} = (\delta_1), \ldots, \mathfrak{b}_t^{h_t} = (\delta_t),$$

wo $\delta_1, \ldots, \delta_t$ gewisse ganze Zahlen in k bedeuten. Es ist offenbar

$$\delta_1 \ldots \delta_t = \varepsilon \alpha^2 \mu, \tag{1}$$

wo ε eine Einheit und α eine gewisse ganze Zahl in k bedeutet. Ferner wähle man nach der Vorschrift des § 17 von diesen t Primidealen gewisse $r = t - r^*$ aus; es seien dies etwa die Primideale $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r$. Endlich mögen $c_1, \ldots, c_r$ beliebige r Einheiten ± 1 bedeuten, die der Bedingung

$$c_1 \ldots c_r = +1 \tag{2}$$

genügen. Wegen Satz 18 giebt es in k gewiss ein primäres Primideal $\mathfrak{p}$, für welches

$$\left(\frac{\delta_1}{\mathfrak{p}}\right) = c_1, \cdots, \left(\frac{\delta_r}{\mathfrak{p}}\right) = c_r, \quad \left(\frac{\delta_{r+1}}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\delta_t}{\mathfrak{p}}\right) = +1 \tag{3}$$

ausfällt. Es sei π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$; dann ist nach Satz 37

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_i}\right) = \left(\frac{\delta_i}{\mathfrak{p}}\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, t).$$

Wegen (1), (2), (3) haben wir

$$\left(\frac{\delta_1 \ldots \delta_t}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon \alpha^2 \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

d. h. $\mathfrak{p}$ zerfällt in $K(\sqrt{\mu})$ in zwei Primfactoren. Ein jeder derselben hat wegen

$$\left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{b}_{r+1}}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_{r+1}}\right) = +1, \cdots, \quad \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{b}_t}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_t}\right) = +1$$

im Körper $K(\sqrt{\mu})$ die Charaktere

$$\left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{b}_1}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_1}\right) = c_1, \cdots, \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{b}_r}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_r}\right) = c_r.$$

Es lassen sich nun die Einheiten $c_1, \ldots, c_r$ offenbar auf 2^{r-1} Weisen so bestimmen, dass die Bedingung $c_1 \ldots c_r = +1$ erfüllt ist. Nach dem eben Bewiesenen gehört zu jedem solchen Systeme von r Ein-

heiten wirklich ein Geschlecht in $K(\sqrt{\mu})$, und da die Anzahl g der Geschlechter von $K(\sqrt{\mu})$ nach Satz 26 auch nicht grösser sein kann als 2^{r-1}, so ist der Satz 41 hiermit für den Fall bewiesen, dass die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ zu 2 prim ausfällt. Den allgemeinen Nachweis des Satzes 41 werden wir erst in § 41 führen.

§ 30.

Ein gewisses System von $\frac{m}{2}+\varepsilon$ zu 2 primen Primidealen des Körpers k.

Wir leiten jetzt einen Satz ab, der im folgenden Paragraphen gebraucht werden wird und der eine Erweiterung des Satzes 29 ist. Dieser Satz lautet:

Satz 42. Es mögen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\frac{m}{2}}$ die Bedeutung wie in Satz 29 haben; ferner werde

$$2 = \mathfrak{l}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s}$$

gesetzt, wo $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$ die von einander verschiedenen Primfactoren der Zahl 2 in k und $l_1, \ldots, l_s$ die Potenzexponenten bedeuten, zu denen bez. jene Primideale in der Zahl 2 aufgehen. Es werde

$$\mathfrak{l}_1^h = (\lambda_1), \ldots, \mathfrak{l}_s^h = (\lambda_s)$$

gesetzt, wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ gewisse ganze Zahlen in k sind; endlich seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ solche primäre Primideale, dass allemal

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{p}_i}\right) = -1, \quad \left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_i}\right) = +1, \quad (i \neq k)$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, s)$$

ausfällt, und es seien $\pi_1, \ldots, \pi_s$ bez. Primärzahlen der primären Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$: dann gilt für jede beliebige zu 2 prime ganze Zahl ω in k eine Congruenz von der Gestalt

$$\omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_s^{w_s} \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}),$$

wo die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}, w_1, \ldots, w_s$ gewisse Werthe 0, 1 haben und α eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis. Wir behandeln zunächst die Annahme, es gäbe $m+s$ Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}, w_1, \ldots, w_s$, die gewisse Werthe 0, 1

haben, aber nicht sämmtlich gleich 0 sind, derart, dass die vermöge dieser Exponenten gebildete Zahl

$$(1) \qquad \mu = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_s^{w_s}$$

dem Quadrat einer gewissen ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent werde. Die Zahl $\sqrt{\mu}$ bestimmt dann offenbar einen relativquadratischen Körper $K(\sqrt{\mu})$, und zufolge des Satzes 5 ist die Relativdiscriminante dieses Körpers $K(\sqrt{\mu})$ prim zu 2. Aus dem Beweise zu Satz 29 schliessen wir, dass die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ im Ausdruck (1) sämmtlich gleich 0 sind. Die Relativdiscriminante von $K(\sqrt{\mu})$ besitzt demnach mit Rücksicht auf Satz 4 keines der Primideale $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}$ als Factor, sondern enthält lediglich diejenigen unter den Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$, für welche in (1) bez. die Exponenten $w_1, \ldots, w_s$ gleich 1 ausfallen; es seien dies etwa die t Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$. In Folge unserer Annahme ist dann nothwendig $t > 0$.

Wir dürfen nunmehr Satz 41 anwenden, da derselbe in § 29 für den hier zutreffenden Fall bewiesen worden ist. Nach diesem Satze giebt es, da hier $r = t$ ausfällt, im Körper $K(\sqrt{\mu})$ genau 2^{t-1} Geschlechter und das Product der sämmtlichen Charaktere ist für jedes Geschlecht gleich $+1$. Da μ dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent sein soll, so zerfällt insbesondere das Primideal $\mathfrak{l}_1$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei Primfactoren. Die Charaktere eines jeden dieser Primfactoren sind offenbar

$$\left(\frac{\lambda_1, \mu}{\mathfrak{p}_1}\right), \ldots, \left(\frac{\lambda_1, \mu}{\mathfrak{p}_t}\right)$$

und da das Product derselben gleich $+1$ sein soll, so würden wir

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right) \cdots \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_t}\right) = +1$$

erhalten. Diese Folgerung widerspricht den Voraussetzungen, die wir im Satze 42 über die Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ getroffen haben, und demnach ist unsere zu Anfang dieses Beweises gemachte Annahme zu verwerfen, d. h. irgend ein Ausdruck von der Gestalt (1) kann nur dann congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ sein, wenn sämmtliche Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}, w_1, \ldots, w_s$ gleich 0 sind.

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$L_1 = n(\mathfrak{l}_1)^{l_1}\left(n(\mathfrak{l}_1) - 1\right)$$

und verstehen unter

$$\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(L_1)}$$

ein volles System von ganzen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^{l_1+1}$ einander incongruenten Zahlen in k, die überdies sämmtlich congruent 1 nach dem Modul $\mathfrak{l}_2^{l_2+1}\mathfrak{l}_3^{l_3+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{l_s+1}$ sein sollen. Da allgemein

$$\alpha_1^{(i)} \not\equiv -\alpha_1^{(i)}, \quad (\mathfrak{l}_1^{l_1+1}),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, L_1)$$

ist, so können wir annehmen, es sei etwa stets

$$-\alpha_1^{(i)} \equiv \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{2}+i\right)}, \quad (\mathfrak{l}_1^{l_1+1}),$$
$$\left(i = 1, 2, \cdots, \frac{L_1}{2}\right).$$

Die $\frac{L_1}{2}$ Zahlen $\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{2}\right)}$ haben dann offenbar die Eigenschaft, dass weder die Differenz noch die Summe von irgend zwei derselben durch $\mathfrak{l}_1^{l_1+1}$ theilbar wird. Ferner setzen wir zur Abkürzung

$$L_2 = n(\mathfrak{l}_2)^{l_2}\left(n(\mathfrak{l}_2) - 1\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$L_s = n(\mathfrak{l}_s)^{l_s}\left(n(\mathfrak{l}_s) - 1\right)$$

und bilden in der entsprechenden Weise wie oben zunächst das System von $\frac{L_2}{2}$ ganzen, zu $\mathfrak{l}_2$ primen Zahlen

$$\alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_2^{\left(\frac{L_2}{2}\right)},$$

die sämmtlich congruent 1 nach $\mathfrak{l}_1^{l_1+1}\mathfrak{l}_3^{l_3+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{l_s+1}$ sind und die Eigenschaft haben, dass weder die Differenz noch die Summe von irgend zwei derselben durch $\mathfrak{l}_2^{l_2+1}$ theilbar wird u. s. f..; endlich bilden wir ein System von $\frac{L_s}{2}$ ganzen, zu $\mathfrak{l}_s$ primen Zahlen

$$\alpha_s^{(1)}, \ldots, \alpha_s^{\left(\frac{L_s}{2}\right)},$$

die sämmtlich congruent 1 nach $\mathfrak{l}_1^{l_1+1}\mathfrak{l}_2^{l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_{s-1}^{l_{s-1}+1}$ sind und die Eigenschaft haben, dass weder die Differenz noch die Summe von irgend zwei derselben durch $\mathfrak{l}_s^{l_s+1}$ theilbar wird.

Der Ausdruck

$$(2)\qquad \varepsilon_1^{u_1}\ldots\varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}}\,\varkappa_1^{v_1}\ldots\varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}}\,\pi_1^{w_1}\ldots\pi_s^{w_s}(\alpha_1^{(i_1)})^2\ldots(\alpha_s^{(i_s)})^2,$$

$$\left(\begin{array}{c} u_1,\ldots,u_{\frac{m}{2}},\ v_1,\ldots,v_{\frac{m}{2}};\ w_1,\ldots,w_s=0,1,\\ i_1=1,2,\cdots,\frac{L_1}{2},\cdots,\ i_s=1,2,\cdots,\frac{L_s}{2}\end{array}\right)$$

stellt ein System von $2^m L_1\ldots L_s$ ganzen Zahlen in k dar; diese sind sämmtlich zu 2 prim und nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ einander incongruent. In der That wären zwei Zahlen von der Gestalt (2) einander nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent, wäre etwa

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1^{u_1}\ldots\varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}}\,\varkappa_1^{v_1}\ldots\varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}}\,\pi_1^{w_1}\ldots\pi_s^{w_s}(\alpha_1^{(i_1)})^2\ldots(\alpha_s^{(i_s)})^2\\ \equiv\varepsilon_1^{u_1'}\ldots\varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}'}\,\varkappa_1^{v_1'}\ldots\varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}'}\,\pi_1^{w_1'}\ldots\pi_s^{w_s'}(\alpha_1^{(i_1')})^2\ldots(\alpha_s^{(i_s')})^2,\\ \qquad\qquad\left(\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}\,\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{2l_s+1}\right),\end{array}\right.$$

so würde, da die Zahlen $\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_s^{(i)}$ sämmtlich zu 2 prim sind, aus dem vorhin Bewiesenen sofort folgen, dass die Exponenten $u_1,\ldots,u_{\frac{m}{2}}$, $v_1,\ldots,v_{\frac{m}{2}}$, $w_1,\ldots,w_s$ bez. mit den Exponenten $u_1',\ldots,u_{\frac{m}{2}}'$, $v_1',\ldots,v_{\frac{m}{2}}'$, $w_1'\ldots,w_s'$ übereinstimmen und es wäre mithin

$$(\alpha_1^{(i_1)})^2\ldots(\alpha_s^{(i_s)})^2\equiv(\alpha_1^{(i_1')})^2\ldots(\alpha_s^{(i_s')})^2,\quad(\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{2l_s+1}).$$

Aus dieser Congruenz entnehmen wir der Reihe nach die s Congruenzen

$$(\alpha_1^{(i_1)})^2\equiv(\alpha_1^{(i_1')})^2,\quad(\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\alpha_s^{(i_s)})^2\equiv(\alpha_s^{(i_s')})^2,\quad(\mathfrak{l}_s^{(2l_s+1)}).$$

Aus der ersten Congruenz folgt leicht, dass entweder $\alpha_1^{(i_1)}-\alpha_1^{(i_1')}$ oder $\alpha_1^{(i_1)}+\alpha_1^{(i_1')}$ durch $\mathfrak{l}_1^{l_1+1}$ theilbar sein muss, und desswegen ist nothwendigerweise $i_1=i_1'$. Ebenso schliessen wir $i_2=i_2',\ldots,i_s=i_s'$, d. h. die beiden Ausdrücke auf der linken und rechten Seite der Congruenz (3) waren nicht von einander verschieden.

Nun giebt es für den Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \dots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ genau

$$n(\mathfrak{l}_1)^{2l_1} \dots n(\mathfrak{l}_s)^{2l_s} \left(n(\mathfrak{l}_1) - 1\right) \dots \left(n(\mathfrak{l}_s) - 1\right) = 2^m L_1 \dots L_s$$

zu 2 prime und unter einander incongruente Zahlen und mithin bilden die ganzen Zahlen in (2) ein volles Restsystem der genannten Art nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \dots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$; dies ist die Aussage des Satzes 42.

§ 31.

Eine Eigenschaft gewisser besonderer Ideale des Körpers k.

Wir setzen nunmehr die in § 23 und in § 26 angestellten Untersuchungen über primäre Ideale des Körpers k fort und gelangen zu folgenden Sätzen:

Satz 43. Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges zu 2 primes Ideal in k von solcher Beschaffenheit, dass die Gleichungen

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{a}}\right) = +1, \dots, \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}}}{\mathfrak{a}}\right) = +1,$$
$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{a}}\right) = +1, \dots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

gelten: dann ist es stets möglich, in k eine ganze Zahl α zu finden, so dass das Ideal (α) gleich $\mathfrak{a}^h$ wird, und überdies die Zahl α nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \dots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ dem Quadrat einer ganzen Zahl des Körpers k congruent wird; hierbei haben $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}$, $\mathfrak{l}_1, \dots, \mathfrak{l}_s$, $l_1, \dots, l_s$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die Bedeutung wie in Satz 42.

Beweis. Es sei α^* irgend eine ganze Zahl in k, so dass $(\alpha^*) = \mathfrak{a}^h$ wird. Bezeichnen ferner $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}$, $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$, $\varkappa_1, \dots, \varkappa_{\frac{m}{2}}$, $\pi_1, \dots, \pi_s$ dieselben Ideale bez. ganzen Zahlen des Körpers k wie in Satz 42, so ist nach dem dort Bewiesenen jede ganze zu 2 prime Zahl nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \dots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ in der Gestalt darstellbar, wie im Satze 42 angegeben worden ist; wir dürfen also insbesondere

$$(1) \qquad \alpha^* = \varepsilon^* \varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \pi_1^{w_1} \dots \pi_s^{w_s} \beta^2, \qquad (\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \dots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1})$$

setzen, wo ε^* eine geeignete Einheit in k, $v_1, \dots, v_{\frac{m}{2}}$, $w_1, \dots, w_s$ gewisse Exponenten 0, 1 und β eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet. Da hiernach die Zahl

$$\mu = \alpha^* \varepsilon^* \varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \pi_1^{w_1} \dots \pi_s^{w_s}$$

dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent ausfällt, so erhalten wir nach Satz 40 die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{cases} \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1, \cdots, \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}}, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1, \\ \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\lambda_1, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1, \cdots, \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\lambda_s, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1, \end{cases}$$

wo das Product $\prod'$ stets über alle zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k erstreckt werden soll. Aus den Gleichungen (2) folgt leicht

$$(3)\qquad \left(\frac{\varepsilon_i}{\alpha^* \varepsilon_1^{v_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_s^{w_s}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\alpha}\right)\left(\frac{\varepsilon_i}{q_1}\right)^{v_1} \cdots \left(\frac{\varepsilon_i}{q_{\frac{m}{2}}}\right)^{v_{\frac{m}{2}}} \left(\frac{\varepsilon_i}{p_1}\right)^{w_1} \cdots \left(\frac{\varepsilon_i}{p_s}\right)^{w_s} = +1,$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right),$$

$$(4)\qquad \left(\frac{\lambda_k}{\alpha^* \varepsilon_1^{v_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_s^{w_s}}\right) = \left(\frac{\lambda_k}{\alpha}\right)\left(\frac{\lambda_k}{q_1}\right)^{v_1} \cdots \left(\frac{\lambda_k}{q_{\frac{m}{2}}}\right)^{v_{\frac{m}{2}}} \left(\frac{\lambda_k}{p_1}\right)^{w_1} \cdots \left(\frac{\lambda_k}{p_s}\right)^{w_s} = +1,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, s).$$

Indem wir die Voraussetzungen des Satzes 43 benutzen, schliessen wir aus (3), (4) der Reihe nach, dass die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$, $w_1, \ldots, w_s$ sämmtlich gleich 0 sind; folglich ist wegen (1) die Zahl $\alpha = \varepsilon^* \alpha^*$ von der im Satze 43 verlangten Art.

Die Umkehrung des Satzes 43 lautet wie folgt:

Satz 44. Wenn α eine zu 2 prime ganze Zahl in k ist, die dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent ausfällt, so gelten die Gleichungen

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = +1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}}}{\alpha}\right) = +1,$$
$$\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\lambda_s}{\alpha}\right) = +1;$$

dabei haben $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}, \mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s, l_1, \ldots, l_s, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die Bedeutung wie in Satz 42.

Den Beweis dieses Satzes gewinnen wir unmittelbar aus Satz 40, indem wir in der Gleichung dieses Satzes 40 für ν der Reihe nach die Zahlen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$ und für μ jedesmal die Zahl α nehmen.

Die Sätze 43 und 44 bilden einen wesentlichen Bestandtheil des *zweiten* Ergänzungssatzes zu dem später aufzustellenden allgemeinen Reciprocitätsgesetze für quadratische Reste. Es ist eine lohnende Aufgabe, für die Sätze 43 und 44 numerische Beispiele in ähnlicher Weise zu berechnen, wie dies in § 27 für die entsprechenden Aussagen des ersten Ergänzungssatzes geschah. Wegen der vielen möglichen Arten der Zerlegung der Zahl 2 in verschiedenen Körpern k weisen die Aussagen des zweiten Ergänzungssatzes sogar eine noch grössere Mannigfaltigkeit an einzelnen arithmetischen Wahrheiten auf, als bei Erörterung des ersten Ergänzungssatzes zu Tage traten.

§ 32.

Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ für irgend welche zu 2 primen Zahlen ν, μ.

Wir sind nunmehr im Stande, diejenigen Sätze aufzustellen und zu beweisen, welche den Sätzen 14, 15 entsprechen, wenn man für $\mathfrak{w}$ ein in 2 aufgehendes Primideal des Körpers k nimmt. Um dieses Ziel zu erreichen, führen wir ein neues Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ ein; dieses Symbol dient uns jedoch nur zum vorübergehenden Gebrauch, da dasselbe sich später als gleichbedeutend mit dem Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ herausstellen wird.

Definition 17. Es seien ν, μ irgend welche zu 2 prime ganze Zahlen in k; ferner sei $\mathfrak{l}$ ein in der Zahl 2 aufgehendes Primideal des Körpers k und wir setzen $2 = \mathfrak{l}^l \mathfrak{L}$, wo l einen positiven Potenzexponenten und $\mathfrak{L}$ ein zu $\mathfrak{l}$ primes Ideal des Körpers k bedeutet: dann werde das neue Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ durch die Gleichung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)$$

definirt; hierin ist $\prod'$ über alle zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ zu erstrecken und μ^* soll eine solche zu 2 prime ganze Zahl in k bedeuten, die den Congruenzen

$$\mu^* \equiv \mu, \quad (\mathfrak{l}^l),$$
$$\mu^* \equiv \alpha^2, \quad (\mathfrak{L}^2),$$

genügt, wo α irgend eine zu $\mathfrak{L}$ prime ganze Zahl in k sein soll.

In der That ist das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ durch diese Festsetzung ein-

deutig bestimmt. Ist nämlich μ_0^* eine ganze Zahl in k, welche den Congruenzen

$$\mu_0^* \equiv \mu, \quad (\mathfrak{P}'),$$
$$\mu_0^* \equiv \alpha_0^2, \quad (\mathfrak{Q}^2)$$

genügt, wobei α_0 irgend eine zu $\mathfrak{Q}$ prime und von α verschiedene ganze Zahl in k darstellt, so bestimme man zwei ganze Zahlen ξ, ξ_0 in k, die den Congruenzen

$$\xi\xi_0\mu \equiv 1, \quad (\mathfrak{P}'),$$
$$\left.\begin{aligned} \xi\alpha &\equiv 1, \\ \xi_0\alpha_0 &\equiv 1, \end{aligned}\right\} \quad (\mathfrak{Q}^2)$$

genügen: dann erfüllt die Zahl $\zeta = \xi^2\xi_0^2\mu^*\mu_0^*$ die Congruenz $\zeta \equiv 1$ nach 2^2 und folglich erhalten wir nach Satz 36

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \zeta}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu^*\mu_0^*}{\mathfrak{w}}\right) = +1;$$

mithin ist

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu_0^*}{\mathfrak{w}}\right),$$

wo das Product $\prod'$ stets über sämmtliche zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ in k zu erstrecken ist.

Wenn wir die beiden letzten Formeln des Satzes 14 heranziehen, so erhalten wir unmittelbar aus der Definition 17 des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ zwei entsprechende Formeln für dieses neue Symbol; wir drücken diese Thatsache in dem folgenden Satze aus:

Satz 45. (Hülfssatz.) Wenn ν, ν_1, ν_2, μ, μ_1, μ_2 beliebige zu 2 prime ganze Zahlen des Körpers k sind, so gelten in Bezug auf ein jedes in 2 aufgehende Primideal $\mathfrak{l}$ die Formeln

$$\left(\frac{\nu_1\nu_2, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\nu_2, \mu}{\mathfrak{l}}\right),$$
$$\left(\frac{\nu, \mu_1\mu_2}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\nu, \mu_2}{\mathfrak{l}}\right).$$

§ 33.

Die Uebereinstimmung der beiden Symbole $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ und $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ für irgend welche zu 2 prime Zahlen ν, μ.

Um die Uebereinstimmung der beiden Symbole $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ und $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ mit einander zu erkennen, bedienen wir uns der folgenden Entwickelungen:

Satz 46. (Hülfssatz.) Es sei wie in Definition 17 $\mathfrak{l}$ ein Primfactor von 2 im Körper k und es gehe $\mathfrak{l}$ in 2 genau zur l^{ten} Potenz auf; ferner sei ϱ eine ganze oder gebrochene Zahl in k, für die eine Congruenz

$$\varrho \equiv \alpha^2, \qquad (\mathfrak{l}^{2l+1})$$

gilt, wobei α eine ganze zu 2 prime Zahl in k bedeutet: dann kann stets auch für jede Potenz $\mathfrak{l}^L$ mit höherem Exponenten L eine ganze Zahl α_L in k gefunden werden, welche der Congruenz

$$\varrho \equiv \alpha_L^2, \qquad (\mathfrak{l}^L)$$

genügt.

Beweis. Nehmen wir an, es sei für die Potenz $\mathfrak{l}^{2l+a}$ $(a \geqq 1)$ eine Zahl α_{2l+a} von der verlangten Beschaffenheit bereits gefunden, so gelangen wir zu einer Zahl α_{2l+a+1} für die Potenz $\mathfrak{l}^{2l+a+1}$ auf diese Weise. Wir wählen zunächst eine ganze Zahl λ in k, welche durch $\mathfrak{l}$, aber nicht durch $\mathfrak{l}^2$ theilbar ist, und setzen

$$\alpha_{2l+a+1} = \alpha_{2l+a} + 2\lambda^a \xi,$$

worin ξ eine noch zu bestimmende ganze Zahl in k sei. Aus der Congruenz

$$\varrho \equiv \alpha_{2l+a+1}^2 = \alpha_{2l+a}^2 + 4\alpha_{2l+a}\lambda^a \xi + 4\lambda^{2a}\xi^2, \qquad (\mathfrak{l}^{2l+a+1})$$

erhalten wir

$$\varrho \equiv \alpha_{2l+a}^2 + 4\alpha_{2l+a}\lambda^a \xi, \qquad (\mathfrak{l}^{2l+a+1})$$

und bestimmen wir sodann ξ aus der Congruenz

$$\xi \equiv \frac{\varrho - \alpha_{2l+a}^2}{4\alpha_{2l+a}\lambda^a}, \qquad (\mathfrak{l}),$$

so ist α_{2l+a+1} eine Zahl von der verlangten Beschaffenheit; damit haben wir den Beweis für den Satz 46 erbracht.

Satz 47. (Hülfssatz.) Es sei $\mathfrak{l}$ ein Primfactor von 2 in k und es gehe $\mathfrak{l}$ in 2 genau zur l^{ten} Potenz auf: wenn dann $\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2$ irgend welche zu 2 prime ganze Zahlen in k sind, derart, dass die Brüche $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ und $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ den Quadraten gewisser ganzen Zahlen in k nach $\mathfrak{l}^{2l+1}$ congruent ausfallen, so ist stets

$$\left(\frac{\nu_1, \mu_1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu_2, \mu_2}{\mathfrak{l}}\right).$$

Beweis. Wir nehmen an, es sei μ_1 nicht das Quadrat einer Zahl in k und ν_1 im Körper $K(\sqrt{\mu_1})$ Normenrest nach $\mathfrak{l}$; wir verstehen dann unter L irgend einen Exponenten und unter A eine solche ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu_1})$, dass $\nu_1 \equiv N(\mathrm{A})$ nach $\mathfrak{l}^L$ wird. Da $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ und mithin auch $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}^{2l+1}$ congruent ist, muss nach Satz 46 auch für jeden beliebigen Exponenten L eine

Zahl α_L in k existiren, deren Quadrat dem Bruche $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ congruent nach $\mathfrak{l}^L$ ausfällt; wir haben somit

$$\nu_2 \equiv \alpha_L^2 \nu_1 \equiv N(\alpha_L \mathsf{A}), \qquad (\mathfrak{l}^L), \tag{1}$$

d. h. ν_2 ist im Körper $K(\sqrt{\mu_1})$ Normenrest nach $\mathfrak{l}$.

Wir setzen nun

$$\alpha_L \mathsf{A} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{\mu_1}}{\gamma}; \tag{2}$$

hierin seien α, β, γ gewisse ganze Zahlen in k und es gehe $\mathfrak{l}$ in γ genau zur c^{ten} Potenz auf. Wegen der über $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ gemachten Voraussetzung können wir nach Satz 46 eine Zahl β_L finden, so dass

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \equiv \beta_L^2, \quad \text{d. h. } \mu_1 \equiv \mu_2 \beta_L^2, \qquad (\mathfrak{l}^{L+2c}) \tag{3}$$

ausfällt. Aus (1), (2), (3) erhalten wir dann

$$\nu_2 \gamma^2 \equiv \alpha^2 - \beta^2 \mu_1 \equiv \alpha^2 - \beta^2 \beta_L^2 \mu_2, \qquad (\mathfrak{l}^{L+2c}). \tag{4}$$

Stellt nun δ irgend eine zu $\mathfrak{l}$ prime und durch $\frac{\gamma}{\mathfrak{l}^c}$ theilbare Zahl in k dar, so ist

$$\mathsf{A}^* = \frac{\delta(\alpha + \beta\beta_L\sqrt{\mu_2})}{\gamma}$$

gewiss eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu_2})$, da offenbar Summe und Product dieser Zahl A^* und ihrer relativconjugirten Zahl $S\mathsf{A}^*$ ganze Zahlen in k sind. Bei Benutzung von (4) folgt

$$N(\mathsf{A}^*) \equiv \delta^2 \nu_2, \qquad (\mathfrak{l}^L),$$

und da δ zu $\mathfrak{l}$ prim ist, so erweist sich mithin ν_2 als Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu_2})$ nach $\mathfrak{l}$.

Wir haben also bewiesen, dass allemal, wenn $\left(\frac{\nu_1, \mu_1}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ ist, auch $\left(\frac{\nu_2, \mu_2}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ sein muss. Da nun aus denselben Gründen umgekehrt aus $\left(\frac{\nu_2, \mu_2}{\mathfrak{l}}\right) = +1$, wenn μ_2 nicht das Quadrat einer Zahl in k ist, allemal auch $\left(\frac{\nu_1, \mu_1}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ gefolgert werden kann, so ist damit die Richtigkeit des Satzes 47 für den Fall gezeigt, dass keine der beiden Zahlen μ_1, μ_2 das Quadrat einer Zahl in k ist.

Nehmen wir an, es sei eine jener beiden Zahlen, etwa die Zahl μ_2, dagegen nicht μ_1 das Quadrat einer ganzen Zahl in k, so ist nach Definition 6 $\left(\frac{\nu_2, \mu_2}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ und die Voraussetzung des zu beweisenden Satzes 47 fordert dann, dass μ_1 congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}^{2l+1}$ sein muss; wir wollen im Folgenden den Nachweis dafür führen, dass in diesem Falle auch stets $\left(\frac{\nu_1, \mu_1}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ ausfällt.

Zu dem Zwecke bezeichnen wir wie in Satz 40 mit $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_s$ die sämmtlichen von einander verschiedenen in 2 aufgehenden Primideale, und es möge ferner allgemein $\mathfrak{l}_i$ genau zur l_i^{ten} Potenz in 2 aufgehen, so dass

$$2 = \mathfrak{l}_1^{l_1} \mathfrak{l}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s}$$

wird; wir nehmen $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1$ und setzen $l = l_1$. Sodann bestimmen wir eine ganze Zahl μ_1^* in k, welche den Congruenzen

$$(5) \qquad \begin{cases} \mu_1^* \equiv \mu_1, & (\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}), \\ \mu_1^* \equiv 1, & (\mathfrak{l}_2^{2l_2} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s}) \end{cases}$$

genügt und, nachdem dies geschehen, ein Primideal $\mathfrak{p}$ in k, für welches die Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_1^*}\right), \ldots, \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}}}{\mu_1^*}\right), \\ \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1^*}\right), \ldots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\lambda_s}{\mu_1^*}\right) \end{cases}$$

gelten; hierbei sollen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die Bedeutung, wie in Satz 42 haben. Da wegen (6)

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}\mu_1^*}\right) = +1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}}}{\mathfrak{p}\mu_1^*}\right) = +1,$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}\mu_1^*}\right) = +1, \ldots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}\mu_1^*}\right) = +1$$

wird, so können wir nach Satz 43 eine ganze Zahl α derart bestimmen, dass das Ideal (α) gleich $\mathfrak{p}^h \mu_1^{*h}$ ist und überdies die Zahl α dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent ausfällt. Wir setzen $\pi = \frac{\alpha}{\mu_1^{*h}}$ und haben dann $(\pi) = \mathfrak{p}^h$.

Nunmehr bestimmen wir in k ein Primideal $\mathfrak{q}$, für welches die Gleichungen

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\nu_1}\right), \ldots, \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}}}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}}}{\nu_1}\right),$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\nu_1}\right), \ldots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\lambda_s}{\nu_1}\right),$$

$$(7) \qquad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = +1$$

gelten. Indem wir wie vorhin verfahren, können wir nach Satz 43 eine ganze Zahl β derart bestimmen, dass das Ideal $(\beta) = \mathfrak{q}^h \nu_1^h$ wird und überdies die Zahl β dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent ausfällt; wir setzen $\varkappa = \frac{\beta}{\nu_1^h}$ und haben dann $(\varkappa) = \mathfrak{q}^h$.

Indem wir die Beschaffenheit der Zahlen α, β berücksichtigen und den Satz 47 für den oben bereits behandelten Fall anwenden, erhalten wir

$$\left(\frac{\nu_1, \mu_1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{l}}\right). \tag{8}$$

Wir betrachten jetzt den Körper $K(\sqrt{\pi})$ und werden beweisen, dass $\varkappa$ gleich der Relativnorm einer solchen Zahl dieses Körpers $K(\sqrt{\pi})$ ist, deren Nenner prim zu 2 ausfällt. Wegen der Congruenzen (5) ist μ_1^* und folglich auch π gewiss dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 congruent; infolgedessen enthält die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ nach Satz 4 und 5 nur den einen Primfactor $\mathfrak{p}$. Wenn wir die am Schlusse von § 15 gemachte Bemerkung auf diesen Körper $K(\sqrt{\pi})$ anwenden und demgemäss $t = 1$ nehmen, so wird aus der dort aufgestellten Ungleichung die folgende

$$v^* > \frac{m}{2} - 1,$$

und da v^* offenbar nicht grösser als $\frac{m}{2}$ sein kann, so ist hier nothwendig $v^* = \frac{m}{2}$, d. h. jede Einheit in k ist die Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\pi})$. Die im Satze 23 mit v bezeichnete Anzahl hat ihrer Bedeutung nach mindestens den Werth v^* und ist daher ebenfalls gleich $\frac{m}{2}$; der Satz 23 lehrt dann, dass die Anzahl aller ambigen Complexe im Körper $K(\sqrt{\pi})$ gleich 1 ist, d. h. im Körper $K(\sqrt{\pi})$ ist der einzige ambige Complex der Hauptcomplex.

Aus der soeben festgestellten Thatsache erkennen wir leicht, dass die Classenanzahl H des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ nothwendig ungerade ausfallen muss. Im entgegengesetzten Falle gäbe es nämlich in $K(\sqrt{\pi})$ ein Ideal $\mathfrak{J}$, so dass

$$\mathfrak{J} \not\sim 1, \quad \mathfrak{J}^2 \sim 1$$

wäre. Dieses Ideal $\mathfrak{J}$ könnte nun nicht dem Hauptcomplex angehören; denn wäre $\mathfrak{J}$ einem Ideale $\mathfrak{j}$ in k äquivalent, so müsste

$$\mathfrak{J}^h \sim \mathfrak{j}^h \sim 1$$

sein und aus dieser Aequivalenz würde, da h eine ungerade Zahl ist, sofort $\mathfrak{J} \sim 1$ folgen, was nicht der Fall sein sollte. Andererseits ist, wenn $N(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J} \cdot S\mathfrak{J} = \mathfrak{n}$ gesetzt wird, $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{J} \sim S\mathfrak{J}$ und mithin würde das Ideal $\mathfrak{J}$ im Körper $K(\sqrt{\pi})$ einen ambigen Complex bestimmen, welcher von dem Hauptcomplex verschieden wäre; dies widerspräche der vorhin bewiesenen Thatsache.

Wegen der Gleichung (7) zerfällt das Ideal $\mathfrak{q}$ im Körper $K(\sqrt{\pi})$; es sei $\mathfrak{Q}$ einer der beiden Primfactoren von $\mathfrak{q}$. Setzen wir $\mathfrak{Q}^{hH} = (\mathsf{A})$,

so dass A eine ganze Zahl des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ bezeichnet, so folgt, dass das Hauptideal $\mathfrak{q}^{h\,H}$ gleich der Relativnorm des Hauptideals (A) wird, und mithin ist

$$\varepsilon\,\varkappa^H = N(\mathsf{A}),$$

wenn ε eine geeignete Einheit in k bezeichnet. Da aber nach dem vorhin Bewiesenen eine jede Einheit in k die Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\pi})$ ist, so ist auch $\varkappa^H$ die Relativnorm einer ganzen Zahl A^* in $K(\sqrt{\pi})$; folglich ist $\varkappa$ die Relativnorm der Zahl $\frac{\mathsf{A}^*}{\varkappa^{\frac{H-1}{2}}}$, und der Nenner dieses Bruches fällt prim zu 2 aus. Hieraus folgt leicht nach Definition 6 $\left(\frac{\varkappa,\,\pi}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ und mithin wegen (8) auch $\left(\frac{\nu_1,\,\mu_1}{\mathfrak{l}}\right) = +1$; hiermit ist der Beweis für den Satz 47 im gegenwärtigen Falle erbracht.

Nehmen wir endlich an, es sei jede der beiden Zahlen μ_1, μ_2 das Quadrat einer ganzen Zahl in k, so ergiebt sich nach der Definition 6 für die beiden Symbole $\left(\frac{\nu_1,\,\mu_1}{\mathfrak{l}}\right)$, $\left(\frac{\nu_2,\,\mu_2}{\mathfrak{l}}\right)$ stets der Werth $+1$ und damit ist der Satz 47 vollständig bewiesen.

Satz 48. (Hülfssatz.) Es sei $\mathfrak{l}$ ein in 2 aufgehendes Primideal und ferner seien ν, μ beliebige zu 2 prime ganze Zahlen in k: wenn dann $\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ ausfällt, so ist auch stets $\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$.

Beweis. Wir bezeichnen wie in Satz 40 mit $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_s$ die s von einander verschiedenen in 2 aufgehenden Primideale und es möge allgemein $\mathfrak{l}_i$ genau zur l_i^{ten} Potenz in 2 aufgehen, so dass

$$2 = \mathfrak{l}_1^{l_1}\,\mathfrak{l}_2^{l_2}\ldots\mathfrak{l}_s^{l_s}$$

wird. Nehmen wir sodann $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1$ und setzen $l = l_1$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{l}_2^{l_2}\ldots\mathfrak{l}_s^{l_s}$, so haben wir

$$2 = \mathfrak{l}^l\mathfrak{L},$$

wo $\mathfrak{L}$ ein durch $\mathfrak{l}$ nicht theilbares Primideal bedeutet.

Es sei nun μ^* eine ganze den Congruenzen

$$\mu^* \equiv \mu, \qquad (\mathfrak{l}^{2l+1}),$$
$$\mu^* \equiv 1, \qquad (\mathfrak{L}^2)$$

genügende Zahl des Körpers k; wir bestimmen dann zunächst ein Primideal $\mathfrak{p}$ in k derart, dass die Gleichungen

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\mu^*}\right), \ldots, \left(\frac{\varepsilon_m^{\mathfrak{L}}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_m^{\mathfrak{L}}}{\mu^*}\right),$$
$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mu^*}\right), \ldots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\lambda_s}{\mu^*}\right)$$

gelten; hierbei sollen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die Bedeutung wie in Satz 42 haben. Da folglich

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}\mu^*}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}}}{\mathfrak{p}\mu^*}\right) = +1,$$
$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}\mu^*}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}\mu^*}\right) = +1$$

wird, so können wir nach Satz 43 eine ganze Zahl α derart bestimmen, dass das Ideal (α) gleich $\mathfrak{p}^h \mu^{*h}$ wird und überdies die Zahl α dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent ausfällt; wir setzen $\pi = \frac{\alpha}{\mu^{*h}}$ und haben dann $(\pi) = \mathfrak{p}^h$.

Andererseits bestimmen wir ein Primideal $\mathfrak{q}$ derart, dass die Gleichungen

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{r}}\right), \cdots, \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}}}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}}}{\mathfrak{r}}\right),$$
$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{r}}\right), \cdots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{r}}\right),$$
$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = +1 \tag{1}$$

gelten. Indem wir wie vorhin verfahren, können wir nach Satz 43 eine ganze Zahl β derart bestimmen, dass das Ideal (β) gleich $\mathfrak{q}^h \mathfrak{r}^h$ wird und überdies die Zahl β dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent ausfällt; wir setzen $\varkappa = \frac{\beta}{\mathfrak{r}^h}$ und haben dann $(\varkappa) = \mathfrak{q}^h$.

Zufolge Satz 40 haben wir

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \alpha}{\mathfrak{w}}\right) = +1, \quad \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\beta, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi, \beta}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

wo die Producte $\prod'$ über sämmtliche zu 2 primen Primideale des Körpers k erstreckt werden sollen; mit Rücksicht auf die Definition 17 ergiebt sich hieraus

$$\left(\frac{\nu, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = +1, \quad \left(\frac{\beta, \pi}{\mathfrak{l}}\right) = +1$$

und folglich bei Benutzung der Formeln des Satzes 45

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu^{*h}}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu, \pi}{\mathfrak{l}}\right)$$

und

$$\left(\frac{\nu, \pi}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu^h, \pi}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{l}}\right).$$

Somit erhalten wir schliesslich

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{l}}\right)$$

und infolge der Voraussetzung des Satzes 48 ist daher

$$\left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{l}}\right) = +1. \tag{2}$$

Da μ^* und folglich auch die Zahl π dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{L}^2$ congruent ist, so nimmt mit Rücksicht auf die Definition 17 die Gleichung (2) die Gestalt

$$\left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

an, und hieraus schliessen wir wegen (1), dass nothwendig

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = +1 \tag{3}$$

ausfallen muss.

Wir betrachten jetzt den Körper $K(\sqrt{\pi})$ und werden beweisen, dass $\varkappa$ stets gleich der Relativnorm einer solchen Zahl dieses Körpers $K(\sqrt{\pi})$ ist, deren Nenner prim zu 2 ausfällt. Zu dem Zwecke unterscheiden wir folgende drei Fälle:

Erstens nehmen wir an, es sei das Primideal $\mathfrak{p}$ primär und π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$. Die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ enthält dann nur den einen Primfactor $\mathfrak{p}$, und wir können in diesem Falle genau wie im zweiten Theile des Beweises zu Satz 47 zeigen, dass $\varkappa$ die Relativnorm einer Zahl des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ ist, deren Nenner zu 2 prim ausfällt.

Nehmen wir *zweitens* an, es sei $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal; dagegen sei π nicht eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$, sondern es sei vielmehr $\pi = \varepsilon\pi^*$, wobei π^* eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$ und ε eine Einheit in k bedeutet, welche nicht gleich dem Quadrat einer Einheit in k ausfällt. Die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ enthält, da π dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{L}^2$ congruent ist, wegen Satz 4 lediglich die beiden Primideale $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{p}$. Setzen wir in Satz 23 $t = 2$ ein, so folgt aus demselben wegen $v \leqq \frac{m}{2}$ die Ungleichung $a \leqq 1$, d. h. die Anzahl $A = 2^a$ aller ambigen Complexe des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ ist höchstens gleich 2.

Es sei nun $\mathfrak{J}$ irgend ein Ideal in $K(\sqrt{\pi})$ und $\mathfrak{j} = N(\mathfrak{J})$ die Relativnorm von $\mathfrak{J}$; wir setzen ferner $\mathfrak{j}^h = (\iota)$, wo ι eine ganze Zahl in k bedeutet: fällt dann $\left(\frac{\iota}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ aus, so bezeichnen wir denjenigen Complex des Körpers $K(\sqrt{\pi})$, zu welchem $\mathfrak{J}$ gehört, als einen

Complex des Hauptgeschlechtes in $K(\sqrt{\pi})$. Wir können leicht beweisen, dass nicht sämmtliche Complexe in $K(\sqrt{\pi})$ Complexe des Hauptgeschlechtes sind. Es sei nämlich $\mathfrak{r}$ ein Primideal in k, für welches

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = +1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{r}}\right) = -1$$

ausfällt. Wegen der ersteren Gleichung ist $\mathfrak{r}$ in $K(\sqrt{\pi})$ weiter zerlegbar; es bedeute $\mathfrak{R}$ einen Primfactor von $\mathfrak{r}$ in $K(\sqrt{\pi})$. Wird $\mathfrak{r}^{\mathfrak{h}} = (\varrho)$ gesetzt, wo ϱ eine ganze Zahl in k darstellt, so erhalten wir nach Satz 37

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{r}}\right) = -1,$$

und diese Gleichung zeigt, dass der durch $\mathfrak{R}$ bestimmte Complex in $K(\sqrt{\pi})$ nicht ein Complex des Hauptgeschlechtes ist.

Wir bezeichnen nun mit f' die Anzahl derjenigen Complexe in $K(\sqrt{\pi})$, welche Quadrate von Complexen in $K(\sqrt{\pi})$ sind, und mit f die Anzahl aller Complexe des Hauptgeschlechtes in $K(\sqrt{\pi})$; dann erkennen wir genau wie im Beweise zu Satz 25 die Richtigkeit der Gleichung

$$\mathrm{A} f' = 2f. \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung folgt wegen $\mathrm{A} \leqq 2$ die Ungleichung $f \leqq f'$. Da ferner jedes Quadrat eines Complexes nothwendig ein Complex des Hauptgeschlechtes sein muss, so ist auch $f' \leqq f$ und mithin haben wir $f = f'$, d. h. jeder Complex des Hauptgeschlechtes ist gleich dem Quadrat eines Complexes. Aus $f = f'$ folgt ferner wegen (4) zugleich $\mathrm{A} = 2$ und $a = 1$; mit Rücksicht auf Satz 23 entnehmen wir hieraus $v = \frac{m}{2}$, d. h. jede Einheit des Körpers k ist gleich der Relativnorm einer ganzen oder gebrochenen Zahl des Körpers $K(\sqrt{\pi})$.

Um nun zu zeigen, dass $\varkappa$ gleich der Relativnorm einer Zahl in $K(\sqrt{\pi})$ ist, bedenken wir, dass wegen (1) das Primideal $\mathfrak{q}$ in $K(\sqrt{\pi})$ weiter zerlegbar ist; die Gleichung (3) zeigt sodann, dass jedes in $\mathfrak{q}$ enthaltene Primideal $\mathfrak{Q}$ des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ einem Complex des Hauptgeschlechtes angehört, und da nach dem vorhin Bewiesenen jeder solche Complex gleich dem Quadrat eines Complexes ist, so genügt das Ideal $\mathfrak{Q}$ einer Gleichung von der Gestalt

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{J}^2 \mathsf{A} \mathfrak{j},$$

wobei $\mathfrak{J}$ ein Ideal in $K(\sqrt{\pi})$, A eine Zahl in $K(\sqrt{\pi})$ und $\mathfrak{j}$ ein Ideal in k bedeutet. Bilden wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung die Relativnorm und erheben sie dann in die h^{te} Potenz, so entsteht eine Gleichung von der Gestalt

$$(\varkappa) = N(\mathfrak{A})\{N(\mathfrak{S})\cdot\mathfrak{j}\}^{2h} = N(\mathfrak{A})(\gamma)^2,$$

wobei γ eine geeignete ganze Zahl in k ist und aus dieser Gleichung entnehmen wir die Gleichung

$$\xi^{\frac{1}{2}}\varkappa = N(\gamma\mathfrak{A}),$$

wo ξ eine Einheit in k bedeutet. Da nach dem vorhin Bewiesenen jede Einheit in k die Relativnorm einer Zahl in $K(\sqrt{\pi})$ ist, so zeigt die letzte Gleichung, dass auch $\varkappa$ die Relativnorm einer gewissen Zahl in $K(\sqrt{\pi})$ sein muss. Durch eine einfache Betrachtung erkennen wir sodann, dass $\varkappa$ sich jedenfalls auch als Relativnorm einer solchen Zahl muss darstellen lassen, deren Nenner zu 2 prim ist.

Wir nehmen *drittens* an, es wäre $\mathfrak{p}$ ein nichtprimäres Primideal in k und ζ eine Einheit, für welche $\left(\frac{\zeta}{\mathfrak{p}}\right) = -1$ wird. In diesem Falle kann ζ sicher nicht die Relativnorm einer ganzen oder gebrochenen Zahl in $K(\sqrt{\pi})$ sein; es ist mithin die in Satz 23 mit v bezeichnete Anzahl hier $\leqq \frac{m}{2} - 1$. Da π dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{L}^2$ congruent wird, so ist die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ nach Satz 4 prim zu $\mathfrak{L}$ und enthält daher wiederum nur die beiden Primfactoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}$. Setzen wir in Satz 23 $t = 2$ ein, so folgt aus demselben wegen $v \leqq \frac{m}{2} - 1$ die Ungleichung $a \leqq 0$, d. h. es ist $a = 0$ und $v = \frac{m}{2} - 1$. Es machen nun die Gesammtheit aller Einheiten ξ, für welche $\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ ausfällt, offenbar genau $2^{\frac{m}{2}-1}$ Einheitenverbände des Körpers k aus und da diejenigen $2^{\frac{m}{2}-1}$ Verbände von Einheiten η, für welche $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right) = -1$ ausfällt, gewiss nicht Einheiten enthalten dürfen, die Relativnormen von Zahlen sind, so folgt, dass alle Einheiten ξ mit der Eigenschaft $\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ nothwendig Relativnormen von Zahlen des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ sind.

Aus der Gleichung $a = 0$ folgt ferner, dass im Körper $K(\sqrt{\pi})$ der einzige ambige Complex der Hauptcomplex ist und hieraus schliessen wir, wie im zweiten Theil des Beweises zu Satz 47, dass die Classenanzahl H des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ nothwendig ungerade sein muss. Auch erkennen wir, wie dort, dass, wenn ε eine geeignete Einheit in k bezeichnet, die Zahl $\varepsilon\varkappa^H$ gleich der Relativnorm einer gewissen ganzen Zahl in $K(\sqrt{\pi})$ sein muss. Infolgedessen besteht die Gleichung

$$\left(\frac{\varepsilon\varkappa^H}{\mathfrak{p}}\right) = +1;$$

wegen (3) muss hiernach auch $\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ sein und nach dem Vorigen ist mithin ε die Relativnorm einer Zahl in $K(\sqrt{\pi})$. Hieraus schliessen wir, dass auch $\varkappa^H$ die Relativnorm einer Zahl in $K(\sqrt{\pi})$ sein muss und folglich ist $\varkappa$ die Relativnorm einer Zahl in $K(\sqrt{\pi})$ und insbesondere auch einer solchen Zahl, deren Nenner zu 2 prim ist.

In allen drei soeben behandelten Fällen ist mithin nach Definition 6 gewiss

$$\left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{l}}\right) = +1.$$

Wir hatten nun zu Beginn des Beweises $\alpha = \pi\mu^{*h}$ und sodann $\beta = \varkappa\nu^h$ als ganze Zahlen in k derart bestimmt, dass sie Quadraten ganzer Zahlen in k nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent ausfielen. Da ferner $\mu^* \equiv \mu$ nach $\mathfrak{l}^{2l+1}$ ist, so folgt nach Satz 47

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{l}}\right) = +1;$$

damit ist der Satz 48 vollständig bewiesen.

Satz 49. (Hülfssatz.) Es sei $\mathfrak{l}$ ein in 2 aufgehendes Primideal und ferner seien ν, μ beliebige zu 2 prime ganze Zahlen in k: wenn dann $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ ausfällt, so ist auch stets $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$.

Beweis. Wir wenden die am Anfang des Beweises zu Satz 48 erläuterten Bezeichnungen an und bestimmen eine ganze Zahl μ^*, welche den Congruenzen

$$\mu^* \equiv \mu, \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}),$$
$$\mu^* \equiv 1, \quad (\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\mathfrak{l}_3^{2l_3+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1})$$

genügt und nicht zugleich das Quadrat einer ganzen Zahl in k ist; dann haben wir wegen Satz 47

$$\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = +1,$$
$$\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{l}_i}\right) = \left(\frac{\nu, 1}{\mathfrak{l}_i}\right) = +1, \quad (i = 2, 3, \ldots, s);$$

infolgedessen giebt es gewisse ganze Zahlen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_s$ im Körper $K(\sqrt{\mu^*})$ derart, dass

$$\nu \equiv N(\mathsf{A}_1), \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\nu \equiv N(\mathsf{A}_s), \quad (\mathfrak{l}_s^{2l_s})$$

ausfällt. Wenn wir daher eine ganze Zahl A in $K(\sqrt{\mu^*})$ bestimmen, die zugleich den s Congruenzen

$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}_1, \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1}),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}_s, \quad (\mathfrak{l}_s^{2l_s}),$$

genügt, so wird auch

$$\nu \equiv N(\mathsf{A}), \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1}\mathfrak{l}_2^{2l_2} \dots \mathfrak{l}_s^{2l_s})$$

und vermöge des Satzes 36 schliessen wir hieraus leicht

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{N(\mathsf{A}), \mu^*}{\mathfrak{w}}\right),$$

wo die Producte $\prod'$ über alle zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ in k zu erstrecken sind; nach der Definition 17 ist das Product linker Hand gleich $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$. Da nun nach Definition 6 sämmtliche Factoren des Productes rechter Hand den Werth $+1$ haben, so folgt $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$, womit der Satz 49 vollständig bewiesen ist. Die beiden Sätze 48 und 49 zusammengenommen ergeben das folgende Resultat:

Satz 50. (Hülfssatz.) Wenn $\mathfrak{l}$ irgend ein in 2 aufgehendes Primideal und ferner ν, μ irgend welche zu 2 prime ganze Zahlen in k bedeuten, dann gilt stets die Gleichung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right).$$

§ 34.

Die Eigenschaften des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ für irgend welche zu 2 prime ganze Zahlen ν, μ.

Mit Hülfe des Satzes 50 können wir die wichtige Thatsache beweisen, dass die in Satz 14 aufgestellten Formeln auch für jedes in 2 aufgehende Primideal $\mathfrak{l}$ gültig sind. Wir sprechen den Satz aus:

Satz 51. Wenn ν, ν_1, ν_2, μ, μ_1, μ_2 beliebige zu 2 prime ganze Zahlen in k sind, so gelten in Bezug auf jedes in 2 aufgehende Primideal $\mathfrak{l}$ des Körpers k die Formeln

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}}\right),$$
$$\left(\frac{\nu_1\nu_2, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\nu_2, \mu}{\mathfrak{l}}\right),$$
$$\left(\frac{\nu, \mu_1\mu_2}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\nu, \mu_2}{\mathfrak{l}}\right).$$

Beweis. Es mögen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{L}$ die Bedeutung wie in Definition 17 haben. Um die erste Formel des Satzes 51 zu beweisen, bestimmen wir zwei ganze Zahlen ν^*, μ^* in k von der Art, dass

$$\left.\begin{aligned}\nu^* &\equiv \nu\\ \mu^* &\equiv \mu\end{aligned}\right\},\ (\mathfrak{l}^{2l+1}),$$
$$\left.\begin{aligned}\nu^* &\equiv 1\\ \mu^* &\equiv 1\end{aligned}\right\},\ (\mathfrak{L}^2),$$

wird. Nach Satz 47 ist dann

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu^*, \mu}{\mathfrak{l}}\right),\ \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\mu^*, \nu}{\mathfrak{l}}\right)$$

und folglich wegen Satz 50 auch

$$(1)\qquad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu^*, \mu}{\mathfrak{l}}\right),\ \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\mu^*, \nu}{\mathfrak{l}}\right).$$

Nun ist nach Definition 17

$$(2)\qquad \left(\frac{\nu^*, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right),\ \left(\frac{\mu^*, \nu}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\mu^*, \nu^*}{\mathfrak{w}}\right),$$

und da nach der ersten Formel in Satz 14 für jedes zu 2 prime Primideal $\mathfrak{w}$

$$\left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\mu^*, \nu^*}{\mathfrak{w}}\right)$$

ausfällt, so folgt aus (2) auch

$$\left(\frac{\nu^*, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\mu^*, \nu}{\mathfrak{l}}\right)$$

und daher wegen (1) auch

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}}\right);$$

diese Gleichung lehrt mit Rücksicht auf Satz 50 die Richtigkeit der ersten Formel des zu beweisenden Satzes 51.

Die beiden letzten Formeln des Satzes 51 folgen unmittelbar aus den Sätzen 45 und 50.

§ 35.

Das Product $\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für irgend welche zu 2 prime Zahlen ν, μ.

Wir sind nunmehr im Stande, einen Satz zu beweisen, der eine wesentliche Verallgemeinerung des Satzes 36 darstellt.

Satz 52. *Wenn ν, μ irgend welche zu 2 prime ganze Zahlen in k sind, so ist stets*

$$\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

wo das Product über sämmtliche Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k erstreckt werden soll.

Beweis. Wir wenden die in Satz 40 erläuterten Bezeichnungen an und bestimmen s ganze Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ in k, so dass die Congruenzen

$$(1)\qquad \begin{cases} \mu_1 \equiv \mu, \ \mu_2 \equiv 1, \ \ldots, \ \mu_s \equiv 1, & (\mathfrak{l}_1^{2l_1}), \\ \mu_1 \equiv 1, \ \mu_2 \equiv \mu, \ \ldots, \ \mu_s \equiv 1, & (\mathfrak{l}_2^{2l_2}), \\ \quad \ldots\ldots\ldots\

§ 36.

Der erste Ergänzungssatz und das allgemeine Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste.

Wir heben einige besonders wichtige Folgerungen des Satzes 52 hervor.

Satz 53. *Es seien* $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_s$ *die in* 2 *aufgehenden Primideale des Körpers* k *und* ε *bedeute irgend eine Einheit in* k*; ferner sei* $\mathfrak{p}$ *ein zu* 2 *primes Primideal und* π *eine ganze Zahl in* k*, so dass* $(\pi) = \mathfrak{p}^h$ *ausfällt: dann gilt stets die Gleichung*

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon, \pi}{\mathfrak{l}_1}\right)\left(\frac{\varepsilon, \pi}{\mathfrak{l}_2}\right)\cdots\left(\frac{\varepsilon, \pi}{\mathfrak{l}_s}\right).$$

Dieser Satz 53 heisse der *erste Ergänzungssatz zum allgemeinen Reciprocitätsgesetze für quadratische Reste im Körper* k.

Satz 54. *Es seien* $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_s$ *die in* 2 *aufgehenden Primideale des Körpers* k*; ferner seien* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ *irgend zwei zu* 2 *prime Primideale und* $\pi, \varkappa$ *ganze Zahlen in* k*, so dass* $(\pi) = \mathfrak{p}^h$, $(\varkappa) = \mathfrak{q}^k$ *wird: dann gilt die Gleichung*

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi, \varkappa}{\mathfrak{l}_1}\right)\left(\frac{\pi, \varkappa}{\mathfrak{l}_2}\right)\cdots\left(\frac{\pi, \varkappa}{\mathfrak{l}_s}\right).$$

Der Satz 54 heisse das *allgemeine Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste im Körper* k.

Wir können die Sätze 53 und 54 unmittelbar aus Satz 52 herleiten, indem wir in Satz 52 zunächst $\nu = \varepsilon$, $\mu = \pi$ und dann $\nu = \pi$, $\mu = \varkappa$ wählen.

§ 37.

Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ für beliebige ganze Zahlen ν, μ.

Wir dehnen nunmehr die Bedeutung des in Definition 17 eingeführten Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ auf den Fall aus, dass ν, μ beliebige ganze Zahlen in k sind; das so verallgemeinerte Symbol wird sich wiederum als gleichbedeutend mit dem allgemeinen Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ erweisen.

Definition 18. Es seien, wie bisher $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_s$ die von einander verschiedenen Primfactoren von 2 und es gehe das Primideal $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}$ genau zur l_1^{ten}, ferner gehen die Primideale $\mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_s$ bez. zur $l_2, \ldots, l_s^{\text{ten}}$ Potenz in 2 auf; endlich seien ν, μ beliebige ganze Zahlen in k und es gehe in μ genau die a^{te} Potenz von $\mathfrak{l}$ auf: dann wird das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ durch die Gleichung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)$$

definirt; hierin ist das Product $\prod_{(\mathfrak{w})}{}'$ über alle zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ zu erstrecken und μ^* soll eine solche ganze Zahl sein, die den Congruenzen

$$\mu^* \equiv \mu, \quad (\mathfrak{l}^{2l+1+a}),$$
$$\mu^* \equiv \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}_2^{2l_2+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1})$$

genügt, wo α irgend eine ganze zu $\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \ldots, \mathfrak{l}_s$ prime Zahl in k bedeutet.

Wir zeigen wie in § 32, indem wir statt des dort benutzten Satzes 36 nunmehr den Satz 40 anwenden, dass das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ durch die getroffenen Festsetzungen eindeutig bestimmt ist.

Aus der Definition 18 entnehmen wir leicht mit Benutzung der beiden letzten Formeln in Satz 14 die folgende dem Satz 45 entsprechende Thatsache:

Satz 55. (Hülfssatz.) Wenn $\nu, \nu_1, \nu_2, \mu, \mu_1, \mu_2$ beliebige ganze Zahlen in k sind, so gelten in Bezug auf ein jedes in 2 aufgehende Primideal $\mathfrak{l}$ die Formeln

$$\left(\frac{\nu_1 \nu_2, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\nu_2, \mu}{\mathfrak{l}}\right),$$
$$\left(\frac{\nu, \mu_1 \mu_2}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\nu, \mu_2}{\mathfrak{l}}\right).$$

§ 38.

Die Uebereinstimmung der beiden Symbole $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ und $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ für beliebige ganze Zahlen ν, μ.

Um die Uebereinstimmung der beiden Symbole $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ und $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ für beliebige ganze Zahlen ν, μ zu erkennen, bedienen wir uns der folgenden Entwickelungen:

Satz 56. (Hülfssatz.) Es sei $\mathfrak{l}$ ein Primfactor von 2 im Körper k und es gehe $\mathfrak{l}$ in 2 genau zur l^{ten} Potenz auf; ferner seien $\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2$ ganze Zahlen in k und es gehe in diesen Zahlen das Primideal $\mathfrak{l}$ bez. genau zur $b_1, b_2, a_1, a_2^{\text{ten}}$ Potenz auf, wobei $b_2 \leqq b_1$, $a_2 \leqq a_1$ ausfallen möge: wenn es dann in k gewisse ganze Zahlen α, β giebt, für welche die Congruenzen

$$\nu_1 \equiv \alpha^2 \nu_2, \quad (\mathfrak{l}^{2l+1+b_1}),$$
$$\mu_1 \equiv \beta^2 \mu_2, \quad (\mathfrak{l}^{2l+1+a_1})$$

gelten, so ist stets

$$\left(\frac{\nu_1, \mu_1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu_2, \mu_2}{\mathfrak{l}}\right).$$

Den Beweis dieses Hülfssatzes führen wir leicht, indem wir uns der nämlichen Schlüsse wie beim Beweise des entsprechenden Satzes 47 bedienen.

Satz 57. (Hülfssatz.) Es sei $\mathfrak{l}$ ein in 2 aufgehendes Primideal des Körpers k und ferner seien ν, μ beliebige ganze Zahlen ($\neq 0$) in k: wenn dann $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ ausfällt, so ist auch stets $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$.

Beweis. Wir benutzen die in Definition 18 erläuterten Bezeichnungen. Es sind zwei Fälle gesondert zu behandeln, je nachdem der Exponent a, zu dem $\mathfrak{l}$ in μ aufgeht, gerade oder ungerade ausfällt.

Im *ersteren* Falle bezeichnen wir mit $\bar{\lambda}$ irgend eine durch $\mathfrak{l}^{\frac{a}{2}}$, aber durch keine höhere Potenz von $\mathfrak{l}$ theilbare und zu $\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \ldots, \mathfrak{l}_s$ prime ganze Zahl in k und bestimmen dann eine ganze Zahl μ^* in k derart, dass sie die Congruenzen

$$\begin{aligned} &\bar{\lambda}^2 \mu^* \equiv \mu, \quad (\mathfrak{l}^{2l+1+a}), \\ (1) \qquad &\mu^* \equiv 1, \quad (\mathfrak{l}_2^{2l_2+1} \mathfrak{l}_3^{2l_3+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}) \end{aligned}$$

erfüllt und nicht zugleich das Quadrat einer Zahl in k ist; es ist dann μ^* eine zu 2 prime Zahl und nach Definition 18 wird

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \bar{\lambda}^2 \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right),$$

wo die Producte $\prod_{(\mathfrak{w})}{}'$ über alle zu 2 primen Primideale $\mathfrak{w}$ in k zu erstrecken sind. Wegen der Voraussetzung des Satzes 57 haben wir mithin

$$(2) \qquad \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = +1.$$

Wir wollen nun aus (2) beweisen, dass der Exponent b, zu dem $\mathfrak{l}$ in ν aufgeht, sicher dann gerade ausfallen muss, wenn das Ideal $\mathfrak{l}$ des Körpers k auch in $K(\sqrt{\mu^*})$ Primideal bleibt. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es bliebe $\mathfrak{l}$ in $K(\sqrt{\mu^*})$ Primideal. Wir bestimmen sodann ein Primideal $\mathfrak{p}$, für welches die Gleichungen

$$(3) \qquad \left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\mu^*}\right), \ \ldots, \ \left(\frac{\varepsilon_m^{\frac{1}{2}}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_m^{\frac{1}{2}}}{\mu^*}\right),$$

$$(4) \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mu^*}\right), \ \ldots, \ \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\lambda_s}{\mu^*}\right)$$

erfüllt sind, wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m^{\frac{1}{2}}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ die in Satz 42 erklärte Bedeutung haben mögen. Da $\mathfrak{l}$ im Körper $K(\sqrt{\mu^*})$ unzerlegbar sein soll, so ist nach Satz 4 und 6 μ^* congruent dem Quadrat einer

ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l}$ und folglich wegen (1) auch nach 2^2; mithin gelten nach Satz 39 die Gleichungen

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu^*}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\varepsilon_m^{\frac{\varepsilon_m}{2}}}{\mu^*}\right) = +1$$

und wegen (3) ist daher $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal. Bezeichnet π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$, so ist, wie man aus (3), (4) vermöge Satz 43 unter Hinzuziehung von Satz 28 erkennt, $\pi\mu^*$ dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent; es ist folglich wegen (1) π gewiss dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ congruent und nach Satz 8 zerfällt daher jedes der Primideale $\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \ldots, \mathfrak{l}_s$ im Körper $K(\sqrt{\pi})$ in zwei Primfactoren. Im Beweise zu Satz 34 ist gezeigt worden, dass alle Ideale des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ dem Hauptgeschlechte angehören. Die Charaktere der in $\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \ldots, \mathfrak{l}_s$ enthaltenen Primfactoren des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ müssen somit sämmtlich $+1$ sein, d. h. es gelten die Gleichungen

$$\left(\frac{\lambda_2}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \left(\frac{\lambda_3}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}}\right) = +1.$$

Würde nun auch $\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ ausfallen, so müsste nach Satz 43 die Primärzahl π und folglich auch die Zahl μ^* congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ sein und dann zerfiele nach Satz 8 das Primideal $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1$ im Körper $K(\sqrt{\mu^*})$ in zwei Primfactoren, was unserer Annahme entgegen ist. Es ist mithin nothwendigerweise

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right) = -1. \tag{5}$$

Nunmehr setzen wir

$$(\nu) = \mathfrak{n}\mathfrak{l}^b\mathfrak{l}_2^{b_2}\ldots\mathfrak{l}_s^{b_s},$$

so dass $\mathfrak{n}$ prim zu 2 ist und $b_2, \ldots, b_s$ gewisse ganze rationale Exponenten bedeuten; es folgt dann

$$\nu^h = \nu^*\lambda_1^b\lambda_2^{b_2}\lambda_3^{b_3}\ldots\lambda_s^{b_s},$$

wobei ν^* eine zu 2 prime ganze Zahl in k darstellt. Nach Satz 40 haben wir

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu^h, \pi\mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = +1.$$

Ferner ist mit Rücksicht auf (2)

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu^h, \pi\mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu^h, \pi}{\mathfrak{w}}\right) \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu^h, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu^h, \pi}{\mathfrak{w}}\right);$$

es wird daher

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varepsilon^{h}, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = +1. \tag{6}$$

Andererseits erhalten wir, da nach Satz 36

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varepsilon^{*}, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

ausfällt, die Gleichung

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varepsilon^{h}, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varepsilon^{*}, \pi}{\mathfrak{w}}\right) \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\lambda_1, \pi}{\mathfrak{w}}\right)^{b} \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\lambda_2, \pi}{\mathfrak{w}}\right)^{b_2} \cdots \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\lambda_s, \pi}{\mathfrak{w}}\right)^{b_s}$$

$$= \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varepsilon^{*}, \pi}{\mathfrak{w}}\right) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right)^{b} \left(\frac{\lambda_2}{\mathfrak{p}}\right)^{b_2} \cdots \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}}\right)^{b_s} = \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right)^{b};$$

wegen (5) und (6) entnehmen wir hieraus

$$(-1)^{b} = +1,$$

d. h. b ist eine gerade Zahl.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen und es muss mithin entweder das Primideal $\mathfrak{l}$ des Körpers k in $K(\sqrt{\mu^*})$ weiter zerlegbar sein oder der Exponent b, zu dem $\mathfrak{l}$ in ν aufgeht, gerade ausfallen. In beiden Fällen aber kann, wie leicht ersichtlich, eine ganze Zahl A im Körper $K(\sqrt{\mu^*})$ gefunden werden, derart, dass $\frac{\nu}{N(\mathsf{A})}$ gleich einem Bruche $\frac{\varrho}{\sigma}$ wird, dessen Zähler ϱ und dessen Nenner σ zu 2 prim ausfallen, und aus (2) schliessen wir dann

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varrho\sigma, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = +1.$$

Diese Gleichung erhält mit Rücksicht auf die Definition 17 die Gestalt

$$\left(\frac{\varrho\sigma, \mu^*}{\mathfrak{l}}\right) = +1$$

und folglich ist nach Satz 50 auch

$$\left(\frac{\varrho\sigma, \mu^*}{\mathfrak{l}}\right) = +1,$$

d. h. $\varrho\sigma$ ist Normenrest im Körper $K(\sqrt{\mu^*})$ nach $\mathfrak{l}$ und folglich ist wegen Satz 56 auch $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$. Damit ist der Satz 57 in dem Falle bewiesen, dass der Exponent a gerade ausfällt.

Wir machen *zweitens* die Annahme, dass der Exponent a ungerade ist und benutzen wiederum die Bezeichnungen wie in Satz 42. Wir bestimmen dann eine ganze zu 2 prime Zahl μ^* in k, für welche die Congruenzen

$$\lambda_1^a \mu^* \equiv \mu^h, \quad (\mathfrak{l}^{2l+1+ah}),$$
$$\lambda_1^a \mu^* \equiv 1, \quad (\mathfrak{l}_2^{2l_2+1} \mathfrak{l}_3^{2l_3+1} \dots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1})$$

hen. Es sei ferner $\mathfrak{p}$ ein Primideal in k, welches den Bedingungen

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\mu^*}\right), \dots, \left(\frac{\varepsilon_m^{\frac{2}{2}}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_m^{\frac{2}{2}}}{\mu^*}\right),$$
$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mu^*}\right), \dots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\lambda_s}{\mu^*}\right)$$

gt. Mit Rücksicht auf Satz 43 giebt es dann in k eine ganze π^* derart, dass das Hauptideal (π^*) gleich $\mathfrak{p}^h$ wird und das uct $\pi^* \mu^*$ congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\dots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ ausfällt. Ferner lässt sich, wie leicht mit Rücksicht Satz 4, 6 und 8 ersichtlich ist, im Körper $K(\sqrt{\lambda_1 \mu^*})$ gewiss eine A finden, so dass $\frac{\nu}{N(\mathfrak{A})}$ gleich einem Bruche $\frac{\varrho}{\sigma}$ wird, dessen er ϱ und dessen Nenner σ zu 2 prim ausfallen. Endlich werde Primideal $\mathfrak{q}$ in k bestimmt, welches den Bedingungen

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varrho\sigma}\right), \dots, \left(\frac{\varepsilon_m^{\frac{2}{2}}}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_m^{\frac{2}{2}}}{\varrho\sigma}\right),$$
$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\varrho\sigma}\right), \dots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\lambda_s}{\varrho\sigma}\right),$$
$$\left(\frac{\lambda_1 \pi^*}{\mathfrak{q}}\right) = +1$$

gt. Mit Rücksicht auf Satz 43 giebt es dann in k eine ganze $\varkappa$ derart, dass $(\varkappa) = \mathfrak{q}^h$ und zugleich $\varkappa \varrho \sigma$ congruent dem Quadrat r ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \dots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ ausfällt.

Wir haben nun auf Grund von Definition 18

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \lambda_1^a \mu^*}{\mathfrak{w}}\right),$$

er ist

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \lambda_1^a \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varrho\sigma, \lambda_1^a \mu^*}{\mathfrak{w}}\right).$$

lich folgt bei Anwendung der Sätze 36 und 40

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varrho\sigma, \lambda_1^a \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varkappa, \lambda_1 \pi^*}{\mathfrak{w}}\right),$$

wegen der Voraussetzung des Satzes 57 haben wir mithin

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varkappa, \lambda_1 \pi^*}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

d. h. es ist

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\lambda_1\pi^*}{\mathfrak{q}}\right) = +1$$

und wegen (7) wird also auch

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = +1. \tag{8}$$

Wir betrachten nunmehr den Körper $K(\sqrt[l]{\lambda_1\pi^*})$ und bedienen uns dann zum Beweise des Satzes 57 der nämlichen Schlussweise, welche wir beim Beweise des Satzes 48 angewandt haben. Aus (7) folgt, dass das Primideal $\mathfrak{q}$ des Körpers k in $K(\sqrt[l]{\lambda_1\pi^*})$ stets weiter zerlegbar ist. Wir unterscheiden ferner im Folgenden zwei Fälle, jenachdem $\mathfrak{p}$ ein nichtprimäres oder ein primäres Primideal ist.

Im ersteren Falle erweist sich durch eine ähnliche Betrachtung, wie sie im dritten Theile des Beweises zu Satz 48 (S. 103) angestellt wurde, die Classenanzahl des Körpers $K(\sqrt[l]{\lambda_1\pi^*})$ als ungerade und es folgt hieraus mit Hinzuziehung von (8) wie in dem eben genannten Beweise, dass $\varkappa$ die Relativnorm einer Zahl in $K(\sqrt[l]{\lambda_1\pi^*})$ ist.

Im zweiten Falle vertheilen wir ähnlich wie im zweiten Theile des Beweises zu Satz 48 (S. 101—102) die Complexe des Körpers $K(\sqrt[l]{\lambda_1\pi^*})$ in zwei Geschlechter und zeigen dann, wie dort, dass jeder Complex des Hauptgeschlechtes gleich dem Quadrat eines Complexes wird. Berücksichtigen wir, dass wegen (8) jedes durch Zerlegung von $\mathfrak{q}$ entstehende Primideal in $K(\sqrt[l]{\lambda_1\pi^*})$ dem Hauptgeschlechte angehört, so folgt wiederum, dass $\varkappa$ die Relativnorm einer Zahl in $K(\sqrt[l]{\lambda_1\pi^*})$ ist.

In beiden vorhin unterschiedenen Fällen erhalten wir mithin

$$\left(\frac{\varkappa, \lambda_1\pi^*}{\mathfrak{l}}\right) = +1$$

und da die Zahlen $\pi^*\mu^*$ und $\varkappa\varrho\sigma$ Quadraten von ganzen Zahlen in k nach $\mathfrak{l}^{2l+1}$ congruent ausfallen, so folgt auf Grund des Satzes 56 schliesslich auch

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1.$$

Hiermit ist Satz 57 vollständig bewiesen.

Satz 58. (Hülfssatz.) Es sei $\mathfrak{l}$ ein in 2 aufgehendes Primideal in k und ferner seien ν, μ beliebige ganze Zahlen $\neq 0$ in k: wenn dann $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ ausfällt, so ist auch stets $\left(\frac{\nu, u}{\mathfrak{l}}\right) = +1$.

Beweis. Wir benutzen die in Definition 18 erläuterten Bezeichnungen und bestimmen eine ganze Zahl μ^*, welche den Congruenzen

$$\mu^* \equiv \mu, \qquad (\mathfrak{l}_1^{2l_1+1+a}),$$
$$\mu^* \equiv 1, \qquad (\mathfrak{l}_2^{2l_2+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1})$$

genügt und nicht zugleich das Quadrat einer ganzen Zahl in k ist; dann haben wir nach Satz 56

$$(9)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = +1, \\ \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{l}_i}\right) = \left(\frac{\nu, 1}{\mathfrak{l}_i}\right) = +1, \qquad (i = 2, 3, \ldots \varepsilon) \end{cases}$$

Es mögen nun in der Zahl ν die Primideale $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_\varepsilon$ bez. genau zur $b_1, \ldots, b_\varepsilon^{\text{ten}}$ Potenz aufgehen; infolge der Gleichungen (9) giebt es gewisse Zahlen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\varepsilon$ im Körper $K(\sqrt{\mu^*})$ derart, dass

$$\nu \equiv N(\mathsf{A}_1), \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1+1+b_1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\nu \equiv N(\mathsf{A}_\varepsilon), \quad (\mathfrak{l}_\varepsilon^{2l_\varepsilon+1+b_\varepsilon})$$

ausfällt. Wenn wir ähnlich wie im Beweise zu Satz 49 aus den Zahlen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\varepsilon$ eine Zahl A construiren und dann in entsprechender Weise wie am genannten Ort verfahren, so erkennen wir ohne Schwierigkeit die Richtigkeit des Satzes 58.

Die beiden Sätze 57 und 58 zusammen genommen ergeben das Resultat:

Satz 59. (Hülfssatz.) Wenn $\mathfrak{l}$ irgend ein in 2 aufgehendes Primideal und ferner ν, μ beliebige ganze Zahlen $\neq 0$ in k bedeuten, dann gilt stets die Gleichung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu, u}{\mathfrak{l}}\right).$$

Mit Hülfe des Satzes 59 können wir leicht die in Satz 51 für das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ aufgestellten drei Formeln auch in dem Falle als richtig nachweisen, dass ν, μ beliebige ganze Zahlen in k sind. Das Schlussverfahren zum Beweise der ersten Formel entspricht demjenigen, das zum Beweise der ersten Formel des Satzes 51 angewandt worden ist. Die Richtigkeit der beiden letzten Formeln folgt unmittelbar aus Satz 55 und 59. Wir erkennen hiernach, *dass die für das Symbol* $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ *in Satz* 14 *aufgestellten Formeln allgemein für beliebige ganze Zahlen* ν, μ *in* k *und in Bezug auf jedes beliebige Primideal* $\mathfrak{w}$ *in* k *gültig sind.*

§ 39.

Das Product $\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für beliebige ganze Zahlen ν, μ.

Wir sind nunmehr im Stande, einen Satz auszusprechen und zu beweisen, der als die weiteste Verallgemeinerung der Sätze 36, 40 und 52 anzusehen ist und der zugleich, wie mir scheint, das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste im Körper k auf die einfachste und vollständigste Weise zum Ausdruck bringt. Dieser Satz lautet:

Satz 60. *Wenn ν, μ beliebige ganze Zahlen $\neq 0$ in k sind, so ist stets*

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

wo das Product über sämmtliche Primideale $\mathfrak{w}$ in k erstreckt werden soll.

Zum Beweise dieses Satzes gelangen wir durch eine entsprechende Schlussweise, wie sie zum Beweise des Satzes 52 angewandt worden ist.

Wir heben endlich noch eine besondere Folgerung des Satzes 60 hervor.

Satz 61. *Es seien $\mathfrak{l}_1 (= \mathfrak{l}), \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_s$ die in 2 aufgehenden Primideale des Körpers k, und λ bedeute eine ganze Zahl in k derart, dass das Ideal (λ) die h^{te} Potenz von $\mathfrak{l}$ wird; ferner sei $\mathfrak{p}$ ein zu 2 primes Primideal und π eine ganze Zahl in k, so dass $(\pi) = \mathfrak{p}^h$ ausfällt: dann gilt die Gleichung*

$$\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\lambda, \pi}{\mathfrak{l}_1}\right)\left(\frac{\lambda, \pi}{\mathfrak{l}_2}\right)\cdots\left(\frac{\lambda, \pi}{\mathfrak{l}_s}\right).$$

Zum Beweise des Satzes 61 setze man in 60 $\nu = \lambda$, $\mu = \pi$ ein.

Der Satz 61 heisse der *zweite Ergänzungssatz zum allgemeinen Reciprocitätsgesetze für die quadratischen Reste im Körper k.*

§ 40.

Die Anzahl der Normenreste nach einem in 2 aufgehenden Primideal.

Es gelingt jetzt, die Aussagen des Satzes 15 auf die Primfactoren der Zahl 2 auszudehnen. Wir sprechen den folgenden Satz aus:

Satz 62. *Es sei $\mathfrak{l}$ ein Primfactor von 2 und zwar gehe $\mathfrak{l}$ genau zur l^{ten} Potenz in 2 auf: wenn dann die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nicht durch $\mathfrak{l}$ theilbar ist, so ist jede zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl ν in k Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{l}$.*

Wenn dagegen die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ den Factor $\mathfrak{l}$ enthält und L einen beliebigen Exponenten grösser als $2l$ bedeutet, so sind von allen vorhandenen zu $\mathfrak{l}$ primen und nach $\mathfrak{l}^L$ incongruenten Zahlen ν in k genau die Hälfte Normenreste des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{l}$.

Beweis. Wenn $\mathfrak{l}$ nicht in der Relativdiscriminante von $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, so können wir mit Rücksicht auf Satz 4 und 6 annehmen, dass μ congruent dem Quadrat einer ganzen zu $\mathfrak{l}$ primen Zahl nach $\mathfrak{l}^{2l}$ ausfällt. Eine gemäss Definition 17 zu μ bestimmte Zahl μ^* wird dann congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 und folglich erhalten wir nach Satz 36 $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ und mithin nach

Satz 50 auch $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$; damit ist die erste Aussage des Satzes 62 als richtig erkannt.

Um die zweite Aussage des Satzes 62 zu beweisen, nehmen wir zunächst μ prim zu 2 an; es sei μ^* eine gemäss Definition 17 zu μ bestimmte ganze Zahl in k. Wir haben in Satz 29 gewisse $\frac{m}{2}$ Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}}$ aufgestellt und aus diesen gewisse ganze Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\frac{m}{2}}$ abgeleitet, so dass dann nach diesem Satze jede zu 2 prime ganze Zahl des Körpers k nach dem Modul 2^2 in der dort angegebenen Gestalt darstellbar ist; wir setzen somit insbesondere

$$\mu^* \equiv \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \beta^2, \qquad (2^2),$$

worin die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ gewisse Werthe 0, 1 haben und β eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet.

Wir unterscheiden im Folgenden zwei Fälle, je nachdem die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ sämmtlich gleich 0 sind oder mindestens einer dieser Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ von 0 verschieden ausfällt. Im ersten Falle können die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}$ nicht ebenfalls sämmtlich verschwinden, da sonst $\mu^* \equiv \mu \equiv \beta^2$ nach dem Modul $\mathfrak{l}^{2l}$ und mithin der Voraussetzung entgegen die Relativdiscriminante von $K(\sqrt{\mu})$ prim zu $\mathfrak{l}$ wäre. Ist also etwa $u_i = 1$, so wird mit Berücksichtigung der Sätze 50 und 36

$$\left(\frac{\varkappa_i, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varkappa_i, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varkappa_i, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) = -1.$$

Im zweiten Falle sei etwa $v_i = 1$; dann schliessen wir auf die nämliche Weise

$$\left(\frac{\varepsilon_i, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_i, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varepsilon_i, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) = -1.$$

Nehmen wir im ersten Falle $\nu = \varkappa_i$, im zweiten $\nu = \varepsilon_i$, so ist gezeigt, dass es im Körper k stets eine Zahl ν giebt, welche Normennichtrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{l}$ wird.

Wegen $L > 2l$ sind nach Satz 47 zwei nach $\mathfrak{l}^L$ congruente zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahlen in k stets gleichzeitig Normenreste oder Normennichtreste nach $\mathfrak{l}$. Wir bezeichnen nun mit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ ein System ganzer Zahlen in k von folgender Beschaffenheit: die Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_s$ sollen nach $\mathfrak{l}^L$ unter einander incongruente und zu $\mathfrak{l}$ prime Normenreste

nach $\mathfrak{l}$ sein; endlich soll jede zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl, welche Normenrest nach $\mathfrak{l}$ ist, einer jener Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_s$ nach $\mathfrak{l}^L$ congruent sein. Ist nun ν ein zu $\mathfrak{l}$ primer Normennichtrest nach $\mathfrak{l}$, so sind die Zahlen $\nu\nu_1, \nu\nu_2, \ldots, \nu\nu_s$ wegen der zweiten Formel in Satz 51 sämmtlich Normennichtreste nach $\mathfrak{l}$ und wir können leicht zeigen, dass jeder beliebige zu $\mathfrak{l}$ prime Normennichtrest nach $\mathfrak{l}$ einer dieser s Zahlen nach $\mathfrak{l}^L$ congruent ausfällt. In der That bestimmen wir eine ganze Zahl ν^*, so dass $\nu\nu^* \equiv 1$ nach $\mathfrak{l}^L$ ausfällt, so folgt wegen $L > 2l$ mit Rücksicht auf Satz 47 die Gleichung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\nu^*, \mu}{\mathfrak{l}}\right) = -1;$$

es ist folglich auch ν^* Normennichtrest nach $\mathfrak{l}$. Bedeutet nun ν' irgend einen beliebigen Normennichtrest nach $\mathfrak{l}$, so ist $\nu'\nu^*$ Normenrest nach $\mathfrak{l}$ und folglich einer der Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_s$ nach $\mathfrak{l}^L$ congruent; es sei etwa $\nu'\nu^* \equiv \nu_i$ nach $\mathfrak{l}^L$; dann ist $\nu\nu'\nu^* \equiv \nu' \equiv \nu\nu_i$ nach $\mathfrak{l}^L$.

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit der zweiten Aussage des Satzes 62 für den Fall, dass μ zu 2 prim ist. Der vollständige Nachweis dieser zweiten Aussage gelingt leicht durch ein ähnliches Schlussverfahren unter Heranziehung von Satz 56.

Die in den beiden Sätzen 15 und 62 ausgesprochene Thatsache entspricht gewissermassen dem bekannten Satze über die Verzweigungspunkte einer Riemann'schen Fläche, wonach eine algebraische Function in der Umgebung eines einfachen Verzweigungspunktes den Vollwinkel auf die Hälfte desselben conform abbildet. Infolgedessen nenne ich die in der Relativdiscriminante von $K(\sqrt{\mu})$ aufgehenden Primideale $\mathfrak{d}$ des Körpers k auch *Verzweigungsideale* für den Körper $K(\sqrt{\mu})$. Die Verzweigungsideale sind die Quadrate oder die Relativnormen der ambigen Primideale des Körpers $K(\sqrt{\mu})$.

§ 41.

Beweis des Fundamentalsatzes über die Geschlechter in einem beliebigen relativquadratischen Körper.

In § 17—§ 19, sowie in § 29 hatten wir die vorläufige Annahme gemacht, dass die Relativdiscriminante des zu untersuchenden Körpers K zu 2 prim ausfällt. Da wir erkannt haben, dass alle wesentlichen Eigenschaften des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ auch für die in 2 enthaltenen Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k gültig sind, so kann nunmehr jene vorläufige Annahme beseitigt werden.

Wir bezeichnen wie bisher mit $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$ die von einander verschiedenen Primfactoren der Zahl 2 und setzen

$$2 = \mathfrak{l}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s}.$$

Zunächst lassen sich die Definitionen 11 und 12 der Begriffe „Charakteren-

system“ und „Geschlecht“ unmittelbar auf den Fall ausdehnen, dass die Relativdiscriminante von K Factoren aus der Reihe der Primideale $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$ enthält; wir haben hierbei nur die Bemerkung am Schluss des § 38 zu berücksichtigen.

Desgleichen können wir die Beweise der Sätze 24, 25, 26 sofort auf den gegenwärtigen allgemeinen Fall übertragen, und es gilt demnach insbesondere auch der Satz 26 für jeden beliebigen relativquadratischen Körper $K(\sqrt{\mu})$.

Endlich entsteht die Aufgabe, den fundamentalen Satz 41 auch in dem Falle zu beweisen, dass die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ Primfactoren der Zahl 2 enthält. Um diesen Beweis zu entwickeln, behalten wir die in § 29 festgesetzten Bezeichnungen bei; es ist hierbei nur zu beachten, dass im gegenwärtigen Falle unter den Primidealen $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_t$ auch solche vorkommen, die in der Zahl 2 aufgehen.

Es seien $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_{s^*}$ diejenigen Primfactoren von 2, die unter den r Idealen $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r$ vorkommen; wir setzen etwa

$$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{b}_{r-s^*+1}, \ldots, \mathfrak{l}_{s^*} = \mathfrak{b}_r,$$

so dass die $r - s^*$ Primideale $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{r-s^*}$ zu 2 prim sind. Es mögen nun $c_1, \ldots, c_r$ irgend beliebige r der Bedingung $c_1 \ldots c_r = +1$ genügende Einheiten ± 1 sein. Wegen Satz 62 kann man gewiss s^* ganze zu 2 prime Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_{s^*}$ finden, so dass

$$\left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = c_{r-s^*+1}, \ldots, \left(\frac{\nu_{s^*}, \mu}{\mathfrak{l}_{s^*}}\right) = c_r$$

wird. Bestimmen wir nun eine ganze Zahl ν derart, dass

$$\begin{aligned}
&\nu \equiv \nu_1, && (\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\nu \equiv \nu_{s^*}, && (\mathfrak{l}_{s^*}^{2l_{s^*}+1}),\\
&\nu \equiv 1, && (\mathfrak{l}_{s^*+1}^{2l_{s^*+1}+1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\nu \equiv 1, && (\mathfrak{l}_s^{2l_s+1})
\end{aligned}$$

ausfällt, so genügt ν nach Satz 56 den Bedingungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = c_{r-s^*+1}, \ldots, \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_{s^*}}\right) = c_r, \\ \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_{s^*+1}}\right) = +1, \quad \ldots, \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_s}\right) = +1. \end{cases}$$

Nunmehr bezeichnen wir mit $\mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_{r^*}$ diejenigen unter den $t - r$ Primidealen $\mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_t$, die zu 2 prim sind und bestimmen dann ein Primideal $\mathfrak{p}$, für welches bei Benutzung der Bezeichnungen von § 31 die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\nu}\right), \cdots, \left(\frac{\varepsilon_m^{\frac{e_m}{2}}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_m^{\frac{e_m}{2}}}{\nu}\right), \\ \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\nu}\right), \cdots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\lambda_s}{\nu}\right), \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\delta_1}{\mathfrak{p}}\right) = c_1 \left(\frac{\nu}{\mathfrak{b}_1}\right) \left(\frac{\delta_1}{\nu}\right), \cdots, \left(\frac{\delta_{r-s^*}}{\mathfrak{p}}\right) = c_{r-s^*} \left(\frac{\nu}{\mathfrak{b}_{r-s^*}}\right) \left(\frac{\delta_{r-s^*}}{\nu}\right), \\ \left(\frac{\delta_{r+1}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{b}_{r+1}}\right) \left(\frac{\delta_{r+1}}{\nu}\right), \cdots, \left(\frac{\delta_{t^*}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{b}_{t^*}}\right) \left(\frac{\delta_{t^*}}{\nu}\right) \end{cases}$$

gelten. Wegen (2) lässt sich nach Satz 43 eine ganze Zahl π bestimmen, so dass $(\pi) = \mathfrak{p}^h$ und überdies die Zahl $\pi\nu$ congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ wird. Infolgedessen schliessen wir aus Satz 56 mit Rücksicht auf (1)

$$(4)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = c_{r-s^*+1}, \cdots, \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{l}_{s^*}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_{s^*}}\right) = c_r, \\ \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{l}_{s^*+1}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_{s^*+1}}\right) = +1, \quad \cdots, \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{l}_s}\right) = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_s}\right) = +1. \end{cases}$$

Andererseits folgt aus Satz 40, wenn wir die erste Formel des Satzes 14 berücksichtigen,

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\pi\nu, \delta_i}{\mathfrak{w}}\right) = +1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r - s^*, r+1, \ldots, t^*)$$

und wegen (3) haben wir daher

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_i}\right) \left(\frac{\nu}{\mathfrak{b}_i}\right) \left(\frac{\delta_i}{\mathfrak{p}}\right) \left(\frac{\delta_i}{\nu}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_i}\right) c_i = +1, \quad (i = 1, 2, \ldots, r - s^*),$$

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_i}\right) \left(\frac{\nu}{\mathfrak{b}_i}\right) \left(\frac{\delta_i}{\mathfrak{p}}\right) \left(\frac{\delta_i}{\nu}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_i}\right) = +1, \quad (i = r+1, \ldots, t^*),$$

d. h. es gelten die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_i}\right) = \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{b}_i}\right) = c_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r - s^*), \\ \left(\frac{\pi}{\mathfrak{b}_i}\right) = \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{b}_i}\right) = +1, \quad (i = r+1, \ldots, t^*). \end{cases}$$

Da $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{r-s^*}, \mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_{t^*}$ die sämmtlichen zu 2 primen Theiler der Relativdiscriminante von $K(\sqrt{\mu})$ sind, so können wir

$$\mu^h = \gamma\alpha^2 \delta_1 \ldots \delta_{r-s^*} \delta_{r+1} \ldots \delta_{t^*}$$

setzen, wo γ eine ganze Zahl in k ist, deren Primfactoren sämmtlich in 2 aufgehen, und wo α irgend eine bestimmte ganze Zahl in k bedeutet. Nach Satz 60 ist

$$\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\pi,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\pi,\mu}{\mathfrak{b}_1}\right)\cdots\left(\frac{\pi,\mu}{\mathfrak{b}_{r-s^*}}\right)\left(\frac{\pi,\mu}{\mathfrak{b}_{r+1}}\right)\cdots\left(\frac{\pi,\mu}{\mathfrak{b}_{t^*}}\right)\left(\frac{\pi,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\cdots\left(\frac{\pi,\mu}{\mathfrak{l}_s}\right)=+1$$

und folglich erhalten wir wegen (4), (5)

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)c_1\cdots c_r=+1;$$

da nun $c_1\cdots c_r=+1$ angenommen worden ist, so ergiebt sich auch $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)=+1$, d. h. $\mathfrak{p}$ zerfällt in $K(\sqrt{\mu})$ in zwei Primfactoren. Mit Rücksicht auf (4), (5) haben die Charaktere eines jeden dieser Primfactoren die Werthe

$$\left(\frac{\pi,\mu}{\mathfrak{b}_1}\right)=c_1,\ \cdots,\ \left(\frac{\pi,\mu}{\mathfrak{b}_r}\right)=c_r.$$

Hieraus schliessen wir genau wie bei dem in § 29 entwickelten Beweise die Richtigkeit des Satzes 41 im allgemeinsten Falle.

Wir haben damit die wichtige Frage nach der Anzahl der Geschlechter in einem beliebigen relativquadratischen Körper $K(\sqrt{\mu})$ vollständig erledigt.

§ 42.

Die Classen des Hauptgeschlechtes.

Wir heben in diesem und in den folgenden Paragraphen einige Folgerungen hervor, die sich aus dem Satze 41 ergeben.

Satz 63. Die Anzahl g der Geschlechter in einem relativquadratischen Körper ist gleich der Anzahl A seiner ambigen Complexe.

Beweis. Wenn t und v die Bedeutung wie in Satz 23 haben und wenn wir berücksichtigen, dass nach Satz 41 $g=2^{r-1}$ ist, so folgt aus den Sätzen 23 und 25

$$r\leqq t+v-\frac{m}{2}$$

und da andererseits nach Satz 24

$$t+v-\frac{m}{2}\leqq r$$

sein muss, so erhalten wir

$$r=t+v-\frac{m}{2};$$

nach Satz 23 ist mithin die Anzahl der ambigen Complexe

$$\mathrm{A}=2^a=2^{r-1}=g.$$

Satz 64. *Jeder Complex des Hauptgeschlechtes in einem relativquadratischen Körper K ist das Quadrat eines Complexes in K, d. h. jede Classe des Hauptgeschlechtes in einem relativquadratischen Körper K ist gleich dem Product aus dem Quadrat einer Classe und aus einer solchen Classe, welche Ideale des Grundkörpers k enthält.*

Beweis. In dem Beweise zu Satz 25 ist die Gleichung $Af' = gf$ abgeleitet worden; hierbei haben A und g die Bedeutung wie in Satz 63; ferner bedeutet f' die Anzahl derjenigen Complexe, welche gleich Quadraten von Complexen sind und f die Anzahl der Complexe des Hauptgeschlechtes. Da nach Satz 63 $A = g$ ist, so folgt $f' = f$ und damit ist bewiesen, dass jeder Complex des Hauptgeschlechtes das Quadrat eines Complexes ist.

§ 43.

Der Satz von den Relativnormen eines relativquadratischen Körpers.

Satz 65. *Wenn ν, μ irgend zwei beliebige ganze Zahlen $\neq 0$ des Körpers k bedeuten, von denen μ nicht das Quadrat einer Zahl in k ist, und welche für jedes Primideal $\mathfrak{w}$ in k die Bedingung*

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

erfüllen, so ist die Zahl ν stets gleich der Relativnorm einer ganzen oder gebrochenen Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$.

Beweis. Wir beweisen diesen Satz zunächst für den Fall, dass ν eine Einheit in k ist. Es mögen t und v die Bedeutung wie in Satz 23 haben; im Beweise zu Satz 63 ist gezeigt worden, dass $r = t + v - \frac{m}{2}$ sein muss: d. h. es ist $v = \frac{m}{2} - t + r$. Die Anzahl der Einheitenverbände in k, soweit sie aus Einheiten, die Relativnormen sind, entspringen, beträgt also $2^{\frac{m}{2}-t+r}$.

Andererseits betrachten wir die $r^* = t - r$ Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r^*}$, die in § 17 bestimmt worden sind. Aus den Gleichungen (1) in § 17 erkennen wir leicht, dass die r^* aus $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r^*}$ entspringenden Einheitenverbände von einander unabhängig sind. Es müssen sich daher $\frac{m}{2} - r^*$ solche Einheitenverbände finden lassen, die mit jenen zusammen ein System von $\frac{m}{2}$ unabhängigen Einheitenverbänden bilden. Sind $\varepsilon_{r^*+1}, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}$ Einheiten bez. aus diesen $\frac{m}{2} - r^*$ Einheitenverbänden, so lässt sich offenbar jede beliebige Einheit ξ des Körpers k in der Gestalt

$$\xi = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u_{\frac{m}{2}}} \varepsilon^2$$

darstellen, wo $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}}$ gewisse Exponenten 0, 1 und ε eine geeignete Einheit in k bedeutet. Betrachtet man nun die r^* Gleichungen

$$(1) \qquad \left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{b}_t}\right) = +1, \left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{b}_{t-1}}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{b}_{t-r^*+1}}\right) = +1$$

so liefern sie für die Exponenten $u_1, u_2, \ldots, u_{\frac{m}{2}}$ gewisse r^* lineare Congruenzen nach dem Modul 2, die, wie man leicht erkennt, von einander unabhängig sind; es folgt somit, dass alle diejenigen Einheiten ξ, die den Bedingungen (1) genügen, insgesammt

$$2^{\frac{m}{2}-r^*} = 2^{\frac{m}{2}-t+r}$$

Einheitenverbände ausmachen.

Wir haben zu Beginn dieses Beweises festgestellt, dass die Anzahl der Einheitenverbände, soweit sie aus Einheiten, die Relativnormen sind, entspringen, in gleicher Anzahl vorhanden sind. Da ferner jede Einheit in k, welche die Relativnorm einer Einheit oder einer gebrochenen Zahl von $K(\sqrt{\mu})$ ist, offenbar Normenrest nach 1 sein und daher nothwendig den Gleichungen (1) genügen muss, so ist jeder Verband der zu Anfang behandelten Einheiten auch unter den Verbänden enthalten, deren Einheiten ξ den Gleichungen (1) genügen; da die Anzahlen beider Systeme von Einheitenverbänden die gleiche ist, so sind die beiden Systeme mit einander identisch. Die vorgelegte Einheit ν genügt nach Voraussetzung den Bedingungen (1) und ist mithin nach dem eben Bewiesenen die Relativnorm einer Einheit oder einer gebrochenen Zahl in $K(\sqrt{\mu})$.

Es sei jetzt ν eine beliebige Zahl in $K(\sqrt{\mu})$, welche die Voraussetzung des Satzes 65 erfüllt. Sind dann $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ die höchsten in ν aufgehenden Potenzen von Primidealen des Körpers k, so muss es wegen der Voraussetzung des Satzes 65 gewiss ganze Zahlen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots$ in $K(\sqrt{\mu})$ geben von der Art, dass die Congruenzen gelten

$$\begin{aligned} \nu &\equiv N(\mathsf{A}_1), \qquad (\mathfrak{n}_1^2), \\ \nu &\equiv N(\mathsf{A}_2), \qquad (\mathfrak{n}_2^2), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Bezeichnet also A eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ die congruent A_1 nach $\mathfrak{n}_1^2$, congruent A_2 nach $\mathfrak{n}_2^2$, u. s. f. ausfällt, so erhalten wir

$$\nu \equiv N(\mathsf{A}), \qquad (\nu^2). \tag{2}$$

Betrachten wir nun in $K(\sqrt{\mu})$ das Ideal

$$\mathfrak{H} = (\nu, \mathsf{A}),$$

so ergiebt sich wegen (2)

$$\mathfrak{H} \cdot S\mathfrak{H} = (\nu, \mathsf{A})\,(\nu, S\mathsf{A}) = (\nu^2, \nu\mathsf{A}, \nu S\mathsf{A}, \mathsf{A}S\mathsf{A}) = (\nu)$$

und hieraus folgt, dass ν die Relativnorm des Ideals $\mathfrak{H}$ in $K(\sqrt{\mu})$ sein muss.

Wegen der Voraussetzung des Satzes 65 gehört $\mathfrak{H}$ nothwendig

dem Hauptgeschlecht von $K(\sqrt{\mu})$ an und wir können daher nach Satz 64

$$\mathfrak{H} \sim \mathfrak{j}\mathfrak{J}^2$$

setzen in solcher Weise, dass $\mathfrak{j}$ ein Ideal in k und $\mathfrak{J}$ ein Ideal in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet. Wegen $\mathfrak{j}^h \sim 1$ muss $\mathsf{B} = \left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{J}^2}\right)^h$ eine ganze oder gebrochene Zahl des Körpers K sein; die Relativnorm $N(\mathsf{B})$ dieser Zahl ist offenbar von der Gestalt $\frac{\varepsilon \nu^h}{\alpha^2}$, wo ε eine Einheit in k und α eine ganze Zahl in k bedeutet. Aus der letzten Gleichung folgt, dass für jedes beliebige Primideal $\mathfrak{w}$ nothwendig $\left(\frac{\varepsilon \nu^h \alpha^2, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$ und daher auch $\left(\frac{\varepsilon, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$ sein muss. Es ist nun im ersten Theil des gegenwärtigen Beweises gezeigt worden, dass unter diesen Umständen ε stets gleich der Relativnorm einer Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ sein muss; wir setzen $\varepsilon = N(\Gamma)$, wo Γ eine Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ ist. Es folgt dann

$$\nu = N\left(\frac{\mathsf{B} \cdot \alpha}{\Gamma \cdot \nu^{\frac{h-1}{2}}}\right),$$

und hiermit ist der Beweis für Satz 65 vollständig erbracht.

§ 44.

Die ternäre quadratische Diophantische Gleichung im Körper k.

Den Inhalt des Satzes 65 können wir auch auf folgende Weisen aussprechen:

Satz 66. Wenn ν, μ beliebige ganze Zahlen $\neq 0$ in k bedeuten, so ist die Diophantische Gleichung

$$\nu\xi^2 + \mu\eta^2 = 1$$

in ganzen oder gebrochenen Zahlen ξ, η des Körpers k stets dann lösbar, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{w}$ in k die Bedingung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1$$

erfüllt ist.

Satz 67. *Wenn ν, μ irgend zwei beliebige ganze Zahlen des Körpers k bedeuten, so ist die Diophantische Gleichung*

$$\nu\xi^2 + \mu\eta^2 = 1$$

in ganzen oder gebrochenen Zahlen ξ, η des Körpers k stets dann lösbar, wenn die Congruenz

$$\nu\xi^2 + \mu\eta^2 \equiv 1$$

nach jedem Primideal des Körpers k und nach jeder Potenz eines solchen in ganzen Zahlen ξ, η des Körpers k lösbar ist.

Beweis. Falls μ das Quadrat einer ganzen Zahl in k ist, wird jener Diophantischen Gleichung durch $\xi = 0$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ genügt. Es sei nun μ nicht das Quadrat einer ganzen Zahl in k. Es sei ferner $\mathfrak{w}$ ein Primideal in k und $\mathfrak{w}^L$ eine beliebige Potenz von $\mathfrak{w}$; endlich seien ξ, η ganze Zahlen in k, die der im Satze 67 aufgestellten Congruenz nach $\mathfrak{w}^L$ genügen. Da offenbar ξ, η nicht beide zugleich durch $\mathfrak{w}$ theilbar sein können, so dürfen wir annehmen, dass etwa ξ zu $\mathfrak{w}$ prim ausfiele: dann ist wegen

$$\nu \equiv N\left(\frac{1+\eta\sqrt{\mu}}{\xi}\right), \quad (\mathfrak{w}^L)$$

die Zahl ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$ und folglich erfüllen die Zahlen ν, μ die Bedingungen des Satzes 65. Nach diesem Satze 65 ist daher ν die Relativnorm einer gewissen Zahl A des Körpers $K(\sqrt{\mu})$; setzen wir $A = \frac{\alpha+\beta\sqrt{\mu}}{\gamma}$, wo α, β, γ ganze Zahlen in k sind, so folgt

$$\nu = \frac{\alpha^2 - \mu\beta^2}{\gamma^2}$$

und mithin erfüllen die Zahlen $\xi = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\eta = \frac{\beta}{\alpha}$ die vorgelegte Gleichung. Damit ist der Satz 67 bewiesen.

Ist irgend eine ternäre homogene quadratische Diophantische Gleichung mit beliebigen in k liegenden Coefficienten vorgelegt, so entsteht die Frage nach den Bedingungen, unter denen diese Gleichung durch geeignete ganze Zahlen des Körpers k gelöst werden kann. Auch diese Frage findet, wie leicht zu sehen, auf Grund der Sätze 66 und 67 ihre vollständige Beantwortung.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Allgemeine Definitionen und vorbereitende Sätze.

§ 1. Quadratische Reste und Nichtreste im Grundkörper k und das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ 2

§ 2. Die Begriffe Relativnorm, Relativdifferente und Relativdiscriminante . 4

§ 3. Das ambige Ideal 5

§ 4. Die Primfactoren der Relativdiscriminante 5

§ 5. Die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers k im relativquadratischen Körper K 8

§ 6. Das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ 10

§ 7. Normenreste und Normennichtreste des Körpers K und das Symbol $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ 12

§ 8. Eigenschaften des Symbols $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ 12

Se

§ 9. Die allgemeinen Grundformeln für das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ . . . . . .

§ 10. Die Anzahl der Normenreste nach einem nicht in 2 aufgehenden Primideal . . . . . .

§ 11. Die Einheitenverbände des Körpers k . . . . . .

§ 12. Die Complexe des relativquadratischen Körpers K . . . . . .

§ 13. Primideale des Körpers k mit vorgeschriebenen quadratischen Charakteren . . . . . .

II. Die Theorie der relativquadratischen Körper für einen Grundkörp mit lauter imaginären Conjugirten und von ungerader Classenzahl.

§ 14. Die relativen Grundeinheiten des Körpers K . . . . . .

§ 15. Die Anzahl der aus ambigen Idealen entspringenden ambigen Complexe in K . . . . . .

§ 16. Die Anzahl aller ambigen Complexe in K . . . . . .

§ 17. Das Charakterensystem einer Zahl und eines Ideals im Körper K . .

§ 18. Der Begriff des Geschlechtes . . . . . .

§ 19. Obere Grenze für die Anzahl der Geschlechter in K . . . . . .

§ 20. Das primäre Primideal $\mathfrak{p}$ und das Symbol $\left(\frac{i}{\mathfrak{p}}\right)$ . . . . . .

§ 21. Ein System von $\frac{m}{2}$ nichtprimären Primidealen des Körpers k . . . .

§ 22. Die unendliche Reihe $\sum_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}}\right) \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s}$ . . . . . .

§ 23. Eine Eigenschaft primärer Primideale . . . . . .

§ 24. Zwei besondere Fälle des Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste im Körper k . . . . . .

§ 25. Das Product $\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für ein zu 2 primes ν und bei gewissen Annahmen über μ . . . . . .

§ 26. Das primäre Ideal und seine Eigenschaften . . . . . .

§ 27. Beispiele für die Sätze 32, 33, 38, 39 . . . . . .

§ 28. Das Product $\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für ein beliebiges ν und bei gewissen Annahmen über μ . . . . . .

§ 29. Der Fundamentalsatz über die Anzahl der Geschlechter in einem relativquadratischen Körper . . . . . .

§ 30. Ein gewisses System von $\frac{m}{2} + z$ zu 2 primen Primidealen des Körpers k

§ 31. Eine Eigenschaft gewisser besonderer Ideale des Körpers k . . . . .

§ 32. Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ für irgend welche zu 2 primen Zahlen ν, μ . . .

§ 33. Die Uebereinstimmung der beiden Symbole $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ und $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ für irgend welche zu 2 prime Zahlen ν, μ . . . . . .

§ 34. Die Eigenschaften des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ für irgend welche zu 2 prime ganze Zahlen ν, μ 1

§ 35. Das Product $\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für irgend welche zu 2 prime Zahlen ν, μ . . 1

Seite

§ 36. Der erste Ergänzungssatz und das allgemeine Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste 108

§ 37. Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ für beliebige ganze Zahlen ν, μ 108

§ 38. Die Uebereinstimmung der beiden Symbole $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)$ und $\left(\frac{\nu, \mu}{\overline{\mathfrak{l}}}\right)$ für beliebige ganze Zahlen ν, μ 109

§ 39. Das Product $\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für beliebige ganze Zahlen ν, μ 115

§ 40. Die Anzahl der Normenreste nach einem in 2 aufgehenden Primideal 116

§ 41. Beweis des Fundamentalsatzes über die Geschlechter in einem beliebigen relativquadratischen Körper 118

§ 42. Die Classen des Hauptgeschlechtes 121

§ 43. Der Satz von den Relativnormen der Zahlen eines relativquadratischen Körpers 122

§ 44. Die ternäre quadratische Diophantische Gleichung im Körper k . . . 124

	Seite		Seite		Seite		Seite
Satz 1	3	Satz 18. . . .	26	Satz 35. . . .	65	Satz 52. . . .	106
— 2	3	— 19. . . .	27	— 36. . . .	66	— 53. . . .	108
— 3	5	— 20. . . .	30	— 37. . . .	72	— 54. . . .	108
— 4	5	— 21. . . .	31	— 38. . . .	73	— 55. . . .	109
— 5	8	— 22. . . .	31	— 39. . . .	74	— 56. . . .	109
— 6	8	— 23. . . .	39	— 40. . . .	84	— 57. . . .	110
— 7	8	— 24. . . .	45	— 41. . . .	85	— 58. . . .	114
— 8	9	— 25. . . .	47	— 42. . . .	87	— 59. . . .	115
— 9	12	— 26. . . .	48	— 43. . . .	91	— 60. . . .	116
— 10	13	— 27. . . .	49	— 44. . . .	92	— 61. . . .	116
— 11	15	— 28. . . .	49	— 45. . . .	94	— 62. . . .	116
— 12	16	— 29. . . .	50	— 46. . . .	95	— 63. . . .	121
— 13	18	— 30. . . .	53	— 47. . . .	95	— 64. . . .	121
— 14	20	— 31. . . .	54	— 48. . . .	99	— 65. . . .	122
— 15	20	— 32. . . .	60	— 49. . . .	104	— 66. . . .	124
— 16	23	— 33. . . .	64	— 50. . . .	105	— 67. . . .	124
— 17	25	— 34. . . .	65	— 51. . . .	105		

	Seite		Seite		Seite
Definition 1.	2	Definition 7	21	Definition 13	48
— 2.	4	— 8	22	— 14	48
— 3.	5	— 9	22	— 15	65
— 4.	10	— 10	30	— 16	73
— 5.	11	— 11	42	— 17	93
— 6.	12	— 12	44	— 18	108

Ueber den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken.*)

Von

Felix Klein in Göttingen.

Zu den Verpflichtungen, welche unsere Gesellschaft seit langer Zeit übernommen hat, gehört die Herausgabe von Gauss' gesammelten Werken, insbesondere die Bearbeitung seines Nachlasses. Das Unternehmen ging anfangs ziemlich rasch von statten und es ist bereits über 20 Jahre her, dass Ernst Schering, der mit der Herausgabe betraut war, die sechs ersten Bände der Oeffentlichkeit übergeben konnte; dieselben sind längst überall hin verbreitet, wo irgend es mathematische Interessen giebt, und haben immer nach Inhalt und Form als mustergültig gegolten. Dann aber haben widrige Umstände die Vollendung des Unternehmens gehemmt, so dass wir heute, wo Schering nicht mehr unter uns weilt, nach aussen hin nicht weiter vorwärts gekommen sind, als damals. Es ist dies um so mehr zu bedauern, als mit dem Hinscheiden von Schering der Faden der persönlichen Tradition abgerissen ist, der uns mit Gauss verband, auch nie wieder ein Mathematiker dazu kommen wird, sich mit solcher Ausschliesslichkeit und Vielseitigkeit in den Gauss'schen Nachlass einzuarbeiten, wie Schering dies gethan hatte. Die hierdurch gegebene Unterbrechung der Continuität wird nur dadurch gemildert, dass Frau Schering nicht gezögert hat, uns die zahlreichen Aufzeichnungen und Vorarbeiten ihres Mannes zu unbeschränkter Einsichtnahme zur Verfügung zu stellen; ich meine im Namen der Gesellschaft zu handeln, wenn ich ihr hierfür bei der heutigen Gelegenheit den besten Dank öffentlich ausspreche. Im Uebrigen ist klar, dass wir jetzt, nach so langer Zeit, die Erledigung der Aufgabe in neue Wege leiten mussten, nämlich so, dass wir nicht einen einzelnen Gelehrten mit der Durch-

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mittheilungen, 1898, Heft I. (Oeffentliche Sitzung vom 30. April 1898.)

führung derselben betrauten, sondern für die verschiedenen Gebiete, auf denen Gauss gearbeitet, verschiedene, von Haus aus besonders vorbereitete Kräfte zu gewinnen suchten. Ich darf vorweg bemerken, dass dies in erfreulicher Weise gelungen ist, dass die Arbeit von allen Seiten begonnen hat und, getragen von der Hingabe und der Sachkenntniss der einzelnen Herren, gedeihlich fortschreitet, so dass wir hoffen dürfen, soweit dies unter den jetzt veränderten Verhältnissen überhaupt noch möglich ist, in absehbarer Zeit zu einem befriedigenden Abschluss zu kommen.

Hier die Namen unserer Mitarbeiter mit einigen Bemerkungen über die von ihnen übernommenen Gebiete.

Ich habe zunächst unseren neu berufenen theoretischen Astronomen, Prof. Brendel zu nennen. Auf ihn fällt selbstverständlich die Herausgabe der noch restirenden astronomischen Stücke, also der seit langer Zeit geplante endgültige Abdruck von Gauss' Theoria motus, sowie aus dem Nachlass die Bearbeitung der weitausgedehnten und nur erst mangelhaft bekannten Untersuchungen zur Störungsrechnung. Leider ist nicht sehr wahrscheinlich, dass das vorhandene Material gestatten wird, die dringenden Fragen, welche in dieser Hinsicht seit dem Bekanntwerden des Briefwechsels von Gauss und Bessel erhoben worden sind, endgültig zu beantworten. Immerhin aber hoffen wir dies zu erreichen, dass wir klar sehen, wie Gauss die Störungen der kleinen Planeten, zumal der durch die Neigung und Excentricität ihrer Bahn besonders interessanten Pallas, numerisch gerechnet hat. Daneben übernimmt Prof. Brendel die centralen Redactionsgeschäfte, also die Verwaltung des Nachlasses, den regelmässigen Verkehr mit den Mitarbeitern, weiterhin die Gesammtaufsicht über den Druck etc. Ich darf mit besonderem Danke anfügen, dass uns für diese Arbeiten seitens der Universitätsverwaltung ein besonderes Zimmer im Erdgeschosse des Curatorialgebäudes zur Verfügung gestellt worden ist.

Hierüber hinaus haben wir nun noch *fünf* weitere Mitarbeiter gewonnen, die ich hier in der Reihenfolge aufführen will, welche der bei den bisher erschienenen Bänden festgehaltenen Aufeinanderfolge der Disciplin entspricht.

Prof. Fricke in Braunschweig hat *Zahlentheorie* und *Analysis* übernommen. Diesen Gebieten sind von den bis jetzt edirten Bänden nicht weniger als drei zugewiesen; es kann sich dementsprechend bei ihnen nur mehr um wenig umfangreiche Ergänzungen handeln. Um Einzelnes zu nennen, so finden sich im Nachlasse ziemlich weitgehende Untersuchungen über cubische Reste, insbesondere aber noch interessante Einzelheiten zu Gauss' Theorie der elliptischen Functionen. Ich habe im vorigen Jahre gelegentlich als eine überraschende Thatsache erwähnt, dass Riemann nach einem uns damals zugekommenen Collegien-

hefte bereits 1857 die volle Kreisbogenfigur der elliptischen Modulfunctionen gekannt hat (Nachrichten der math.-phys. Classe 1897, p. 190). Jetzt erfahren wir aus dem Nachlasse, dass Gauss schon Decennien vorher bis zu demselben Resultate vorgedrungen war. Einen Ansatz hierzu konnte man bereits in einer Figur erkennen, welche auf p. 477 von Band III abgedruckt ist und die, richtig aufgefasst, ein erstes Dreieckspaar der Modultheilung vorstellt. Diese Figur aber bezeichnet nur den Anfang der betreffenden Untersuchungen; Gauss hat in der That auch die Anordnung der weiteren Dreieckspaare gekannt.

Es folgen die Untersuchungen über *Geometrie*, für welche Prof. Stäckel in Kiel gewonnen ist. Hier wendet sich das Interesse der heutigen Mathematiker in erster Linie den tiefeindringenden Speculationen von Gauss über die Fundamente der Geometrie zu, über welche lange Jahre hindurch der Schleier des Geheimnisses gebreitet war. Eine erste wichtige Aufklärung hierüber hat bereits die Publication der einschlägigen Stellen aus der Correspondenz von Gauss und W. Bolyai gebracht, welche Prof. Stäckel im vorigen Jahre in den Nachrichten unserer math.-phys. Classe (pag. 1 ff.) gegeben hat*). Bei der vorläufigen Durchsicht des Nachlasses hat sich hierzu vielleicht nichts besonders Ueberraschendes mehr ergeben, aber doch eine Reihe werthvoller Anhaltspunkte, durch welche man die Entwickelung von Gauss' Ideen sehr viel genauer festlegen kann, als bisher möglich war. Auch über die Entstehung der in den Disquisitiones circa superficies curvas auftretenden fundamentalen Conceptionen giebt der Nachlass werthvolle Aufschlüsse. Durchaus neu aber sind einige Einzelheiten, die sich auf die Geometrie der Kugel beziehen. Gauss hat bereits genau so, wie später Riemann, eine complexe Variable $z = x + iy$ auf der Kugel gedeutet und hat gewusst, dass sich die Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt durch lineare Substitutionen dieses z von bestimmter einfacher Bauart darstellen! Und, was noch überraschender scheinen kann, er hat die „Mutationen des Raumes" (wie er sagt), d. h. die Drehungen des Raumes um den Coordinatenanfangspunkt, verbunden mit einer beliebigen von letzterem auslaufenden Aehnlichkeitstransformation, bereits 1819 durch dieselben vier Parameter dargestellt, welche die spätere Quaternionentheorie benutzt; er bezeichnet den Inbegriff dieser vier Parameter als *Mutationsscala* und giebt die expliciten Formeln für die Zusammensetzung zweier Scalen (also die Multiplication zweier Quaternionen), wobei er die symbolische Schreibweise $(abcd).(\alpha\beta\gamma\delta) = (ABCD)$ benutzt und ausdrücklich

*) Vergl. auch den ausführlicheren Artikel von Stäckel und Engel in Bd. 49 der mathematischen Annalen (p. 149—206 daselbst).

emerkt, dass es sich dabei um einen nicht commutativen Process andelt! —

Mit den theoretischen Untersuchungen über Geometrie ist bei auss die practische Handhabung, *die ausführende Geodäsie*, untrennbar erbunden gewesen. Es giebt kein anderes Unternehmen, dem Gauss o viele Jahre consequenter Arbeit gewidmet hätte, als die *Landesermessung des Königreichs Hannover*. Nicht die Zahlenresultate dieser lessungen (bei denen Gauss vielfach mit ungenügenden Mitteln arbeitete), wohl aber die allgemeinen Methoden und Gesichtspunkte, die r bei Gelegenheit derselben entwickelte, sind für den Fortschritt der eodäsie grundlegend geworden. Indem uns die Herren Proff. Börsch nd Krüger vom geodätischen Centralinstitut in Potsdam für die hierit zusammenhängenden Theile des Gauss'schen Nachlasses ihre Mitrirkung zusicherten, dürfen wir erwarten noch manches Interessante u erfahren. Um eine Einzelheit anzuführen: es war bekannt, dass die ecklenburger Landesvermessung die ihr eigenthümliche conforme egelprojection entsprechend der Ausdehnung des Landes von Ost nach Vest auf Anrathen von Gauss eingeführt hatte. Jetzt finden sich im achlasse von Gauss die vollständigen hierbei in Betracht kommenden ormeln. Ebenso bemerkt man bestimmte Hinweisungen auf die conorme Doppelprojection, welche seit 25 Jahren in der K. preussischen andesaufnahme benutzt wird.

Es handelt sich endlich um Gauss' Untersuchungen über *mathematische Physik*. Die Sorge hierfür hat Prof. Wiechert dahier übernommen, der, wie Sie wissen, zum Director von Gauss' erdmagnetischem Observatorium ernannt wurde. Gauss' Arbeiten auf dem Gebiete des Erdmagnetismus sind bereits 1887 von Schering zum Gegenstande einer esonderen Festschrift gemacht worden; der Inhalt derselben wird jetzt n der einen oder anderen Form in die gesammelten Werke einzurbeiten sein. Die bezüglichen Arbeiten gipfeln, wie bekannt, in der urch Humboldt's Unterstützung ermöglichten Gründung eines die anze Erde umspannenden *magnetischen Vereines*. Wir mögen diese hat gewissermassen als vorbildlich betrachten für die Bestrebungen, elche unsere Gesellschaft neuerdings innerhalb des Academieencartells rfolgt. Hier und überall gehört Gauss' Thätigkeit, trotzdem sie ein albes Jahrhundert zurückliegt, nicht einer vergangenen Periode der Wissenschaft an, sondern steht in unmittelbarer Beziehung zu den Aufgaben der Gegenwart. —

Nun noch ein paar Worte über die äussere Form, in der wir den Abschluss der Gauss-Ausgabe zu bewerkstelligen hoffen. Es wird sich oraussichtlich noch um drei Bände und einen Supplementband handeln. Indem ich mit der Nummerirung der Bände an die sechs bereits publicirten anknüpfe, ergiebt sich folgendes Schema:

Bd. 7 wird ausschliesslich *Astronomie* enthalten und, kurz gesagt, alle diejenigen Astronomica bringen, welche in Bd. 6 noch keinen Platz gefunden haben.

Bd. 8 wird die *wissenschaftlichen Nachträge* zu den früheren Bänden enthalten, insbesondere der Reihe nach solche, die sich auf Zahlentheorie, Analysis, Geometrie und Geodäsie, endlich mathematische Physik beziehen.

Bd. 9 soll für das *biographische Material* bestimmt sein. Hier werden auch Mittheilungen allgemeiner Art aus Gauss' weit ausgedehnter wissenschaftlicher Correspondenz ihre Stelle finden können. Zugleich wird eine genaue Schilderung des geordneten Nachlasses zu geben sein, der nach vollendeter Bearbeitung, wie hier ausdrücklich mitgetheilt sei, zu allgemeiner Benutzung auf der Universitätsbibliothek deponirt werden soll.

Der *Supplementband* endlich wird ausführliche Register enthalten. — Kommt keine unvorhergesehene Störung dazwischen, so dürften wir in drei Jahren etwa mit der ganzen Arbeit zu Ende sein. Mittlerweile hoffen wir den Vertrieb der bisher erschienenen sechs Bände dadurch neu zu beleben, dass wir denselben einer leistungsfähigen Buchhandlung übertragen*).

Ich kann diesen Bericht nicht schliessen, ohne an alle Diejenigen, welche es angeht, eine Bitte zu richten. Es ist keineswegs so, dass in unserer Sammlung des Gauss'schen Nachlasses, so reichhaltig und überaus werthvoll dieselbe bereits ist, das *gesammte*, auf Gauss zurückgehende oder mit ihm zusammenhängende unter wissenschaftlichen Gesichtspunkten interessante Material bereits vereinigt wäre. Es ist uns durch die Bemühungen von Prof. Stäckel gelungen, letzthin einige wichtige Stücke neu zu erwerben oder zur Einsicht zu erhalten, so z. B. die Originalbriefe von Gauss an Schumacher (die in der bekannten Ausgabe nicht ganz vollständig abgedruckt sind), dann die Briefe von Gerling an Gauss (welche sich im Besitz der Gerling'schen Familie befinden, während die Briefe von Gauss an Gerling seit lange unserer Sammlung angehören). Mit besonderem Danke haben wir zu erwähnen, dass uns Herr Stäckel einen wichtigen Brief von Gauss an Taurinus, Excellenz Struve in Carlsruhe mehrere Briefe von Gauss an seinen Vater geschenkt hat. Es giebt aber ohne Zweifel noch eine Menge werthvollen, uns bisher nicht zugänglichen Materials. *Wir bitten alle Diejenigen, die im Besitz irgendwelcher auf Gauss zurückgehender oder für seine Thätigkeit wichtiger Manuscripte sein mögen,*

*) Die Verhandlungen haben inzwischen zu einem Abschluss mit der Teubner'schen Buchhandlung geführt. Danach werden die sechs ersten Bände unserer Gesammtausgabe nicht mehr wie bisher von der Göttinger Universitätscasse sondern nur noch von der Teubner'schen Buchhandlung bezogen werden können.

*Private oder Gesellschaften, uns hiervon benachrichtigen und uns die Kenntnissnahme der Belege ermöglichen zu wollen**).

*) Ich möchte diese Gelegenheit benutzen und die gleiche Bitte um Vervollständigung betreffs des auf der hiesigen Universitätsbibliothek deponirten Nachlasses von Riemann aussprechen. Wir haben im Jahre 1897 verschiedenes wichtige auf Riemann bezügliche Material neu erworben, wie auf pag. 189/190 der Nachrichten unserer math.-phys. Classe vom vorigen Jahre genauer verzeichnet ist. Hierzu treten jetzt eine Reihe Stücke aus Schering's Hinterlassenschaft, insbesondere die Nachschrift, welche Schering 1855—56 von den damals gehaltenen ersten Vorlesungen Riemann's über Abel'sche Functionen und über die P-Function angefertigt hat; diese Nachschrift ist, wie Schering öfter erzählte, von Riemann selbst bei der endgültigen Redaction seiner bez. Abhandlungen zu Grunde gelegt worden. Es wäre sehr erwünscht und sollte zu erreichen sein, dass wir Nachschriften oder Ausarbeitungen von sämmtlichen von Riemann gehaltenen Vorlesungen auf unserer Bibliothek vereinigten. Wir richten also an Diejenigen, welche solche Nachschriften besitzen, die besondere Bitte, uns hiervon freundlichst in Kenntniss zu setzen. F. Kl.

Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues.

Par

M. Federigo Enriques à Bologne*).

1. Les problèmes dont il s'agit dans ce Mémoire se rapportent à la *résolution* des équations algébriques. Il n'y a donc pas ici de questions nouvelles; rien de plus ancien, rien de plus conforme au but pratique dont l'Algèbre elle-même tire son origine. Et pourtant lorsqu'on parle de *résoudre* une équation, on pense d'ordinaire au cas *déterminé* où celle-ci ne renferme qu'une seule inconnue; le cas *indéterminé*, où elle en renfermerait plusieurs, on ne l'envisage pas, le plus souvent, en toute son étendue, ou bien on l'envisage à des points de vue différents qui déguisent la vraie nature du problème.

Cela tient peut être à une double origine des théories qui nous occupent, en tant qu'elles se rapportent aux deux cas.

D'un côté les problèmes classiques de résolution posés par les anciens algébristes amènent à la théorie *algébrique* de Galois. Mais de l'autre côté ce sont surtout des recherches *analytiques*, d'Abel, de Jacobi, de Riemann etc. qui donnent naissance aux études sur les equations entre plusieurs variables; ici le point de vue algébrique est plus récent; encore il ne se rattache pas d'une manière immédiate à celui qui domine les découvertes de Galois.

Nous nous proposons d'envisager les équations renfermant plusieurs inconnues suivant le même esprit que l'on attache au cas déterminé, c'est-à-dire suivant l'esprit de la résolution. Des problèmes se présentent ainsi qui ne sont pas tout-à-fait nouveaux, mais qui revêtent pourtant une forme nouvelle. Entre ces problèmes il y en a de ceux dont l'énoncé est bien simple; quelques-uns même qu'on ne douterait de placer à côté de la question classique se rapportant à l'équation du cinquième degré.

*) Cet article reproduit les matières traitées dans la conférence tenue par M. Enriques au Congrès international des Mathématiciens à Zurich (Août, 1897).

Malheureusement la plupart de ces problèmes demeurent aujourd'hui sans réponse, et les contributions qu'on a portées dans ce champ de recherches ressemblent en vérité à de rares flambeaux au milieu d'une obscurité épaisse. Elles montrent les difficultés plutôt qu'elles ne nous aident à les vaincre!

C'est même à cause de cela que le sujet ne nous paraît pas indigne de tous les efforts.

2. Il faut rappeler, en commençant, les conceptions fondamentales de Galois se rapportant aux équations $f(x) = 0$ qui renferment une seule inconnue. Peu de mots suffiront.

Chaque équation $f(x) = 0$ définit en général une *irrationalité* particulière; celle-ci dépend entièrement d'un certain groupe de substitutions qui lui appartient. C'est ce groupe qui joue le rôle fondamental dans notre théorie. Il opère en échangeant entre elles les racines de l'équation $f = 0$, dont le nombre montre ce que j'appelle le *degré* de l'irrationalité; il donne, par sa composition, la vraie nature de celle-ci.

Mais au sujet du mot «irrationalité» quelques remarques semblent utiles. En effet l'on peut prendre ce mot dans deux sens différents:

1) ou bien dans une acception *arithmétique*, lorsque l'on a en vue les *valeurs* des racines de l'équation donnée $f(x) = 0$;

2) ou bien dans une acception plus proprement *algébrique* lorsque l'on se rapporte aux *opérations* (définies seulement d'une manière théorique) dont dépend le calcul de ces racines.

Il faut encore ajouter, pour éviter toute indétermination, que les opérations nommées sont à effectuer sur des quantités que l'on suppose *connues* d'avance. Ainsi, tout d'abord, sur les coefficients de f. Ensuite sur les quantités que l'on peut en tirer par des opérations rationnelles, qui engendrent le *domaine de rationalité* (Kronecker) de ces coefficients. Enfin sur d'autres quantités, fournies par le procédé même de la résolution de $f(x) = 0$, qui viennent *adjointes*, l'une après l'autre, au domaine de rationalité primitif, et entrainent par leur adjonction un élargissement de celui-ci jusqu'à comprendre toutes les racines dont on demandait la valeur.

Que l'on envisage maintenant l'irrationalité de l'équation $f(x) = 0$, dans la dernière acception du mot, c'est à dire comme une opération; on en tirera une généralisation des notions de Galois, qui est d'ailleurs fort connue. Il suffit de penser que les coefficients de f au lieu de rester fixes, peuvent varier en dépendant, supposons d'une manière rationnelle, de certains paramètres $u_1 \ldots u_r$, que l'on laissera tout-à-fait arbitraires. L'opération irrationnelle qui consiste à résoudre l'équation $f(x) = 0$,

permettra alors d'établir un lien fonctionnel entre ces paramètres et la x; nous aurons défini par suite la *fonction algébrique* $x(u_1 \ldots u_r)$.

Pourtant la vraie nature de celle-ci résultera souvent plus simple, que ne le montrerait l'opération par laquelle elle est engendrée. En effet, en résolvant la $f(x, u_1 \ldots u_r) = 0$, il arrivera de rencontrer des opérations, à effectuer sur les coefficients de f, qui demeureront toujours les mêmes pour les différentes valeurs des paramètres, et qui, par suite, ne compliqueront pas la nature de la fonction algébrique $x(u_1 \ldots u_r)$. On pourra toujours considérer ces opérations (*arithmétiques*) comme effectuées d'avance, en ajoutant de convenables *irrationnelles numériques* au domaine de rationalité engendré par les coefficients de f. Par cette adjonction le groupe algébrique de $f = 0$, (au sens de Galois) se trouve réduit au *groupe de monodromie* de la fonction $x(u_1 \ldots u_r)$, c'est à dire au groupe des permutations engendrées sur les branches de x par les tours fermés effectués dans la variété $(u_1 \ldots u_r)$.

C'est donc précisement ce groupe de monodromie qui définit la nature de *l'irrationalité* en question, en tant qu'elle est envisagée comme une opération proprement *algébrique* à effectuer sur les paramètres.

3. Que l'on ait maintenant à résoudre, une équation algébrique $f(x_1 \ldots x_n) = 0$ renfermant plusieurs (à savoir n) inconnues.

Une première méthode se présente. On peut envisager $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ comme des paramètres, et calculer ensuite la valeur de x_n capable de satisfaire à l'équation; le calcul dépend alors d'une opération irrationnelle bien déterminée. Mais il est aisé de se convaincre que l'irrationalité introduite par cette méthode n'est pas, en général, la plus simple qui suffit à notre but. Ainsi p. e. s'il faut résoudre une équation générale du deuxième ou du troisième degré, le procédé indiqué nous amène à une irrationalité quadratique ou respect. cubique, tandis qu'en choisissant de nouveaux paramètres il sera toujours possible d'exprimer $x_1 x_2 \ldots x_n$ par des fonctions rationnelles de ceux-ci (supposé $n > 2$ dans le dernier cas).

On voit donc clairement quelle est la nature du problème qui se présente ici.

Il s'agit pour chaque équation proposée $f(x_1 \ldots x_n) = 0$ de chercher la résolution *la plus simple* que l'on obtiendra en exprimant les inconnues par des paramètres choisis d'une manière convenable. «Le choix des paramètres» voilà la question.

4. Mais il importe de fixer tout d'abord les limites de la question elle-même. La *simplicité* dont on parle, qui est d'ailleurs tout-à-fait relative, est conçue dans une acception purement *algébrique*. Par suite on ne saurait faire rentrer dans notre champ de recherches, quelques

problèmes qui poursuivent un but parallèle, au point de vue *analytique;* ainsi p. e. la résolution d'une équation renfermant deux inconnues par des fonctions *holomorphes* (elliptiques ou automorphes) d'un paramètre (Clebsch, Poincaré), ou bien encore les intéressants essais de MM. Picard et Painlevé concernant la résolution de certaines équations remarquables avec trois inconnues.

Or il est aisé de se convaincre que l'on pourra toujours envisager le problème qui nous occupe, sous la forme suivante:

Soit une équation donnée

$$f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0,$$

renfermant n inconnues.

On demande s'il est possible de la résoudre, en posant $x_1\, x_2 \ldots x_n$ fonctions rationnelles de $n-1$ paramètres $u_1 \ldots u_{n-1}$ et d'une *fonction algébrique connue* de ceux-ci

$$X(u_1 \ldots u_{n-1}).$$

En d'autres termes on demande de calculer $x_1\, x_2 \ldots x_n$ en opérant sur $n-1$ paramètres, à l'aide de telle ou telle autre opération irrationnelle algébrique dont on connait le degré, ou bien encore le groupe etc.

Dans le cas le plus simple on obtiendra la résolution proposée par des fonctions rationnelles, c'est à dire sans effectuer aucune opération irrationnelle. Lorsque cela n'est pas possible il faudra essayer si l'on y parvient à l'aide d'une racine carrée, etc.

5. On peut généraliser le problème de la résolution d'*une* équation, en posant la question analogue qui se rapporte à des *systèmes de plusieurs équations.* Toutefois il ne s'agit pas d'une généralisation effective, car (d'après Kronecker) on pourra toujours remplacer le système donné, par une ou plusieurs équations, moyennant un procédé d'élimination de quelques inconnues, et il suffira en suite, de résoudre chacune des équations qui seront obtenues de la sorte.

La considération de tels systèmes pourrait donc être laissée tout-à-fait de côté, s'il n'arrivait parfois de remplacer avec avantage une équation unique donnée par un système équivalent composé de plusieurs équations.

Revenons au cas d'une équation unique.

6. Nous avons déjà remarqué que chaque résolution particulière d'une équation donnée, dépend du choix des paramètres que l'on introduit. Or, puisqu'on se rapporte à des résolutions algébriques, les paramètres seront à leur tour des fonctions algébriques des inconnues. Deux cas pourront se présenter:

1) ou bien ces fonctions algébriques seront aussi *rationnelles,*

2) ou bien elles seront *irrationnelles.*

Il s'agit d'une distinction très importante, car suivant qu'il arrive le premier cas ou le deuxième, chaque système de solutions correspond à *un seul* système de valeurs des paramètres, ou à *plusieurs*. Or, c'est là un défaut serieux en beaucoup de questions, lorsque la dernière circonstance se présente on ne saurait tout de suite comparer deux solutions données et reconnaître si elles sont vraiment deux solutions différentes.

Nous appelerons *simple* toute résolution d'une équation lorsque les paramètres introduits seront des fonctions rationnelles des inconnues; puisque, en ce cas, en faisant varier les paramètres on trouvera *une seule fois* chaque système de solutions.

Maintenant un problème se présente:

Étant donnée une équation et une résolution de celle-ci qui ne soit pas simple, obtenue à l'aide d'irrationalités connues, on demande, s'il est possible, de résoudre l'équation d'une manière simple par des irrationalités de la même nature.

À cet énoncé général se rattachent quelques résultats particuliers très intéressants.

Soit l'équation avec deux inconnues $f(xy) = 0$. *Si on peut la résoudre par des fonctions rationnelles* (d'un paramètre) *on pourra toujours en tirer une résolution simple, obtenue de même par des fonctions rationnelles.* C'est le théorème bien connu de M. Lüroth*).

Il a été récemment étendu par M. Castelnuovo**) au cas des équations $f(xyz) = 0$ qui renferment trois inconnues:

Si la $f(xyz) = 0$ *peut se résoudre d'une manière rationnelle on peut aussi choisir les paramètres de telle façon qu'il résultent à leur tour des fonctions rationnelles des inconnues* (de sorte que les formules de la résolution seront invertibles).

La même proprieté subsistera-t-elle aussi pour la resolution rationnelle d'une équation renfermant un nombre d'inconnues quelconque (> 3)? Cette question très délicate demeure en suspens.

Revenons au cas d'une équation $f(xy) = 0$.

Que l'on possède une résolution de celle-ci par une racine carrée; à savoir que l'on ait

$$x = f(t, \sqrt{\varphi(t)}), \qquad y = \varphi(t, \sqrt{\psi(t)})$$

où f, φ, ψ sont des fonctions rationnelles, et supposons que la résolution dont il s'agit ne soit pas simple. Cela revient à dire qu'à chaque couple xy satisfaisant à la $f = 0$ correspondent plusieurs valeurs de t; mais il pourra arriver que l'on trouve une fonction rationnelle $\tau(xy)$ qui dépende aussi de t d'une manière rationnelle; alors on sera tout

*) „Beweis eines Satzes über rationale Curven". Ces Annalen, Bd. 9.

**) „Sulla razionalità delle involuzioni piane". Ces Annalen, Bd. 44 (1893).

de suite ramené à une résolution simple de la $f = 0$ par la substitution

$$x = x(t).$$

Eh bien, *en dehors de ce cas tout-à-fait clair, l'équation* $f(xy) = 0$ *pourra se résoudre, d'une manière simple, sans aucune irrationalité*, c'est-à-dire par des fonctions rationnelles invertibles d'un nouveau paramètre.

C'est là un théorème de M. Painlevé*) bien qu'il l'énonce vraiment d'une manière un peu différente.

J'ai cherché de l'étendre en envisageant des irrationalités plus élevées, et je suis parvenu à la proposition générale suivante**).

S'il est possible de résoudre une équation donnée $f(xy) = 0$ *par une irrationalité de degré* n, *et si la résolution dont on parle n'est pas simple, ou bien on obtiendra une nouvelle résolution simple (elle aussi de degré* n*) en effectuant une substitution rationnelle sur le paramètre, ou bien il sera possible de résoudre l'équation d'une manière simple par une irrationalité de degré moindre que* n. Par conséquent *lorsqu'on veut une résolution de l'équation* $f(xy) = 0$ *par une irrationalité qui ait le plus petit degré possible, il suffit d'envisager des résolutions* (simples) *où le paramètre est une fonction rationnelle de* $x\,y$.

La proposition se trouve établie par un procédé géométrique s'appuyant sur une remarque de M. Segre. Il y a lieu de se poser des questions analogues se rapportant au cas de trois inconnues. Mais la proposition même de M. Painlevé, ne saurait s'étendre à ce cas. En effet on peut demontrer (v. n° 14) que l'équation $f(xyz) = 0$ du quatrième degré se résout par une seule racine carrée portant sur une fonction rationnelle de deux paramètres; mais ceux-ci, de quelque façon qu'on les choisisse, ne seront jamais des fonctions rationnelles de $x\,y\,z$, le polynome f demeurant le plus général de son degré.

7. Au problème de la résolution des équations algébriques se rattache par des liens très étroits celui de la *transformation*. On peut en dire davantage. Puisque toute résolution n'est en dernière analyse qu'une transformation, les deux problèmes sont au fond le même problème. Mais comme ils répondent à un esprit de recherche un peu différent, ils amènent aussi à de questions différentes. Qu'il nous soit permis, pourtant, de marquer les limites de la théorie de la transformation en tant qu'elle est envisagée comme préalable à la théorie

*) „Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre" ch. II. Annales de l'École Normale, 1891.

**) „Un' osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche". Rendic. Circolo Matematico di Palermo, 1895.

de la résolution, et de revendiquer à celle-ci maintes questions que l'on envisage d'ordinaire au point de vue de celle-là.

On dit qu'une équation

$$\psi(y_1\, y_2 \ldots y_n) = 0$$

est une transformée rationnelle de l'équation

$$f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0$$

lorsqu'on passe de celle-ci à celle-là à l'aide d'une substitution rationnelle

$$x_i = x_i(y_1\, y_2 \ldots y_n). \tag{1}$$

Si $\varphi = 0$ est résolue d'une certaine manière on obtient des formules (1) une résolution de $f = 0$ par les mêmes irrationalités.

Il arrive en général que les formules (1) soient reversibles; on dit alors que chacune des deux équations $f = 0$, $\varphi = 0$ est la transformée birationnelle de l'autre.

Les deux équations présentent en ce cas exactement la même difficulté de résolution.

D'après cette remarque il convient à notre but de ranger les équations en *classes* en posant (d'après Riemann) dans une même classe deux équations dont l'une est la transformée birationnelle de l'autre. Une classe est représentée par une équation *type* que l'on peut choisir dans celle-ci d'une manière arbitraire.

Assigner un critérium pour reconnaître si on peut passer par une transformation birationnelle d'une équation à une autre donnée; en d'autres termes juger si deux équations données appartiennent ou non à la même classe, voilà le but de la théorie de la transformation.

Elle amène ainsi à envisager des *caractères* (nombres entiers) et des *modules* (variables d'une manière continue) appartenant à chaque classe; ce sont la des *invariants* d'une équation vis-à-vis des transformations birationnelles.

Pour ce qui concerne les équations entre deux variables, la théorie a atteint son but. En effet ces équations, rangées d'après leur genre, peuvent se transformer en certaines équations types ayant un nombre déterminé de modules que l'on sait assigner.

Malheureusement il n'en est plus ainsi lorsqu'on passe aux équations renfermant un plus grand nombre d'inconnues.

Rapportons-nous au cas des équations $f(xyz) = 0$. On rencontre ici, tout d'abord, deux caractères essentiels; ce sont le premier genre p et le second genre $p^{(1)}$, envisagés par M. Nöther*). Le premier pourtant se dédouble, suivant qu'on le prend dans une acception arithmétique ou algébrique (géométrique); ainsi il donne lieu à deux

*) „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens . . . I, II". Ces Ann. Bde 2, 8.

caractères p_n et p_g qui peuvent bien différer entre eux, et qui demeurent toujours des invariants de l'équation proposée.

Aux caractères nommés il convient d'ajouter le double genre P_2, le triple genre $P_3 \ldots$; une série de caractères, dont nous avons établi l'invariance vis-à-vis des transformations birationnelles*), et dont le profit est demontré par de récentes recherches**).

Sans nous arrêter, avec quelques détails, sur ce sujet, il nous suffira de rappeler que les caractères susnommés p_n, p_g, $p^{(1)}$, $P_2, \ldots$ résultent à présent définis en tous cas. Pourtant il n'est pas assez de ces caractères pour atteindre la classification demandée, car on rencontre (en correspondance des premières valeurs au moins) plusieurs familles irréductibles d'équations ayant les mêmes genres p_n, p_g, $p^{(1)}$, P_2, $P_3, \ldots$, chaque famille donnant lieu à une infinité de classes définies par un certain nombre de modules. Voilà pourquoi nous affirmions tout à l'heure que la théorie de la transformation, en ce qui concerne les équations avec trois inconnues, n'est pas achevée. Et on est même plus éloigné du but lorsque l'on a à faire avec un plus grand nombre d'inconnues.

Remarque. Nous avons parlé jusqu'ici de transformations birationnelles. Les transformations *simplement rationnelles* (qui ne sont pas reversibles) semblent appelées aussi à jouer un rôle, en apparence même plus important, dans notre théorie. En effet, il suffit que l'on puisse envisager l'équation $\varphi(y_1 y_2 \ldots y_n) = 0$ comme une transformée simplement rationnelle de $f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$, pour que le problème qui consiste à résoudre $\varphi = 0$ se trouve abaissé par la résolution de $f = 0$; le cas pourtant excepté où la dernière résolution (qui est toujours plus aisée de la première) s'obtiendrait elle même d'une manière rationnelle.

Malheureusement c'est toujours cette circonstance désavantageuse qui se présente à l'égard de $f = 0$, l'équation $\varphi = 0$ étant donnée d'une façon générale. De sorte que la théorie de la résolution des équations ne saurait tirer aucune aide des transformations simplement rationnelles, sauf en de cas tout-à-fait particuliers.

Ces cas pourtant sont bien dignes de remarque, et M. Painlevé***) leurs a consacré de belles recherches concernant les équations entre deux variables.

---

*) Enriques „Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche". Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL), 1896.

**) Castelnuovo et Enriques „Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques". Voir ces Annalen Bd. 48.

***) Voir le ch. II du Mémoire cité sur les équations différentielles.

9. Nous allons examiner maintenant avec quelques détails les questions de résolutions qui se rapportent aux équations

$$f(xy) = 0$$

renfermant deux inconnues.

Nous pouvons poser le problème général suivant:

I) Déterminer les différentes résolutions d'une équation donnée

$$f(xy) = 0.$$

Pour nous borner aux résolutions simples, formons d'une manière générale une fonction rationnelle

$$t = t(xy).$$

Elle donne lieu à une irrationalité $x(t)$ $\big($ou $y(t)\big)$ tout-à-fait définie, par laquelle on obtient une certaine resolution de

$$f(xy) = 0.$$

Or les caractères de cette irrationalité dépendront, en partie de la nature de f, en partie du choix de la fonction $t(xy)$. Le degré, par exemple, dépendra surtout du choix de t, et pourra même recevoir toutes les valeurs au dessus de certaines limites (pourvu que l'on forme $t(xy)$ d'une façon convenable); mais au dessous de ces limites quelques valeurs seulement seront possibles (en particulier une valeur minimum) en correspondance de la nature de f; ce seront précisement celles-ci qu'il importera d'assigner. Le problème qui se présente ainsi n'est pas complétement résolu; la réponse se borne aujourd'hui à quelques cas généraux.

On sait, p. e. que l'équation la plus générale du degré n se résout par une irrationalité du degré $n - 1$, et qu'on ne pourrait déscendre au dessous de cette valeur.

On sait de même que le moindre degré de l'irrationalité dont dépend la résolution d'une équation tout-à-fait générale du genre p, est (d'après Riemann) la moitié de p ou de $p + 1$, augmentée d'une unité.

Mais enfin, au-de-là de certaines limites, il ne faut plus faire attention au degré comme au caractère le plus important d'une irrationalité; c'est plutôt à son groupe qu'il convient de se rapporter. Alors d'autres questions extrêmement intéressantes prennent naissance.

Suivant nos remarques, le groupe de l'irrationalité $x(t)$ dépend du choix de t, et de la nature de f. Il s'agit de délimiter l'influence respective de ces deux éléments. Arrivera-t-il que certaines particularités de f entraînent des particularités communes à tous les groupes en question, de quelque manière que l'on choisisse $t(xy)$?

C'est par la négative qu'il faut répondre à ce doute, car il s'ensuit

d'un théorème de M. Kneser*) que »le groupe de $x(t)$ demeurera toujours le groupe total, et par suite l'irrationalité $x(t)$ n'aura aucune particularité, lorsque $t(xy)$ est choisi d'une façon générale, bien que f soit douée de particularités quelconques«.

C'est donc seulement par un choix convenable de $t(xy)$ que l'on donnera lieu à des irrationalités $x(t)$ dignes de remarques. Mais on ne saurait particulariser de la sorte le groupe de $x(t)$, au-de-là de certaines limites, sans entraîner des particularités de la f elle-même. Ainsi, par exemple, que l'on cherche à résoudre l'équation $f(xy) = 0$ par une irrationalité *imprimitive*. Il suffit vraiment de former $t(xy)$ en posant

$$t = \varphi(\tau) \qquad \big(\tau = \tau(xy)\big),$$

où φ désigne une fonction rationnelle et τ est elle-même une fonction rationnelle de x, y; mais en ce cas l'irrationalité $x(t)$ qui intervient dans la résolution de $f = 0$ peut être remplacée tout simplement par la $x(\tau)$. Mais si l'on repousse de pareilles irrationalités en quelque sorte réductibles, on ne saurait choisir toujours $t(xy)$ de façon à engendrer une résolution de $f = 0$ par une irrationalité imprimitive; une pareille résolution n'est possible que lorsque $f = 0$ est la transformée simplement rationnelle d'une autre équation dont le genre est > 0. Ainsi la particularité dont l'on voulait douer le groupe de $x(t)$ revient à la nature de la f elle-même.

Il s'agirait maintenant de distinguer, parmi les caractères que l'on peut attribuer à l'irrationalité $x(t)$, ceux qu'il sera permis de fixer d'avance quelque soit f, et ceux qui au contraire entraîneraient des particularités de l'équation. Or il n'est pas aisé de répondre à une question de si haute importance, même en ce bornant à quelques cas d'un intérêt remarquable.

Par exemple, en faisant attention aux facteurs de composition du groupe de $x(t)$, on est amené à se demander si, par un choix convenable de $t(xy)$, on saurait toujours s'arranger de manière que ces facteurs résultent des nombres premiers; car il s'ensuivrait que toute équation $f = 0$ pourrait se résoudre par des seules extractions de racines. Vraiment il n'est pas à croire qu'une telle possibilité subsiste, mais comment démontrer qu'elle ne subsistera pas?

10. Les questions posées précédemment supposaient donnée l'équation $f(xy) = 0$, il s'agissait de la résoudre et d'assigner la nature des irrationalités dont la résolution viendrait dépendre. Or on peut renverser le problème en se proposant de

*) „Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variabeln". Ces Annalen Bd. 28, 1884.

II) former toutes les équations dont la résolution s'obtient par des irrationalités de nature connue.

Il semble même que de la réponse à cette dernière question on saurait tirer la réponse à la première, mais il faut remarquer pourtant à ce propos, que les équations en quelque sorte les plus générales qui se trouvent résolues par une irrationalité donnée, renferment cette résolution comme une résolution tout-à-fait singulière.

Commençons à envisager un cas bien particulier du problème posé; il s'agit de determiner les *équations que l'on peut résoudre sans aucune irrationalité*, cela revient à dire par des fonctions rationnelles d'un paramètre.

Elles sont complétement déterminées, car on sait bien, d'après Clebsch, qu'*elles forment la classe dont le genre est* 0. Que l'on veuille former ensuite les *équations résolubles par une racine carrée, à savoir* les équations *hyperelliptiques*. On peut demander p. e. de former toutes les *équations hyperelliptiques ayant un certain genre p donné*, et l'on obtiendra alors *le type*

$$y^2 = f(x)$$

où f est un polynome du degré $2p + 2$.

En laissant de côté les équations hyperelliptiques il est aisé d'envisager d'autres exemples qui amènent à des cas particuliers du problème général, où l'on obtient sans difficulté la réponse. Il suffira de citer le cas des équations résolubles par une racine quelconque dont l'ordre est plus grand que 2.

Mais envisageons plutôt le problème général. Que l'on donne le groupe d'une irrationalité $X(t)$; il s'agit de former les fonctions algébriques $X(t)$, en d'autres termes les équations $\varphi(Xt) = 0$ appartenant à ce groupe. Pour préciser on peut même chercher les équations $\varphi = 0$ nommées ayant un certain genre p. Or on peut transformer le problème de la manière suivante.

L'équation à former étant désignée par

$$\varphi(Xt) = 0,$$

que l'on envisage sa résolvante de Galois en considérant t comme un paramètre; soit

$$\psi(Yt)$$

un facteur irréductible de celle-ci.

On aura X fonction rationnelle de Y et t. L'équation $\psi = 0$ est transformée en elle-même par un groupe de transformations birationnelles

$$Y_2 = \Theta(Y_1 t) \qquad (t_2 = t_1 = t);$$

le groupe en question correspond justement au groupe de monodromie de X.

Ainsi le problème posé se ramène à celui de déterminer les fonctions algébriques Y, ou les équations $\psi = 0$, admettant un certain groupe de transformations birationnelles en elles-mêmes.

Le dernier problème a été envisagé par M. Hurwitz*), sous une forme géométrique. Mais ces recherches fort intéressantes nous apprennent seulement à construire la surface de Riemann la plus générale, qui correspond à un groupe donné; elle montrent ainsi l'existence d'une telle surface, c'est-à-dire l'existence d'une équation algébrique $\psi = 0$ satisfaisant aux conditions demandées, sans nous donner les moyens de la former effectivement.

Une fois que toutes les équations $\psi(Yt) = 0$ seraient connues, il faudrait encorre former leur transformées simplement rationnelles $\varphi(Xt) = 0$, dont le genre p est assigné. Cela s'effectue aisement, car nous sommes en un cas particulier du problème résolu par M. Painlevé**), pourvu que le genre P de ψ soit aussi connu; or c'est ce que l'on peut supposer, car il y a tout au plus un nombre fini de valeurs que l'on peut donner à P, en correspondance de la valeur assignée de p et du groupe de X.

11. Au problème de la résolution des équations renfermant deux inconnues se rattachent quelques cas remarquables de résolution où l'on a un plus grand nombre d'inconnues. Il s'agit d'un procédé de réduction que nous allons expliquer par quelques exemples. C'est ainsi que nous serons amenés a parler d'un problème arithmétique, qui se présente ici.

Soit l'équation

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0 \qquad (n > 2).$$

Nous avons déjà remarqué que l'on peut envisager quelques unes des inconnues comme des paramètres; si tous les paramètres (à savoir $n-1$) sont choisis de la sorte, la dernière inconnue résulte une fonction algébrique tout-à-fait déterminée de ceux-ci, et il se peut que l'irrationalité introduite ainsi pour la résolution de la $f = 0$, ne soit pas telle qu'on l'avait demandée.

Que l'on envisage à présent $n-2$ inconnues seulement $x_3 \ldots x_n$, comme des paramètres, auxquels on attribuera pour le moment des valeurs constantes; on aura une équation en x_1, x_2

$$\bar{f}(x_1 x_2) = 0.$$

Supposons qu'elles se trouve résolue à l'aide d'une irrationalité donnée $X(t)$; c'est à dire qu'il soit possible de choisir un nouveau paramètre $t(x_1 x_2)$ de telle façon que l'on ait

*) „Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich". Ces Annalen Bd. 41.

**) l. c.

(1) $$x_1 = \varphi(\chi t) \qquad x_2 = \psi(\chi t),$$

où φ, ψ désignent des fonctions rationnelles.

En s'arrêtant aux apparences il semblerait tout d'abord que les formules (1) donnent aussi une résolution de l'équation

$$f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0$$

à l'aide de la seule irrationalité X. Il n'en est rien. En effet les coefficients de φ, ψ ne seront pas en général des quantités rationnelles dans le domaine défini par les coefficients de f; ils renfermeront au contraire des irrationnelles numériques, et ces derniers déviendront des irrationnelles *algébriques* lorsqu'on fera varier les paramètres $x_3 \ldots x_n$.

On voit par suite que le procédé de réduction indiqué ne saurait s'appliquer sans d'autres remarques; mais il amène à se poser les deux questions suivantes:

1) de quelles irrationnelles numériques, a savoir de quelles opérations arithmétiques peut on faire dépendre la résolution de l'equation

$$\bar{f}(x_1\, x_2) = 0$$

obtenue à l'aide de l'irrationalité algébrique X?

2) comment ces irrationnelles dépendront-elles algébriquement des paramètres $x_3 \ldots x_n$; et, en particulier, sera-t-il possible de s'arranger de manière qu'elles n'en dépendent pas du tout?

12. Arrêtons nous sur le cas le plus simple où l'équation

$$\bar{f}(x_1\, x_2) = 0$$

saurait être résolue d'une manière rationnelle, c'est à dire en posant $x_1\, x_2$ fonctions rationnelles d'un paramètre t.

De quelles opérations arithmétiques pourra-t-on faire dépendre une telle résolution?

C'est M. Nöther*) qui a posé le problème et il lui a donné une réponse très simple. En effet, il résulte de son étude que:

Si une équation $\bar{f}(x_1 x_2) = 0$ *entre deux inconnues peut être résolue d'une manière rationnelle* (ce qui arrive si elle a le genre 0), *la résolution indiquée pourra toujours s'effectuer:*

a) *ou bien sans ajouter aucune irrationnelle numérique lorsque le degré de* f *en* x_1 *ou en* x_2, *où même le degré complexif, est impair;*
b) *ou bien* (tout au plus) *à l'aide d'une seule racine carrée, s'il arrive le contraire.*

Supposons maintenant que l'on ait $n = 3$; nous avons à résoudre l'équation

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0,$$

*) „Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen". Ces Annalen Bd. 3.

nous savons que l'équation $\overline{f} = 0$ où l'on attribue à x_3 une valeur onstante a le genre 0. On peut résoudre $\overline{f} = 0$ en posant x_1, x_2 onctions rationnelles d'un paramètre convenable t, mais les coefficients e ces fonctions renfermeront *en général* une racine carrée qui portera si sur x_3, de sorte que l'on n'obtiendra pas ainsi une résolution tionnelle de $f(x_1 x_2 x_3) = 0$. Eh bien, c'est encore un résultat de . Nöther (l. c.): *par un choix convenable de t on pourra toujours rranger de manière que la racine susnommée ne vienne pas dépendre x_3, de sorte que la methode de réduction amène en ce cas à résoudre quation*

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

r des fonctions rationnelles de x_3 et de t.

On pourrait penser que ce beau théorème s'éteindrait au cas d'une uation renfermant plus de trois inconnues.

Mais il n'en est pas ainsi. Lorsque $n > 3$, et l'équation

$$f(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n) = 0$$

risagée en x_1, x_2 a le genre 0 et le degré pair, il peut bien arriver la racine carrée qui figure dans les expressions de $x_1 x_2$ par le amètre t, vienne toujours dépendre des autres inconnues, de quel- façon que l'on s'arrange. La méthode de réduction employée nous ène alors à résoudre la $f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$ non pas rationnellement, is à l'aide d'une racine carrée portant sur une fonction rationnelle paramètres $x_3 \ldots x_n$.

13. Du théorème cité de M. Nöther découlent quelques consé- nces qui se rapportent au cas où le procédé de réduction s'applique ne équation

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

, envisagée en $x_1 x_2$, soit hyperelliptique. Nous ne nous y arrêterons . Et nous passerons, plutôt, à une question en quelque sorte iérale qui trouve ici sa place.

Que l'on envisage l'équation

$$f(x_1 x_2) = 0$$

nt un certain genre p et un degré quelconque. Supposons d'abord > 1. Sera-t-il possible d'assigner d'avance une résolution de l'équation = 0 qui s'effectue d'une manière arithmétiquement rationnelle, à l'aide ne irrationalité algébrique dont le degré ne dépende pas de celui de f?

Il est aisé de repondre par l'affirmative, car il suffit d'envisager fonction *canonique* $\psi(x_1 x_2)$ pour obtenir d'une façon arithméti- ment rationnelle, une résolution de $f = 0$ par une irrationalité du gré $2p - 2$.

Que pourra-t-on dire maintenant lorsque $p = 1$?

Il n'y a plus ici de fonctions canoniques. Mais l'équation $f(x_1 x_2) = 0$ se résout en une infinité de manières et on peut même assigner à loisir le degré de l'irrationalité dont la résolution vient dépendre (pourvu naturellement qu'il s'agisse d'un nombre > 1). Chaque résolution pourtant, lorsque le degré en question est plus petit que celui de f, exige des opérations arithmétiques que l'on peut effectuer de différentes manières (p. e. à l'aide des équations pour la division des arguments des fonctions elliptiques), mais qui sont liées justement au degré de f. Ainsi, nous tirons la démonstration de quelques exemples, l'équation $f(x_1 x_2) = 0$, supposée la plus générale entre celles du genre 1 et du degré n, ne saura se résoudre par des irrationalités de degré moindre que n, d'une manière arithmétiquement rationnelle.

Il est aisé de reconnaître les conséquences auxquelles les remarques précédentes nous amènent à l'égard du procédé de réduction. Nous allons les énoncer tout simplement en y joignant aussi celles dont nous avons déjà parlé qui se rapportent au cas de $p = 0$. Voici le résultat:

Que l'on ait à résoudre une équation

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0, \qquad (n > 2)$$

et que l'on s'engage par la méthode de réduction expliquée, en choisissant $x_3 \ldots x_n$ *comme* $n - 2$ *paramètres, et en considérant l'équation* $f(x_1 x_2) = 0$ *que l'on obtient en* $x_1 x_2$. *Soit* p *le genre de cette équation. Lorsque* $p \neq 1$ *il est toujours possible de résoudre* $f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$ *par une irrationalité dont le degré a la valeur absolue de* $2p - 2$ (*ou moindre que celle-là*), *mais le cas* $p = 1$ *est distingué de tous les autres d'une manière essentielle, car en ce cas le procédé de réduction nous amenera à une irrationalité dont on ne pourra d'avance fixer la valeur, qui en général ne sera pas moindre que le degré de* f *par rapport à* x_1 *ou à* x_2.

Remarque. Pour s'assurer que l'exception relative en cas $p = 1$ est vraiment essentielle il suffit d'envisager une surface (donnée par une équation $f(xyz) = 0$ que l'on peut supposer du degré n en xy), qui soit représentée point par point sur le plan, de manière qu'aux courbes $z = \text{const.}$ correspondent des courbes de degré $3n$ ayant 9 points-base de l'ordre n, c'est à dire des courbes composant un des faisceaux bien connus découverts par Halphen.

Enfin il faut encore remarquer explicitement qu'il y a bien de cas particuliers où l'on obtient quelques simplifications par rapport à l'énoncé général. Ainsi p. e. lorsque l'équation $\overline{f}(x_1 x_2) = 0$ est hyperelliptique ($p > 1$) l'équation $f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$ pourra toujours se résoudre par l'extraction d'une seule racine carrée lorsque p est pair, ou par l'extraction successive de deux racines carrées si p est impair.

14. C'est à présent aux équations renfermant trois inconnues

$$f(xyz) = 0$$

ıe nous allons consacrer quelques mots. Commençons par des cas ırticuliers. La résolution des équations générales des premiers degrés = 1, 2, 3 s'effectue par des fonctions rationnelles de la manière bien ınnue. Lorsque $n = 4$, une telle résolution n'est plus possible en ıéral, puisque le genre de f est = 1.

Mais *l'équation la plus générale du quatrième degré, en trois inmues, peut se résoudre à l'aide d'une seule racine carrée* (portant sur ıe fonction rationnelle de deux paramètres). Cette résolution peut déduire d'une circonstance géométrique bien simple, puisque la ırface de l'ordre 4 admet des sections planes unicursales et les droites ıppuyant à deux courbes pareilles coupent en deux points la surface. ı résolution obtenue de la sorte n'est pas simple, car (on le voit en) les deux paramètres dont dépend le choix d'une droite du système ›mmé ne seront pas des fonctions rationnelles des coordonnés des ›ints de la surface (puisqu'il y a plus qu'une droite passant par ıaque point).

Il est donc naturel de chercher si l'on peut donner de notre équa›n une résolution différente, exigeant de même une racine carrée ulement, de sorte que les paramètres dépendent rationnellement des connues. Mais cela n'est pas possible dans le cas général.

On parvient à cette conclusion de la manière suivante.

Lorsque la résolution demandée est possible, l'équation peut être ansformée en une autre de la forme

$$z^2 = f(xy);$$

nsi nous avons une équation du quatrième ordre représentée sur un an double

$$(xy\sqrt{f(xy)}).$$

Que l'on cherche maintenant tous les plans doubles que l'on peut présenter sur une surface du quatrième ordre. Il faut remarquer abord que leurs genres ont la valeur 1.

Or les plans doubles de tels genres se partagent en quatre classes*); ais le type général de chaque classe ne correspond pas à une surface ı quatrième ordre. Comme d'ailleurs il renferme le même nombre › modules, on voit que la surface générale du quatrième ordre ne ura pas être représentée sur un plan double.

Si maintenant nous laissons de côté les équations du quatrième gré, pour passer à celles dont le degré $n > 4$, nous ne sommes jourd' hui en mesure de répondre à aucune question se rapportant

*) Enriques „Sui piani doppi di genere uno". Memorie della Società italiana lle Scienze, 1896.

aux résolutions *minima* qu'elles peuvent admettre. Il est aisé de résoudre l'équation du degré n par une irrationalité du degré $n-1$, mais on ne saurait dire s'il sera possible ou non de descendre au dessous de cette valeur (soit en considérant des résolutions simples, soit sans remplir cette condition).

15. Passons maintenant à considérer les équations $f(xyz)=0$ en tant qu'elles appartiennent à telle ou telle autre classe définie par les valeurs des genres. Ce point de vue est certainement plus important que celui qui prend comme point de départ le degré de l'équation.

Malheureusement les résultats obtenus dans ce champ se bornent à bien peu de chose.

Étant donnée une équation

$$f(xyz)=0,$$

que l'on envisage ses caractères (genres)

$$p_n,\ p_g,\ p^{(1)},\ P_2,\ P_3\ldots$$

déjà nommés.

Nous ne savons rien en ce qui concerne la question d'assigner la résolution du degré minimum appartenant à une équation dont les genres sont connus.

Peut-on, au moins, assigner une résolution de celle-ci ayant un certain degré donné d'avance qui ne dépende pas du degré de l'équation?

Que l'on suppose $p^{(1)}>1$. Il faut alors repondre à la question posée par l'affirmative. En effet soit d'abord $p_g>2$; il suffit en ce cas d'envisager la valeur $p^{(1)}-1$, on obtiendra toujours une résolution de l'équation proposée dont le degré ne surpassera cette valeur. Si $p_g=2$ il suffira d'envisager à sa place la valeur double $2p^{(1)}-2$. Ces affirmations s'appuyent sur la considération des courbes canoniques de la surface représentée par l'équation (car ces courbes ont le genre $p^{(1)}$ et lorsque $p_g>2$ ce coupent deux a deux en $p^{(1)}-1$ points). Or comme cette considération fait défaut lorsque $p_g<2$, il faut la remplacer par la considération d'autres courbes invariantes dont les caractères dépendent des genres $p_n p_g P_2 P_3 \ldots p^{(1)}$. Comme nous avons supposé $p^{(1)}>1$ il y a toujours de telles courbes: ce seront les courbes bicanoniques ou bien tricanoniques etc. Elles nous permettront de conclure d'une manière générale que *l'on peut toujours assigner d'avance le degré d'une irrationalité suffisant à résoudre une équation* $f(xyz)=0$ *dont on connait les genres, pourvu que l'on ait* $p^{(1)}>1$, *et cela quelque soit le degré de f.* La valeur du degré susnommé, que l'on sait assigner, dépend essentiellement de $p^{(1)}$ et de p_n; elle croît lorsqu'on augmente $p^{(1)}$ ou lorsqu'on diminue p_n.

Il n'en est plus ainsi lorsque $p^{(1)}\leqq 1$. En ce cas on n'est plus en mesure d'assigner le degré d'une irrationalité capable de résoudre

l'équation $f(xyz) = 0$, qui ne dépende pas du degré de f. Vraiment il y aurait lieu d'établir de nouvelles distinctions et certains cas permettraient d'arriver à quelques conclusions.

Mais nous ne nous y arrêterons pas. Il nous suffira d'avertir que pour $p^{(1)} = 1$ l'exception est essentielle.

Remarque. Les résolutions dont on parle ci-dessus sont obtenues d'une manière arithmétiquement rationnelle; elles se prêtent par suite au procédé de réduction que l'on peut essayer pour résoudre une équation renfermant $n > 3$ inconnues, en considérant dans celle-ci $n - 3$ inconnues comme des paramètres.

16. Les remarques qui précèdent se rapportaient au problème de résoudre une équation $f(xyz) = 0$ que l'on supposait donnée. Comme nous l'avons fait pour ce qui concerne les équations renfermant deux inconnues, on peut ici encore renverser la question. Il s'agira donc de former toutes les équations $f(xyz) = 0$ qui admettent une certaine résolution à l'aide d'une irrationalité dont la nature est assignée d'avance.

Nous nous bornerons à dire quelques mots sur ce sujet en prenant en consideration deux cas particuliers bien simples.

Tout d'abord on demande de déterminer toutes les équations entre trois inconnues qui se laissent résoudre d'une manière rationnelle, c'est à dire par des fonctions rationnelles. La réponse à cette question est fournie par un théorème de M. Castelnuovo*):

Les équations que l'on peut résoudre d'une manière rationnelle sont caractérisées par ce que leurs genres p_n P_n (et par suite tous les autres genres) s'évanouissent.

Une question en quelque sorte successive à celle résolue par M. Castelnuovo, consiste à chercher toutes les équations $f(xyz) = 0$ que l'on peut résoudre à l'aide d'une seule racine carrée. Les genres de telles équations ne sont nullement déterminés, mais on peut supposer de les assigner d'avance. En se bornant à considérer des résolutions simples on sera donc amené à chercher les polynomes $f(xy)$ pour lesquels les genres de l'équation

$$z^2 - f(xy) = 0$$

prennent certaines valeurs données. Or nous montrerons ailleurs comment on peut aborder ce problème général. Nous nous bornerons ici à rappeler le résultat, déjà cité**), concernant le cas très simple où

---

*) „Sulle superficie di genere zero". Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL) 1896.

**) „Sui piani doppi di genere uno" l. c.

il s'agit d'équations dont les genres p_a P_2 (et par suite aussi tous les autres) ont la valeur 1:

Les équations ayant les genres $p_a = P_2 = 1$ qui sont résolubles (simplement) à l'aide d'une seule racine carrée, peuvent se ramener à quatre types

$$z^2 - f(xy) = 0,$$

où f est un polynôme général du sixième degré, ou bien un polynôme du degré, 8, 10, 12 *ayant des particularités déterminées.*

17. À la résolution d'une équation

$$f(xyz) = 0$$

par des irrationalités données, on peut rattacher un problème arithmétique analogue à celui dont nous avons parlé dans le cas de deux inconnues, à savoir le problème d'assigner les irrationnelles numériques dont la résolution elle même vient à dépendre. C'est le problème qui sert de fondement au procédé de réduction par lequel on cherche de ramener la résolution d'une équation proposée à celle d'une autre équation renfermant un plus petit nombre d'inconnues.

Nous avons déjà fait à cet égard une simple remarque (n° 15) ayant un certain degré de généralité. Nous nous bornerons ici à rappeler, en peu de mots, le résultat qui concerne la détermination des irrationnelles numériques dont vient à dépendre la résolution d'une équation

$$f(xyz) = 0$$

par des fonctions rationnelles (supposé qu'une telle résolution soit possible, c'est-à-dire que l'on ait $p_a = P_2 = 0$)*).

La question a été traitée d'abord par Clebsch, MM. Klein et Burkhardt, M. Nöther, à l'égard de bien de classes particulières d'équations $f = 0$. Or par un procédé de réduction on est toujours ramené à l'un de ces cas. De sorte que l'on arrive à la conclusion générale suivante:

La résolution rationnelle d'une équation $f(xyz) = 0$, supposée possible, se ramène, à l'aide de racines carrées ou cubiques (tout au plus), à la résolution analogue d'une certaine équation de la forme $z^2 = \varphi(xy)$, où le polynome φ a le degré 4 ou 6 en xy, ou le degré 2 en x et un degré quelconque en y. D'après cette réduction, elle s'effectue à l'aide des irrationalités définies par une des équations pour la bisection de fonctions abéliennes du genre 3 ou 4, ou respect. de fonctions hyperelliptiques dont le genre p est celui de φ. En ce dernier cas les

*) Voir dans ce même journal l'article: Enriques „Sulle irrazionalità ...", Bd. 49.

irrationalités en question deviennent autant élevées que l'on veut, suivant la valeur de p.

Le théorème précédent donne lieu à des applications se rapportant à la résolution rationnelle de quelques équations qui renferment plus de trois inconnues. Encore, on est amené à de nouvelles questions tout-à-fait simples, qui demeurent pourtant sans réponse. Nous avons insisté sur celles-ci dans notre article cité du Bd. 49.

Bologne, Octobre 1897.

Sopra le figure polari delle curve piane del 3° ordine.

di

G. Scorza a Pisa.

Questa breve nota, suggeritami dalla lettura di una memoria del sig^{r}. London*), consta di due parti: nella prima si dà veste geometrica ad una dimostrazione algebrica alquanto laboriosa del sig^{r}. London di un notevole teorema da lui stesso enunciato: nella seconda si fà una semplice osservazione, che dà come caso particolare una nuova interpretazione della condizione espressa dall' annullarsi dell' invariante indicato con P nel § 2 della memoria suddetta.

I°.

1°. Consideriamo tre cubiche C_1^3, C_2^3, C_3^3 in posizione affatto generica fra di loro.

Preso un punto P qualunque e un raggio r per esso, r sarà la retta polare di una schiera di coniche-inviluppo rispetto a C_1^3 e C_2^3 contemporaneamente: le rette polari delle curve di questa schiera rispetto a C_3^3 costituiscono un fascio di cui solo un raggio r' passa per P, quindi ad ogni raggio r del fascio P viene per tal modo coordinato un raggio r'. Ora r' è la retta polare rispetto a C_3^3 di un sistema lineare ∞^3 di coniche-inviluppo di cui soltanto una schiera è coniugata alle coniche polari di P rispetto a C_1^3 e C_2^3, e le rette polari delle curve di questa schiera rispetto a C_1^3 e C_2^3 costituiscono due fasci proiettivi sovrapposti col centro in P, i cui raggi uniti sono rette r: dunque la corrispondenza fra r ed r' è una (2, 1). Le sue tre coincidenze danno il teorema: (London l. c.)

„*Le rette che sono polari di una stessa conica-inviluppo rispetto a tre cubiche* C_1^3, C_2^3, C_3^3 *inviluppano una curva della* 3^a *classe* K^3.“

2°. Per trovare l'ordine della serie ∞^1 di coniche-inviluppo corrispondenti a queste ∞^1 rette, consideriamo le due cubiche C_1^3 e C_2^3 e

*) London, Ueber die Polarfiguren der ebenen Curven dritter Ordnung. Math. Ann. Bd. 36.

un tessuto qualsivoglia di coniche-inviluppo. Se K_1^2 è una sua curva qualunque, questa ha per polare rispetto a C_1^3 una retta a_1, la quale può considerarsi come retta polare di tutte le coniche-inviluppo di un sistema lineare ∞^3 rispetto a C_2^3: di tale ∞^3 una sola curva K_2^2 appartiene al tessuto considerato, dunque fra le curve di quest' ultimo viene per tal modo stabilita una corrispondenza biunivoca. Essa è semplicemente una omografia: poichè se K_1^2 descrive una schiera del tessuto, la retta a_1 descrive un fascio ad essa proiettivo, e le coniche-inviluppo, che siano coniugate alla conica polare del centro di questo fascio rispetto a C_2^3, costituiscono un sistema lineare ∞^4 di cui appunto una schiera appartiene al tessuto: dunque si hanno tre coincidenze e si può enunciare il teorema:

„*Date due cubiche C_1^3 e C_2^3 le coniche-inviluppo che hanno rispetto ad esse la medesima retta polare costituiscono un sistema ∞^3 del 3° ordine.*“

Naturalmente, questo sistema ∞^3 del 3° ordine, mentre contiene i due tessuti di coniche-inviluppo apolari a C_1^3 e C_2^3, del tessuto apolare a C_3^3 contiene soltanto tre curve, che in generale non appartengono a una medesima schiera, perchè tale tessuto, al pari degli altri due, si può prendere in modo affatto arbitrario. Onde alla serie ∞^1 in discorso appartengono tre coniche-inviluppo di ognuno dei tessuti apolari a C_1^3, C_2^3 e C_3^3, che in generale non appartengono a una medesima schiera.

Ma allora, considerate le tre coniche-inviluppo apolari a C_3^3 e che hanno rispetto a C_1^3 e C_2^3 la medesima retta polare, si prendano altre due curve generiche della detta serie ∞^1, K_1^2 e K_2^2, e si consideri il sistema lineare determinato da queste due e dalle precedenti tre curve: esso sarà certo un ∞^4, altrimenti la serie ∞^1 apparterrebbe a un ∞^3 lineare insieme ai due tessuti apolari a C_1^3 e C_2^3 per es. e questi avrebbero una schiera comune. Quindi, se P è il punto d'incontro delle rette polari di K_1^2 e K_2^2 rispetto a C_1^3, C_2^3, C_3^3, tale ∞^4 sarà costituita da tutte e sole le coniche-inviluppo che sono coniugate alla conica polare di P rispetto a C_3^3. Ma allora anche la terza conica-inviluppo che ha la stessa retta polare rispetto a C_1^3, C_2^3 e C_3^3 passante per P (1°) deve appartenere a questo ∞^4, e quindi esso conterrà sei e soltanto sei curve della serie ∞^1 in questione. Ne deduciamo: (London, l. c.)

„*Le coniche-inviluppo che hanno una medesima retta polare rispetto alle tre cubiche C_1^3, C_2^3 e C_3^3 costituiscono una serie ∞^1 del 6° ordine che ha tre curve a comune con ognuno dei tessuti apolari a C_1^3, C_2^3 e C_3^3.*“

3°. Questo teorema e quello dimostrato al n° 1° servono poi [illegible] sig^r. London per dedurne quello che abbiamo in vista, cioè:

„*tre curve piane del* 3^0 *ordine* (*e quindi tutte le curve della rete da esse determinata*) *hanno in generale due soli esalateri polari comuni*"
e noi riportiamo qui brevemente, per comodità del lettore, il suo ragionamento.

Riprendiamo la curva di 3^a classe K^3 (1^0) e consideriamo la corrispondenza che vien fissata tra le sue tangenti facendo ad ogni tangente a corrispondere le sei altre tangenti, che la conica-inviluppo di cui a è polare rispetto a C_1^3, C_2^3 e C_3^3 ha comune con K^3: essa è evidentemente una (6, 6) e la sua valenza (*Werthigkeit*) è nulla, quindi vi sono 12 coincidenze. Ora condizione necessaria e sufficiente perchè un esalatero $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ sia polare per una cubica è, che di due lati dell' esalatero ognuno sia la polare rispetto alla cubica della conica-inviluppo inscritta nel pentalatero formato dai lati rimanenti, dopo di che tale proprietá si verifica per tutti gli altri lati (London); dunque è chiaro che i lati degli esalateri polari della rete determinata da C_1^3, C_2^3 e C_3^3 sono forniti dalle coppie involutorie della corrispondenza (6, 6) suddetta, ogni coppia dando origine a un esalatero polare della rete e ogni esalatero assorbendo poi alla sua volta 15 coppie. Ma queste coppie sono date dalle coincidenze della corrispondenza (36, 36), che si ottiene ripetendo due volte la precedente (6, 6), quando se ne tolgano le 12 che sono già coincidenze della (6, 6), dunque esse sono $\frac{72-12}{2} = 30$ e gli esalateri polari della rete sono effettivamente due e due soltanto.*)

Dalla dimostrazione data risulta poi che essi sono circoscritti a una medesima curva di 3^a classe: e poichè, inversamente, due esalateri che siano circoscritti a una medesima curva di 3^a classe sono polari per una medesima rete di cubiche, risulta anche che essi non presentano, oltre quella notata, altra particolarità di posizione.

II^0.

„*Condizione necessaria e sufficiente perchè due curve d'ordine* n, C^n *e* C_1^n, *possano pensarsi come prime polari di due certi poli rispetto a una curva d'ordine* $n+1$, *è che esse abbiano una prima polare comune. Supposta la condizione soddisfatta, esse possono pensarsi come polari di due punti fissi rispetto a un fascio di curve d'ordine* $n+1$ *aventi* $n+1$ *contatti* $(n+1)$*-punti sulla congiungente i due punti fissi.*"

Che la condizione sia necessaria è evidente: che sia poi anche sufficiente risulta nel modo che segue. Siano A e B i poli della prima

*) Nella memoria del sig^r. London è affermato che una coincidenza della (36, 36), che non sia una coincidenza della (6, 6), è da considerarsi come quintupla, perchè coincide con cinque delle sue rette corrispondenti; ma una tal ragione non pare del tutto rigorosa.

polare comune a C^n e C_1^n rispetto a C^n e C_1^n rispettivamente: rispetto ad ogni curva d'ordine $n+1$, C^{n+1}, che eventualmente soddisfi alla questione, A sarà il polo di C_1^n e B il polo di C^n, per modo che quella prima polare comune a C^n e C_1^n comparisca come la polare mista di A e B rispetto a C^{n+1}. Allora prendiamo in A e B i vertici (1, 0, 0) e (0, 1, 0) del triangolo fondamentale e indichiamo con

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad f = 0$$

ordinatamente le equazioni di C^n, C_1^n e C^{n+1}; per ipotesi sarà:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

avendo introdotta in ψ una opportuna costante: e per determinare f si avranno le equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a\psi, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = a\varphi$$

a essendo una costante.

Ne segue che detta f' una forma particolare d'ordine $n+1$ che soddisfi a queste equazioni, tutte le altre sono date dalla formula:

$$f = f' + \lambda x_3^{n+1}$$

λ essendo un parametro. c. d. d.

Ora la condizione $P = 0$ esprime che due cubiche C^3 e C_1^3 hanno un inviluppo di 2ª classe apolare comune ossia che hanno una conica polare comune, dunque:

„La condizione espressa dall' annullarsi dell' invariante P è necessaria e sufficiente perchè due cubiche possano pensarsi come polari rispetto a una quartica. Supposta la condizione soddisfatta, esse possono pensarsi come polari di due punti fissi rispetto a un fascio di quartiche aventi quattro contatti quadripunti sulla congiungente i due punti.“

Pisa, aprile 1898.

Note on a Problem in Hydrodynamics.

By

A. E. H. Love in Cambridge.

The paper by M. P. Rudzki in Annalen Bd. 50, pp. 269—281 contains a result which would be of great importance if it were established. The author appears to have shown that an irrotational wave motion of finite amplitude propagated with uniform velocity over the surface of liquid under gravity is impossible. There is however a defect in the proof. It turns on a proposition to the effect that, if φ and ψ are real conjugate functions of x and y, and ψ_1 is a particular constant value of ψ, and if further M is a function of $\varphi + i(\psi - \psi_1)$ whose imaginary part vanishes when $\psi = 0$, then M must be a real constant. To disprove this proposition it is sufficient to observe that the function

$$\cos\left[\frac{i\pi}{\psi_1}\{\varphi + i(\psi - \psi_1)\}\right],$$

which is not a real constant, satisfies the condition that its imaginary part vanishes when $\psi = 0$.

April 27th 1898.

In der That ist der Passus auf S. 275 von den Worten „Indem aber als . . ." bis zu „II. Beispiel" nicht richtig. Dies beeinträchtigt aber weder die Gültigkeit der Methoden noch die Resultate des II. Beisp.

3. Mai 1898.

M. P. Rudzky.

Preisaufgabe der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

für das Jahr 1901.

Es soll für einen beliebigen Zahlkörper das Reciprocitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste entwickelt werden, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.

Erläuterung. Es sei l eine ungerade Primzahl, ζ eine von 1 verschiedene l^{te} Einheitswurzel und k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, welcher die Zahl ζ enthält. Bedeuten dann ν, μ irgend zwei ganze Zahlen des Körpers k und $\mathfrak{w}$ irgend ein Primideal in k, so lässt sich das allgemeinste Reciprocitätsgesetz für l^{te} Potenzreste im Zahlkörper k durch die Gleichung

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = 1$$

darstellen. Hierin erstreckt sich das Product über sämmtliche Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k, und das Symbol

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$$

bezeichnet eine in geeigneter Weise zu definirende und durch die Zahlen ν, μ, sowie das Primideal $\mathfrak{w}$ eindeutig bestimmte l^{te} Einheitswurzel.*)

Es soll dieses Reciprocitätsgesetz für l^{te} Potenzreste dem vollen Inhalte nach ausgeführt und wenigstens in einigen ausgezeichneten Specialfällen oder unter geeigneten vereinfachenden Annahmen bewiesen werden. Besonderer Werth wird auf die Ausrechnung von

---

*) Vergl. D. Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Theil V Cap. XXVIII—XXXVI. Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1897.

Zahlenbeispielen gelegt, die zur Erläuterung und Bestätigung des genannten Reciprocitätsgesetzes passend erscheinen.

Der Preis beträgt 1000 Mark.

Die Bewerbungsschriften müssen bis zum 1. Februar 1901 einem der Secretäre der Gesellschaft eingeliefert werden. Sie sollen mit einem Spruch versehen und von einem verschlossenen Brief begleitet sein, der aussen den Spruch trägt, der die Arbeit kennzeichnet, und innen den Namen und Wohnort des Verfassers.

Studien über die geodätische Abbildung.

Von

J. Lüroth in Freiburg i. Br.

Bei der Berechnung einer Landesvermessung wird die Annahme
nacht, die Stationen einer Haupttriangulirung lägen auf einem
ipsoid, und es werden dann ihre Coordinaten so bestimmt, dass die
inkel der Normalschnitte des Ellipsoids von den gemessenen Hori-
ıtalwinkeln möglichst wenig abweichen. In das gewonnene Netz
ıaltet man dann durch Kleintriangulirung, nach dem nämlichen
ncip der Gleichheit der gemessenen Winkel mit den ellipsoidischen,
hr und mehr Punkte ein und erhält so die Coordinaten einer
ıssen Anzahl von Punkten, die in einer Tabelle oder einer Karte
dergelegt werden. Wenn man aus der Karte den Winkel entnimmt,
zwei Punkte von einem dritten aus gesehen bilden und den Winkel
n misst, so stimmen beide auch dann sehr nahe überein, wenn von
drei Punkten keiner Station einer Triangulirung war. Man kann
die Annahme machen, dass die Abbildung der Erde auf das
psoid die Eigenschaft habe, dass der in B' gemessene Winkel
ıchen A' und C' auf der Erde ebenso gross sei, wie der entspre-
ıde Winkel ABC auf dem Ellipsoid, wo auch — in einem nicht
grossen Bereiche — die drei Punkte ABC gelegen seien.

Um zu untersuchen, was aus dieser Annahme folge, fasste ich die
ge etwas allgemeiner auf. Ich ersetzte die Erde und das Ellipsoid
ch zwei beliebige Flächenstücke F' und F, die nur gerade Linien
ıt enthalten sollten. Durch jeden Punkt dieser Flächen dachte ich
Linie gelegt, die *Lothlinie*, die nicht nothwendig zur entsprechen-
Fläche senkrecht zu stehen brauchte. Unter dem Winkel $A'B'C'$
tand ich dann den Winkel, den die beiden Ebenen bilden, die
ch die Lothlinie von B' und die Punkte A' und C' gelegt sind;
Winkel ABC wird entsprechend definirt. Ich nahm dann an,
ı jetzt sei, für beliebige Punkte $A'B'C'$ von F' und ihre ent-
ıchenden von F, der Winkel $A'B'C'$ gleich dem ABC, wo auch
drei Punkte auf F gelegen seien. Eine Abbildung mit diesen

Eigenschaften will ich eine *geodätische* Abbildung nennen. Die Untersuchung, die in den Sitzungsberichten der Münchener Academie, Math.-Phys. Classe, Bd. 32 (1892) Seite 27—52 abgedruckt ist, ergab dann, dass nicht ohne Weiteres Aehnlichkeit zwischen F und F' folge. Man kann vielmehr nur sagen, dass F' und sein Lothliniensystem Σ' aus F und dessen Lothliniensystem Σ durch eine *projective* Transformation $\mathfrak{T}$ hervorgehen. Das nähere Studium dieser Umformung und die Ableitung von Eigenschaften, die mit Hilfe von wenigen astronomischen Beobachtungen die Aehnlichkeit von F zu F' festzustellen erlauben, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

§ 1.

Indem ich mich an die Bezeichnung der eben erwähnten Abhandlung anschliesse, entnehme ich deren § 14, dass, wenn die geodätische Abbildung gelungen ist, jede Lothlinie von F zwei Ebenen (die ich *Hauptebenen* nannte) enthalten muss, die gleichzeitig zwei Grenzflächen zweiter Classe (nach Hesse's Bezeichnung) berühren, nämlich den unendlich fernen Kugelkreis ω und einen andern Kegelschnitt Ω, der aus ω durch die projective Transformation $\mathfrak{T}^{-1}$ hervorgeht. Für die Kenntniss des Lothliniensystems ist also vor Allem wichtig, das Verhalten dieser beiden Grenzflächen gegeneinander zu studiren. Zunächst können beide identisch sein. Sind sie jedoch verschieden, so ist ihre gegenseitige Lage bestimmt durch die Elementartheiler der Determinante $|\lambda\omega + \mu\Omega|$ und es sind 12 verschiedene Fälle zu unterscheiden, die man z. B. in Clebsch's Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet von Lindemann Bd. 2 Seite 252 ff. aufgezählt findet. Da die lineare Schaar $\lambda\omega + \mu\Omega = 0$ von Flächen zweiter Classe die beiden verschiedenen und nicht zerfallenden Grenzflächen ω und Ω enthält, so finden von jenen 12 Fällen hier diejenigen nicht statt, in denen nur *eine einzige* Grenzfläche oder höchstens *eine* Grenzfläche, die nicht zerfällt, auftritt. Dies sind die a. a. O. unter Nr. 5, 10, 11, 12, 7, 8, 9 aufgezählten Fälle, so dass nur die Fälle 1, 2, 3, 4 und 6 übrig bleiben. Ausserdem könnte es sein, dass die Determinante identisch Null wäre.

§ 2.

Da die Gleichungen von ω und Ω sind

$$\omega \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0,$$

$$\Omega \equiv \alpha^2(u_1^2 + u_2^2) + (\gamma^2 + \varepsilon^2 + \vartheta^2)u_3^2 + (\delta^2 + \xi^2 + \eta^2)u_4^2 + 2\alpha\gamma u_1 u_3 + 2\alpha\delta u_1 u_4 + 2\alpha\varepsilon u_2 u_3 + 2\alpha\xi u_2 u_4 + 2(\gamma\delta + \varepsilon\xi + \vartheta\eta)u_3 u_4 = 0,$$

so ergiebt die Ausrechnung

$$(1) \quad |\lambda\omega + \mu\Omega| = A\mu\lambda^3 + \left(D + \alpha^2 A + (\delta\varepsilon - \gamma\xi)^2\right)\lambda^2\mu^2 + \alpha^2 D\lambda\mu^3,$$

wo

$$(2)\qquad \begin{aligned} A &= \delta^2 + \xi^2 + \eta^2 \\ C &= \gamma^2 + \varepsilon^2 + \vartheta^2 \\ B &= \gamma\delta + \varepsilon\xi + \vartheta\eta \\ D &= AC - B^2 + \alpha^2\eta^2 - (\delta\varepsilon - \gamma\xi)^2 \end{aligned}$$

gesetzt ist. Die Grössen $\alpha \ldots \eta\varkappa$ sind dabei die *reellen* Coefficienten der linearen Substitution $\mathfrak{T}$ (a. a. O. § 15), deren Determinante $\alpha^2\vartheta\varkappa$ ist; so dass α, ϑ, $\varkappa$ nicht Null sein dürfen.

Sollte $|\lambda\omega + \mu\Omega|$ identisch Null sein, so müsste $\delta = \xi = \eta = 0$ sein. Dann zeigt die Gleichung von Ω, dass diese Grenzfläche in der Ebene $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ liegt, die auch ω enthält.

§ 3.

Wenn die bei Clebsch-Lindemann mit 2, 3, 4 und 6 bezeichneten Fälle vorliegen, hat die Determinante $|\lambda\omega + \mu\Omega|$ einen Doppelfactor. Wäre er λ^2, so wäre

$$\alpha^2 D = 0;$$

daher, weil $\alpha \neq 0$, $\vartheta \neq 0$,

$$\eta\gamma - \delta\vartheta = 0, \qquad \eta\varepsilon - \vartheta\xi = 0, \qquad \alpha\eta = 0,$$

also $\delta = \xi = \eta = 0$, so dass dann der Fall des § 2 vorläge. Wäre μ^2 Doppelfactor, so müsste $A = 0$ sein und man käme wieder auf § 2.

§ 4.

Soll also $|\lambda\omega + \mu\Omega| = 0$ eine Doppelwurzel haben, so muss die Gleichung zweiten Grades

$$(3)\qquad A\lambda^2 + \big(D + \alpha^2 A + (\delta\varepsilon - \gamma\xi)^2\big)\lambda\mu + \alpha^2 D\mu^2 = 0$$

eine Doppelwurzel haben.

Die Discriminante dieser Gleichung ist

$$(\delta\varepsilon - \gamma\xi)^4 + 2(D + \alpha^2 A)(\delta\varepsilon - \gamma\xi)^2 + (\alpha^2 A - D)^2.$$

Da

$$D = (\eta\gamma - \delta\vartheta)^2 + (\eta\varepsilon - \vartheta\xi)^2 + \alpha^2\eta^2$$

positiv ist, so kann die Discriminante nur Null sein, wenn

$$(4)\qquad \delta\varepsilon - \gamma\xi = 0, \qquad \alpha^2 A - D = 0$$

ist. Dann lautet die Gleichung (3)

$$A\lambda^2 + 2\alpha^2 A\lambda\mu + \alpha^4 A\mu^2 = 0,$$

so dass $\lambda|\mu = -\alpha^2$ die Doppelwurzel ist. Da $\alpha \neq 0$ sein muss und $\lambda = 0$, $\mu = 0$ die beiden einfachen Wurzeln von (1) sind, so ist eine dreifache Wurzel nicht möglich, und ebensowenig können zwei Doppelwurzeln auftreten. Die Fälle (3) und (4) von Clebsch-Lindemann kommen somit hier nicht vor.

§ 5.

Die erste der beiden Gleichungen (4) kann erfüllt werden durch $\delta = 0$, $\zeta = 0$. Dann wird die zweite Gleichung

$$\eta^2(\gamma^2 + \varepsilon^2) = 0,$$

und da man $\eta = 0$ übergehen kann, weil man sonst wieder auf § 2 käme, bleibt $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$ übrig. Für die Doppelwurzel $\lambda = -\alpha^2$ wird in dem vorliegenden Falle

$$\Omega - \alpha^2\omega = (\vartheta u_3 + \eta u_4)^2 - \alpha^2 u_3^2$$

und diese Grenzfläche zerfällt in zwei Punkte.

§ 6.

Ist mindestens eine der beiden Grössen δ, ζ nicht Null, so kann man nach (4) setzen

$$\gamma = \varrho\delta, \qquad \varepsilon = \varrho\zeta$$

und die zweite Gleichung (4) liefert dann, weil $\delta^2 + \zeta^2 \neq 0$ ist,

$$\vartheta = \varrho\eta \pm \alpha.$$

Hiemit schreibt sich

$$\Omega - \alpha^2\omega = (\varrho u_3 + u_4)\{A(\varrho u_3 + u_4) \pm 2\alpha\eta u_3 + 2\alpha\delta u_1 + 2\alpha\zeta u_2\} = 0$$

und diese Gleichung stellt ebenfalls eine in zwei Punkte zerfallende Grenzfläche vor.

Da die der Doppelwurzel entsprechende Grenzfläche dieses und des vorigen Paragraphen zerfällt, so tritt der Fall (2) von Clebsch-Lindemann nicht ein, sondern nur der Fall (6).

§ 7.

Wenn die Gleichung $|\lambda\omega + \mu\Omega| = 0$ vier verschiedene Wurzeln hat, kann man durch Einführung neuer Coordinaten den Gleichungen von ω und Ω die Form geben

$$\begin{aligned} \omega &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ \Omega &= \alpha^2 v_1^2 + \beta^2 v_2^2 + v_4^2, \end{aligned} \tag{5}$$

wo α^2, β^2 unter sich und von Eins verschieden sind. Hat aber jene Gleichung eine Doppelwurzel, so kann man

$$\begin{aligned} \omega &= v_1^2 + v_3^2 + v_4^2 \\ \Omega &= v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 \end{aligned} \tag{6}$$

setzen.

§ 8.

Um auch im Falle des § 2 die einfachsten Formen zu finden, bedarf es noch einer weiteren Untersuchung. Die Form $\omega + \lambda\Omega$ ist dann eine ternäre und die Gleichung $|\omega + \lambda\Omega| = 0$ findet sich

$$(\alpha^2 + \lambda)[\alpha^2\vartheta^2 + (\alpha^2 + \gamma^2 + \varepsilon^2 + \vartheta^2)\lambda + \lambda^2] = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung kann drei verschiedene Wurzeln haben. Dann kann man neue Variabeln so einführen, dass

$$\begin{aligned} \omega &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ \Omega &= \alpha^2 v_1^2 + \beta^2 v_2^2 + \gamma^2 v_3^2 \end{aligned} \tag{8}$$

wird, wo α^2, β^2, γ^2 von einander verschieden sind. Oder die Gleichung (7) kann eine Doppelwurzel haben. Diese ist entweder $-\alpha^2$, mit $\gamma = \varepsilon = 0$ und

$$\begin{aligned} \Omega &= \alpha^2(u_1^2 + u_2^2) + \vartheta^2 u_3^2 \\ \omega &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \\ \vartheta^2 &\neq \alpha^2, \end{aligned} \tag{9}$$

oder die Doppelwurzel ist Doppelwurzel von

$$\lambda^2 + (\alpha^2 + \gamma^2 + \varepsilon^2 + \vartheta^2)\lambda + \alpha^2\vartheta^2 = 0.$$

Dann muss

$$(\alpha^2 - \vartheta^2)^2 + 2(\alpha^2 + \vartheta^2)(\gamma^2 + \varepsilon^2) + (\gamma^2 + \varepsilon^2)^2 = 0,$$

also

$$\gamma = \varepsilon = 0, \qquad \vartheta = \pm\alpha$$

sein, so dass $\lambda = -\alpha^2$ dreifache Wurzel von (7) und

$$\Omega = \alpha^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = \alpha^2\omega \tag{10}$$

ist. Im Ganzen sind also nur die Formen möglich, die in den Gleichungen (5), (6), (8), (9) und (10) gegeben sind.

§ 9.

Wenn die beiden Grenzflächen ω und Ω gar nicht verschieden sind, so kann jede Linie des Raumes Lothlinie sein und die Transformation $\mathfrak{T}$ ist eine Aehnlichkeitstransformation.

Bei den Gleichungen (9) ist für die gemeinsamen Tangentenebenen von ω und Ω

$$u_3 = 0 \qquad u_2 = \pm i u_1,$$

so dass diese Ebenen zwei Büschel mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + i x_2 + \lambda x_4 &= 0 \\ x_1 - i x_2 + \mu x_4 &= 0. \end{aligned}$$

bilden. Ist $(x_1 x_2 x_3 0)$ der (reelle) unendlich ferne Punkt einer reellen Lothlinie, so muss daher $x_1 = x_2 = 0$ sein, d. h. es gehen alle Lothlinien durch den nämlichen unendlich fernen Punkt.

Gelten die Gleichungen (8) und ist $\alpha^2 < \beta^2 < \gamma^2$, so folgt, dass die gemeinsamen Tangentenebenen die vier Büschel bilden, die aus

$$x_1\sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \pm i x_2\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} \pm x_3\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \lambda x_4 = 0$$

durch Variation der Zeichen hervorgehen. Für den unendlich fernen Punkt einer reellen Lothlinie folgt

$$x_1\sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \pm x_3\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_4 = 0,$$

daher es zwei solcher Punkte giebt. Alle Lothlinien können also zu einem oder dem anderen von zwei Parallelstrahlenbündeln gehören. Da wir aber angenommen haben, sie änderten ihre Lage stetig, so können sie nur einem der beiden Bündel angehören, müssen also parallel sein.

Bei den Gleichungen (6) ist $v_1^2 - v_2^2 = 0$, daher $v_1 = v_2$ oder $v_1 = -v_2$, und es giebt zwei Schaaren von gemeinsamen Tangentenebenen. Die der ersten Schaar haben die Gleichung

$$v_1(x_1 + x_2) + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0;$$

sie gehen durch den Punkt $x_1 = -x_2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, der P_1 heisse. Die Tangentenebenen der zweiten Schaar haben die Gleichung

$$v_1(x_1 - x_2) + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0$$

und gehen durch den Punkt P_2 mit den Coordinaten

$$x_1 = x_2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Zwei Ebenen der ersten Schaar schneiden sich in einer Linie durch P_1, zwei der zweiten Schaar in einer Linie durch P_2, so dass also zunächst zwei Bündel von Lothlinien erscheinen.

Es könnte aber auch eine Ebene der ersten Schaar mit einer der zweiten sich in einer Lothlinie treffen. Sollte diese reell sein, so müssten die genannten beiden Ebenen conjugirt complex sein, weil durch eine reelle Gerade an ω nur zwei conjugirt complexe Tangentenebenen gehen können. Würde also die Ebene

$$v_1'(x_1 + x_2) + v_3' x_3 + v_4' x_4 = 0$$

der ersten Schaar die Ebene

$$v_1''(x_1 - x_2) + v_3'' x_3 + v_4'' x_4 = 0$$

der zweiten Schaar in einer reellen Lothlinie schneiden, so müssten

$$\frac{v_1'}{v_4'}, \ \frac{v_1'}{v_4'}, \ \frac{v_3'}{v_4'} \text{ zu } \frac{v_1''}{v_4''}, \ -\frac{v_1''}{v_4''}, \ \frac{v_3''}{v_4''}$$

beziehlich conjugirt sein. Daher wäre $v_1' = v_1'' = 0$ und, weil die v' wie die v'' den Gleichungen (6) genügen müssen,

$$v_4' = \pm i v_3', \quad v_4'' = \mp i v_3''.$$

Die beiden Ebenen wären alsdann

$$x_3 \pm i x_4 = 0, \quad x_3 \mp i x_4 = 0$$

und schnitten sich in der Linie $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, d. h. in der Linie $P_1 P_2$.

Die möglichen Lothlinien können also nur einem der beiden Bündel mit den Centren P_1 oder P_2 angehören, weil, wegen der Stetigkeit der Lage, es ausgeschlossen ist, dass ein Theil zu einem und ein Theil zum anderen Bündel gehört.

Wenn endlich die Gleichungen (5) gelten, hat man den sog. allgemeinen Fall. Die Lothlinien bilden dann das dualistische Gegen-

stück zu den Sehnen einer allgemeinen Raumcurve vierter Ordnung erster Species.

Man kann also schliesslich zusammenfassend sagen:

Wenn die geodätische Abbildung geleistet ist, so ist entweder

1) *F' zu F ähnlich; oder*

2) *die Lothlinien von F — und dann auch die von F' — schneiden sich in einem endlichen oder unendlich fernen Punkt; oder*

3) *die Lothlinien entsprechen dualistisch den Sehnen einer allgemeinen Raumcurve vierter Ordnung erster Species und bilden einen Theil einer Congruenz, die aus allen Geraden auf den Flächen der confocalen Schaar $\omega + \lambda\Omega = 0$ besteht.*

Eine solche Congruenz sei mit Γ bezeichnet.

§ 10.

Im zweiten Falle kann man über die Beziehung von F' zu F gar nichts aussagen, wenn nicht noch eine weitere Annahme gemacht wird, wie z. B. die, dass die Lothlinien Normalen der betreffenden Flächen seien. Wir beschränken die ferneren Betrachtungen daher auf die unter 1) und 3) angeführten Möglichkeiten. Der Sinn dieser Aussagen ist, dass, wenn die Transformation $\mathfrak{T}$ keine Aehnlichkeitstransformation ist, nothwendig die Lothlinien von F zu einer Congruenz Γ gehören müssen, die dann $\mathfrak{T}$ bestimmt; dass aber, wenn $\mathfrak{T}$ eine Aehnlichkeitstransformation ist, das System Σ der Lothlinien von F ganz willkürlich ist und auch einer Congruenz Γ ganz oder zum Theil angehören kann. Findet man also, dass die Lothlinien alle zu einer solchen Congruenz gehören, so muss man noch weiter untersuchen, ob nun Aehnlichkeit stattfindet oder nicht. Zeigt sich aber, dass nicht alle Lothlinien der Congruenz angehören, so muss nothwendig $\mathfrak{T}$ eine Aehnlichkeitstransformation, also $F' \backsim F$ sein. Wenn man die Fusspunkte der Lothlinien durch ihre Coordinaten und die Richtungen durch ihre Richtungscosinusse kennt, so kann man für vier Lothlinien die Hauptebenen bestimmen, d. h. die Ebenen, die durch sie berührend an ω gelegt werden können, und die Gleichung $\omega + \lambda\omega' = 0$ der Schaar von Flächen zweiter Classe, welche diese 8 Ebenen berühren. Man untersucht dann für eine fünfte Lothlinie, ob die Hauptebenen die Fläche ω' und damit auch die drei ausser ω in jener Schaar enthaltenen Grenzflächen berühren. Je nachdem dies der Fall ist oder nicht, hat man keine Entscheidung über $\mathfrak{T}$ oder den Beweis der Aehnlichkeit.

Im folgenden sollen noch einige andere Eigenschaften der geodätischen Abbildung und des Lothliniensystems Σ hergeleitet werden,

die aus der Zugehörigkeit von Σ zu einer Congruenz Γ fliessen. Kann man die Abbildung so einrichten, dass diese Eigenschaften nicht vorhanden sind, so kann man auf die Aehnlichkeit schliessen.

§ 11.

Da die Raumcurven vierter Ordnung erster Species zwei scheinbare Doppelpunkte hat, gehen durch einen Punkt zwei ihrer Sehnen. Folglich liegen von den Lothlinien nur zwei in einer Ebene. Von jenen Sehnen gehen aber mehr als zwei (und dann unendlich viele) durch einen Punkt, wenn er entweder die Spitze eines der vier Kegel ist, die man durch die Curve legen kann oder wenn er ein Punkt der Curve ist. Dem letzten Falle entsprechen dualistisch die unendlich vielen Geraden der Congruenz, die in einer Ebene liegen, welche ω und Ω zugleich berührt. Da diese aber imaginär ist, kann sie höchstens *eine* reelle Lothlinie enthalten. Dem ersten Falle entsprechen die vier Ebenen der Grenzflächen der confocalen Schaar, das sind die Ebenen von ω, Ω und der beiden anderen Grenzflächen, deren Gleichungen nach § 7

$$(\beta^2 - \alpha^2)v_2^2 - \alpha^2 v_3^2 + v_4^2 = 0$$
$$(\beta^2 - \alpha^2)v_1^2 + \beta^2 v_3^2 - v_4^2 = 0$$

sind und die die reellen Focalcurven der Schaar vorstellen. Deren Ebenen seien E_1 und E_2. Da die Lothlinien die betreffenden Grenzflächen berühren müssen, ω und Ω aber imaginär sind, giebt es also nur die beiden Ebenen E_1 und E_2, die mehr als zwei (und dann unendlich viele) reelle Lothlinien enthalten. Daraus folgt z. B. dass, wenn die geodätische Abbildung gelingt auf eine Fläche, deren Lothlinien alle eine Linie schneiden, diese Abbildung ähnlich sein muss. Eine Rotationsfläche, deren Lothlinien die Flächennormalen sind, liefert dafür ein Beispiel.

§ 12.

Der Fläche F werde ein unendlich ferner Punkt π und der F' ein unendlich ferner Punkt π' zugeordnet, die *Polpunkte* heissen mögen.

Durch eine Lothlinie a und den Punkt π kann man eine Ebene legen: Die *Meridianebene* des Fusspunkts A von a. Diese Ebene wird unbestimmt, wenn a durch π geht. Dann heisse A ein *Pol* von F. Der Winkel von a mit der Linie $A\pi$ heisst die Poldistanz von A, sein Complement die *Breite*.

Wenn für die beiden, sich entsprechenden Punkte A und A' die Poldistanzen gleich sind, wollen wir sagen, die geodätische Abbildung erfülle für den Punkt A die *Breitenbedingung*.

§ 13.

Bei zwei Lothlinien a und b kann man von einer Längendifferenz sprechen, unter der man den Winkel der beiden Ebenen $a\pi$ und $b\pi$ versteht. Sind α und β die unendlich fernen Punkte von a und b, sind τ_1 und τ_2 die beiden Tangenten aus π an ω, so ist die Längendifferenz

$$= \frac{1}{2i} \log (\pi\alpha,\ \tau_1,\ \pi\beta,\ \tau_2).$$

Für die Fläche F' ist mit entsprechenden Bezeichnungen die Längendifferenz

$$= \frac{1}{2i} \log (\pi'\alpha',\ \tau_1',\ \pi'\beta',\ \tau_2').$$

Die *Längenbedingung* sei für A und B erfüllt, wenn für F und F' die beiden Längendifferenzen gleich sind, wenn also

$$(\pi\alpha,\ \tau_1,\ \pi\beta,\ \tau_2) \curlywedge (\pi'\alpha',\ \tau_1',\ \pi'\beta',\ \tau_2')$$

ist, woraus durch Anwendung von $\mathfrak{T}^{-1}$ die Gleichheit

$$(\pi\alpha,\ \tau_1,\ \pi\beta,\ \tau_2) \curlywedge (\Pi\mathsf{A},\ \mathsf{T}_1,\ \Pi\mathsf{B},\ \mathsf{T}_2)$$

folgt, in der Π aus π' durch $\mathfrak{T}^{-1}$ hervorgeht, T_1, T_2 die Tangenten von Π an Ω, und A, B die Schnittpunkte von a und b mit der Ebene von Ω sind.

§ 14.

Sollen zwei Lothlinien parallel sein, so müssen sie durch den nämlichen unendlich fernen Punkt gehen. Durch jeden Punkt gehen aber nur zwei reelle Lothlinien. Man kann also schliessen: wenn es mehr als zwei unter sich parallele Lothlinien giebt, so ist F' ähnlich zu F.

Eine gleiche Folgerung würde sich natürlich ziehen lassen, wenn mehr als zwei Lothlinien durch den nämlichen endlichen Punkt gingen. Indessen lässt sich dies nur entscheiden, indem man die Fusspunkte der Lothlinien mit heranzieht, während zur Constatirung des Parallelismus astronomische Beobachtungen ausreichen.

Insbesondere können auch nur zwei Lothlinien existiren, die durch $\varkappa$ gehen, d. h. auf einer Fläche, die von einer Geraden höchstens in zwei Punkten getroffen wird, kann es nicht mehr als vier Pole geben. Mehr als vier Pole bedingen also Aehnlichkeit von F und F'. Wenn zwei Lothlinien $a'b'$ von F', die parallel sind, zwei Lothlinien ab von F entsprechen, die auch parallel sind, so sei α' der unendlich ferne Punkt von a', α der von a. Durch $\mathfrak{T}^{-1}$ gehen $a'b'$ in ab über, die, weil α' ein unendlich ferner Punkt ist, durch einen Punkt A der Ebene von Ω gehen müssen. Daher könnten a und b gar nicht verschieden sein, wenn α nicht mit A zusammenfiele. Beide müssten dann in der Schnittlinie l der Ebene von ω und Ω liegen. Die ge-

suchten Lothlinien wären dann der Ebene parallel, welche l als unendlich ferne Gerade hat. Ob dies der Fall ist, kann man entscheiden indem man untersucht, ob sie auf derselben Linie senkrecht sind.

§ 15.

Erfüllen die Lothlinien ac bezw. $a'c'$ ebenfalls die Längenbedingung, so ist, wenn γ, Γ für c das bedeuten, was α, A für a,

$$(\pi\alpha,\ \tau_1,\ \pi\gamma,\ \tau_2) \curlywedge (\Pi\mathsf{A},\ \mathsf{T}_1,\ \Pi\Gamma,\ \mathsf{T}_2).$$

Wenn nun c die nämliche Längendifferenz gegen a hat wie b, so ist ferner

$$(\pi\alpha,\ \tau_1,\ \pi\beta,\ \tau_2) \curlywedge (\pi\alpha,\ \tau_1,\ \pi\gamma,\ \tau_2),$$
$$(\Pi\mathsf{A},\ \mathsf{T}_1,\ \Pi\mathsf{B},\ \mathsf{T}_2) \curlywedge (\Pi\mathsf{A},\ \mathsf{T}_1,\ \Pi\Gamma,\ \mathsf{T}_2),$$

daher γ mit β und π, Γ mit B und Π in einer geraden Linie liegen. Es muss also dann c die beiden Linien $\pi\beta$ und $\Pi\mathsf{B}$ schneiden. Da zwei Linien höchstens von acht Lothlinien getroffen werden, so giebt es also höchstens acht Lothlinien, welche in F und F' die nämliche gegebene Längendifferenz gegen a bezw. a' haben*).

Wenn man die in der Fussnote angegebenen Sätze dualistisch überträgt, so sieht man, dass nur dann unendlich viele Lothlinien die gleiche Länge haben: 1) wenn $\pi\beta$ und $\Pi\mathsf{B}$ selbst Lothlinien sind, die sich nicht schneiden. Dies ist nicht möglich, weil diese reellen Geraden, die in der Ebene von ω bezw. Ω liegen, imaginäre Kegelschnitte berühren müssten. 2) Wenn beide Linien sich schneiden und ihre Ebene sowohl ω wie Ω berührt. Dann wären sie aber Tangenten und man käme auf den ersten Fall. 3) Wenn beide Linien sich schneiden und ihre Ebene eine der vier Ebenen ist, welche die Grenzflächen der Schaar enthalten. Die unendlich vielen schneidenden Lothlinien sind dann die Tangenten der betreffenden Grenzflächen. Da die Lothlinien reell sein sollen, kommen nur die Ebenen E_1 und E_2 (§ 11) in Frage. Aber diese Lothlinien haben gegen die Lothlinie a eine ganz bestimmte Längendifferenz. Endlich könnte es sein, dass die beiden Linien $\pi\beta$ und $\Pi\mathsf{B}$ identisch wären und mit der Schnittlinie l

*) Bei einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species bilden die Sehnen, die eine gerade Linie schneiden im Allgemeinen eine Regelfläche achter Ordnung; und folglich giebt es nur acht Sehnen, welche zwei gerade Linien treffen. Eine Ausnahme findet statt, und es treffen unendlich viele Sehnen die beiden Geraden, 1) wenn diese selbst Sehnen sind, die sich nicht schneiden und auf der nämlichen Fläche zweiter Ordnung liegen, aus dem Büschel, dessen Basiscurve die Curve vierter Ordnung ist; 2) wenn die beiden Linien sich schneiden und ihr Schnittpunkt auf der Curve liegt; 3) wenn die beiden Linien sich schneiden und ihr Schnittpunkt die Spitze eines der vier Kegel ist, die in dem Flächenbüschel enthalten sind.

Diese Sätze sind ohne Zweifel bekannt; ich kann aber nicht angeben, wo sie sich ausgesprochen finden.

der Ebenen von ω und Ω zusammenfielen. Auch dann hätten die in Rede stehenden Lothlinien eine feste Längendifferenz gegen a. *Unendlichviele* Lothlinien also haben nur dann in F' und F gegen eine bestimmte Lothlinie a' bezw. a die nämliche Längendifferenz, wenn diese Differenz einen oder den andern von *drei* Werthen hat.

Wenn daher zu *vier* Längendifferenzen jedesmal mehr als 8 Lothlinien gehören, die die Längenbedingung erfüllen, muss $\omega = \Omega$ und $F' \backsim F$ sein.

§ 16.

Nachdem wir im Vorigen einige allgemeine Resultate gefunden haben, die unter Umständen die Entscheidung geben können, ob $F' \backsim F$ ist, wollen wir nun an die Beobachtungen der Praxis näher anknüpfen. In einem Punkt A' von F', der kein Pol ist und dem die Länge Null zugeschrieben wird, sei die Breite gemessen und das Azimut eines Punktes C' und es sei die geodätische Abbildung auf F so eingerichtet, dass der entsprechende Punkt A die gleiche Breite wie A', und C in A das gleiche Azimut hat wie C' in A'. Wegen der Winkelgleichheit der geodätischen Abbildung entspricht dann die Meridianebene in A' der in A. Wir legen nun zwei rechtwinkelige Coordinatensysteme so, dass die Lothlinien a' und a die x_3'- und x_3-Axen sind, dass die Meridianebenen $a'\pi'$ und $a\pi$ die Ebenen $x_2' = 0$ und $x_2 = 0$ vorstellen, während die Punkte A' und A die Ursprünge sind.

Die Beziehungen der Coordinaten seien (entsprechend den in der früheren Abhandlung benützten Transformationsformeln für die Ebenencoordinaten) durch

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= \alpha x_1', \\ \sigma x_2 &= \alpha x_2', \\ \sigma x_3 &= \gamma x_1' + \varepsilon x_2' + \vartheta x_3', \\ \sigma x_4 &= \delta x_1' + \zeta x_2' + \eta x_3' + \varkappa x_4' \end{aligned} \tag{11}$$

gegeben.

Da für A und A' die Breitenbedingung erfüllt sein soll und die Polpunkte in den Ebenen $x_2 = 0$, $x_2' = 0$ liegen, seien die Richtungscosinusse der Polpunkte $p, 0, r$. Bezeichnet man mit $(\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3)$ bezw. $(\varkappa_1' \varkappa_2' \varkappa_3')$ die Richtungscosinusse einer Lothlinie b bezw. b', so ist die Breitenbedingung

$$p\varkappa_1 + r\varkappa_3 = p\varkappa_1' + r\varkappa_3'.$$

Da die Gleichung einer Ebene durch A, die zu der Meridanebene $b\pi$ parallel ist,

$$\varkappa_2 r x_1 - (\varkappa_1 r - p\varkappa_3) x_2 - p\varkappa_2 x_3 = 0$$

wird, so ist der Cosinus des Längenunterschieds zwischen a und b gegeben durch

$$\frac{x_1 r - x_3 p}{\sqrt{1-(x_1 p + x_3 r)^2}}.$$

Daher ist die Längenbedingung für die Lothlinien a und b,

$$\frac{x_1 r - x_3 p}{\sqrt{1-(x_1 p + x_3 r)^2}} = \frac{x_1' r - x_3' p}{\sqrt{1-(x_1' p + x_3' r)^2}}.$$

Soll die Breiten- und die Längenbedingung erfüllt sein, so wird diese Gleichung

$$x_1 r - x_3 p = x_1' r - x_3' p,$$

die mit der Breitenbedingung $x_1' = x_1$, $x_3' = x_3$, und daher auch $x_2' = x_2$ liefert, wenn wir noch voraussetzen, dass die beiden Dreibeine $A\pi, a, b$ und $A'\pi', a', b'$ gleichen Sinnes sind.

§ 17.

Seien nun wie oben b und b' zwei sich entsprechende Lothlinien, deren unendlich entfernte Punkte β und β' im System der x und der x' dieselben Coordinaten haben. Wendet man die Umformung $\mathfrak{T}^{-1}$ an, so geht b' in b und β' in einen Punkt B über. Es sind nun zwei Fälle möglich. *Erstens* kann B von β verschieden sein. Dann ist die Linie βB die Lothlinie b und es müssen durch sie zwei Ebenen gehen, die ω und Ω berühren. *Zweitens* aber kann B mit β zusammenfallen. Legt man dann durch diesen unendlich fernen Punkt die Lothlinien, die durch ihn gehen, so sei b eine von diesen; diese geht durch $\mathfrak{T}$ in eine Linie b' über, die β' enthält und somit die Aufgabe löst.

§ 18.

Seien die Coordinaten von β im ersten System (und von β' im zweiten) wie im § 16 $(x_1 x_2 x_3 0)$, so sind die Coordinaten $(k_1 k_2 k_3 k_4)$ von B gegeben durch

$$\begin{aligned} \varrho k_1 &= \alpha x_1, \\ \varrho k_2 &= \alpha x_2, \\ \varrho k_3 &= \gamma x_1 + \varepsilon x_2 + \vartheta x_3, \\ \varrho k_4 &= \delta x_1 + \zeta x_2 + \eta x_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Im *zweiten* Falle des § 17, den wir zuerst behandeln, sollen diese den x proportional sein; daher

$$\begin{aligned} (\varrho - \alpha) x_1 &= 0, \\ (\varrho - \alpha) x_2 &= 0, \\ \gamma x_1 + \varepsilon x_2 + (\vartheta - \varrho) x_3 &= 0, \\ \delta x_1 + \zeta x_2 + \eta x_3 &= 0 \end{aligned}$$

und

$$(\varrho - \alpha)^2 (\varrho - \vartheta) = 0.$$

Ist $\alpha \neq \vartheta$, so giebt $\varrho = \vartheta$, weil nicht die drei x Null sein dürfen,

$$\eta = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

Dagegen liefert $\varrho = \alpha$

$$\gamma x_1 + \varepsilon x_2 + \vartheta' x_3 = 0,$$
$$\delta x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 = 0,$$

o, wie im folgenden stets, $\vartheta - \alpha = \vartheta'$ gesetzt ist. Die Coordinaten es unendlich fernen Punktes sind dann durch die Matrix

$$\begin{vmatrix} \gamma & \varepsilon & \vartheta' \\ \delta & \xi & \eta \end{vmatrix}$$

geben. Sie können nicht unbestimmt werden, weil sonst ein nicht lässiger Fall des § 6 vorläge.

Ist $\alpha = \vartheta$, $\varrho = \alpha$, so sind die Gleichungen

$$\gamma x_1 + \varepsilon x_2 = 0,$$
$$\delta x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 = 0$$

d man hat daher einen speciellen Fall des letzten Resultats.

Da hier $\mathsf{B} = \beta$ ist und $\mathsf{B} = \mathfrak{T}^{-1}\beta'$, so ist B ein in der Ebene n Ω und von ω, und folglich in l gelegener Punkt. Man kann her von ihm aus an ω die beiden Tangenten $t_1 t_2$ und an Ω die $T_1 T_2$ gen. Die beiden Ebenen $t_1 T_1$ und $t_2 T_2$ einerseits, und die $t_1 T_2$ und T_1 andererseits, die jeweils conjugirt complex sind, schneiden sich je einer Lothlinie durch β. Die beiden so entstehenden Lothlinien ad parallel, haben also dieselbe Länge und Breite.

Wir haben hier, wenn $\eta \neq 0$ ist, zwei parallele Lothlinien, deren leichungen sich ergeben

$$\begin{cases} \delta x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 - (\vartheta + \alpha) x_4 = 0, \\ A(\gamma x_1 + \varepsilon x_2 + \vartheta' x_3) - (2B'\vartheta - C'\eta) x_4 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} A(\delta x_1 + \xi x_2 + \eta x_3) - (2B'\eta - A\vartheta') x_4 = 0, \\ A(\gamma x_1 + \varepsilon x_2 + \vartheta' x_3) - (C'\eta) x_4 = 0, \end{cases}$$

o

$$B' = \gamma\delta + \varepsilon\xi + \vartheta'\eta,$$
$$C' = \gamma^2 + \varepsilon^2 + \vartheta'^2$$

setzt ist. Wenn $\eta = 0$, $\vartheta \neq \alpha$ ist, kommen noch die Lothlinien $_1 = 0$, $x_2 = 0$) (die x_3-Axe) und ($Ax_1 - 2\alpha\delta x_4 = 0$, $Ax_2 - 2\alpha\xi x_4 = 0$) nzu, mit denen für $\eta = 0$, $\vartheta' = 0$ die beiden vorigen identisch werden.

§ 19.

Im ersten Falle des § 17 sind die Coordinaten einer Ebene, die rch die Punkte β und B geht, gegeben durch die Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ \alpha x_1 & \alpha x_2 & \gamma x_1 + \varepsilon x_2 + \vartheta x_3 & \delta x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 \end{vmatrix},$$

wo die x die Coordinaten eines beliebigen Punktes sind. Bezeichnet man

$$\delta x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 = f,$$
$$\gamma x_1 + \varepsilon x_2 + \vartheta' x_3 = g,$$

so werden die Coordinaten der Ebene

$$\begin{aligned} u_1 &= \quad x_3 f x_2 - x_2 f x_3 + x_2 g x_4, \\ u_2 &= -x_3 f x_1 + x_1 f x_3 - x_1 g x_4, \\ u_3 &= \quad x_2 f x_1 - x_1 f x_2 = f w, \\ u_4 &= -x_2 g x_1 + x_1 g x_2 = -g w, \end{aligned} \tag{13}$$

mit

$$w = x_2 x_1 - x_1 x_2.$$

Die Linie $\beta \mathsf{B}$ ist eine Lothlinie, wenn die beiden Functionen der x, in die ω und Ω durch Einsetzen der Werthe (13) übergehen, sich nur um einen constanten Factor unterscheiden.

Setzt man $x_1 = x_2 = 0$, so zeigt sich dass dieser Factor α^2 sein muss, und $\Omega = \alpha^2 \omega$ liefert dann

$$\begin{aligned} \alpha^2 f^2 w^2 = {} & C f^2 w^2 + A g^2 w^2 - 2 B f g w^2 \\ & + 2\alpha\gamma u_1 f w - 2\alpha\delta u_1 g w \\ & + 2\alpha\varepsilon u_2 f w - 2\alpha\xi u_2 g w. \end{aligned}$$

Diese Gleichung verlangt entweder

$$w = 0, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Diese Annahme liefert die x_3-Axe. Ist $\eta = 0$ so ist $\mathsf{B} = \beta$ und man kommt auf den Fall von § 18 zurück. Oder es muss

$$\begin{aligned} \{(C-\alpha^2) f^2 - 2Bfg + Ag^2\} x_2 &= 2\alpha f x_3 (\varepsilon f - \xi g), \\ \{(C-\alpha^2) f^2 - 2Bfg + Ag^2\} x_1 &= 2\alpha f x_3 (\gamma f - \delta g), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} f\{x_1(\varepsilon f - \xi g) - x_2(\gamma f - \delta g)\} &= 0, \\ g\{x_1(\varepsilon f - \xi g) - x_2(\gamma f - \delta g)\} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

sein.

Diese Gleichungen werden erfüllt durch $f = 0$, $g = 0$, was wieder auf den schon in § 18 absolvirten Fall zurückführt. Sieht man davon ab, so bleiben die Gleichungen (14) und die

$$x_1(\varepsilon f - \xi g) = x_2(\gamma f - \delta g). \tag{16}$$

§ 20.

Setzt man in diesen Gleichungen

$$tf = sg, \tag{17}$$

so erhält man aus (14), wenn man

$$(C-\alpha^2) s^2 - 2Bst + At^2 = H$$

setzt,

18)
$$H\varkappa_1 = 2\alpha s\varkappa_3(\gamma s - \delta t),$$
$$H\varkappa_2 = 2\alpha s\varkappa_3(\varepsilon s - \zeta t),$$

ie mit (17) die Gleichung

9)
$$\begin{vmatrix} H & 0 & -2\alpha s(\gamma s - \delta t) \\ 0 & H & -2\alpha s(\varepsilon s - \zeta t) \\ \delta t - \gamma s & \zeta t - \varepsilon s & \eta t - \vartheta' s \end{vmatrix} = 0$$

r Bestimmung von $s:t$ ergeben. Die Ausrechnung zeigt, dass ese Gleichung sich

))
$$H(C's^2 - 2B'st + At^2)\left(\eta t - (\vartheta + \alpha)s\right) = 0$$

ıreibt.

Wenn $H = 0$ ist, so wird nach (18) entweder $s = 0$, was $A = 0$ d nach §§ 8 und 9 einen unzulässigen Fall herbeiführen würde, er es wird $\varkappa_3 = 0$ oder endlich

$$\gamma s - \delta t = 0, \qquad \varepsilon s - \zeta t = 0.$$

'enn $\varkappa_3 = 0$ ist, folgt nach (17)

$$(\delta t - \gamma s)\varkappa_1 + (\zeta t - \varepsilon s)\varkappa_2 = 0$$

ıd nach (16)

$$(\zeta t - \varepsilon s)\varkappa_1 - (\delta t - \gamma s)\varkappa_2 = 0.$$

s, neben $\varkappa_3 = 0$, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ nicht beide Null sein dürfen, muss also

l)
$$(\delta t - \gamma s)^2 + (\zeta t - \varepsilon s)^2 = 0,$$

in. Damit aber reducirt sich $H = 0$ auf

$$(\vartheta' s - \eta t)\left((\vartheta + \alpha)s - \eta t\right) = 0.$$

aus dieser Gleichung $s:t$ sich reell ergiebt, folgt aus der Glei-ng (21)

$$t\delta - s\gamma = 0, \qquad t\zeta - s\varepsilon = 0,$$

rend dabei

$$(\vartheta \pm \alpha)s - \eta t = 0$$

Dies ist nach § 6 ein hier nicht zulässiger Fall. Hiermit ist auch letzte oben erwähnte Möglichkeit erledigt. Der zweite Factor von liefert, weil $B'^2 - AC' < 0$ ist, zwei complexe Werthe für » die $s':t'$ und $s'':t''$ seien. Wenn ihnen reelle $\varkappa$ entsprächen, wäre gleichzeitig

$$t'f - s'g = 0, \qquad t''f - s''g = 0,$$

er, da $f = 0$, $g = 0$ schon erledigt ist, $s':t'$ von $s'':t''$ nicht ver-ieden und reell wäre. Man braucht also diesen Fall nicht zu be-chten. Es bleibt demnach nur die Gleichung

)
$$\eta t - (\vartheta + \alpha)s = 0$$

ig. Da, wenn sie erfüllt ist, weder s noch $\varkappa_3$ verschwinden können, l $s = 0$ oder $\varkappa_3 = 0$ auch $H = 0$ nach sich zögen, was nach dem

obigen ausgeschlossen ist, so folgt aus den Gleichungen (18) die Gleichung (16).

Es könnte aber sein dass die Determinante (20) der drei Gleichungen (17) und (18) identisch Null ist. Da das identische Verschwinden des ersten oder zweiten Factors $A = 0$ verlangen würde, kann dies nur für

$$\eta = 0, \qquad \vartheta + \alpha = 0 \tag{24}$$

eintreten.

§ 21.

Im Falle der Gleichung (23) sind unsere Gleichungen, wenn man $s = \eta$, $t = \vartheta + \alpha$ setzt, weil

$$(C - \alpha^2)\eta^2 - 2B\eta(\vartheta + \alpha) + A(\vartheta + \alpha)^2$$
$$= \big(\gamma\eta - \delta(\vartheta + \alpha)\big)^2 + \big(\varepsilon\eta - \zeta(\vartheta + \alpha)\big)^2 = N$$

wird,

$$(\vartheta + \alpha)(\delta x_1 + \zeta x_2 + \eta x_3) - \eta\big(\gamma x_1 + \varepsilon x_2 + (\vartheta - \alpha)x_3\big) = 0, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} N x_1 &= 2\alpha\eta x_3\big(\gamma\eta - \delta(\vartheta + \alpha)\big), \\ N x_2 &= 2\alpha\eta x_3\big(\varepsilon\eta - \zeta(\vartheta + \alpha)\big). \end{aligned} \tag{26}$$

Da $N = 0$ ausgeschlossen ist, weil man damit auf § 6 käme, so berechnen sich aus (26) x_1 und x_2 eindeutig aus x_3, so dass der gesuchte unendlich ferne Punkt bestimmt ist. Durch diese Werthe von x_1 und x_2 wird die Gleichung (25) befriedigt. Setzt man kurz

$$N x_1 = u x_3, \qquad N x_2 = v x_3,$$

so finden sich die Coordinaten von B nach (12) § 18, und die eines beliebigen Punktes der Lothlinie βB

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= u\tau, \\ \sigma x_2 &= v\tau, \\ \sigma x_3 &= (\vartheta + \alpha)(D - \alpha^2 A) + N\tau, \\ \sigma x_4 &= \eta(D - \alpha^2 A); \end{aligned}$$

für $\tau = 0$ folgt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; die fragliche Lothlinie schneidet also die x_3-Axe.

Wenn $D - \alpha^2 A = 0$ oder $\eta = 0$ ist, kommt man auch hier auf § 18 zurück, weil B $= \beta$ ist.

§ 22.

Ist nach Gleichung (24) $\eta = 0$ $\vartheta + \alpha = 0$, so wird

$$H = (\gamma s - \delta t)^2 + (\varepsilon s - \zeta t)^2$$

und die Gleichungen sind

$$t(\delta x_1 + \zeta x_2) - s(\gamma x_1 + \varepsilon x_2 - 2\alpha x_3) = 0, \tag{27}$$

$$\{(\gamma s-\delta t)^2+(\varepsilon s-\zeta t)^2\}\, x_1 = 2\alpha s x_3(\gamma s-\delta t),$$
$$\{(\gamma s-\delta t)^2+(\varepsilon s-\zeta t)^2\}\, x_2 = 2\alpha s x_3(\varepsilon s-\zeta t),$$

tzte beiden die erste nach sich ziehen.
minirt man s und t, so kommt die Gleichung

$$(x_1^2+x_2^2)(\delta\varepsilon-\gamma\zeta) = 2\alpha x_3(x_2\delta-x_1\zeta),$$

ırve zweiter Ordnung in der unendlich fernen Ebene. Jeder lieser Curve bestimmt die Richtung einer Lothlinie, die die ı löst. Der unendlich ferne Punkt der x_3-Axe gehört der Curve r in § 18 gefundene unendlich ferne Punkt hat jetzt Coordilie durch die Matrix

$$\begin{vmatrix} \delta & \zeta & 0 \\ \gamma & \varepsilon & -2\alpha \end{vmatrix}$$

und daher

$$-2\alpha\zeta,\quad 2\alpha\delta,\quad \delta\varepsilon-\gamma\zeta$$

uch dieser Punkt liegt also auf dem Kegelschnitt. Die Coordigend eines Punktes der Linie βB werden

$$\sigma x_1 = \tau x_1,$$
$$\sigma x_2 = \tau x_2,$$
$$\sigma x_3 = \gamma x_1+\varepsilon x_2+(\tau-2\alpha)x_3,$$
$$\sigma x_4 = \delta x_1+\zeta x_2.$$

= 0 folgt auch hier $x_1 = x_2 = 0$, so dass alle die Lothlinien Axe schneiden. Man erkennt, dass die Coordinaten x die ng

$$-\gamma\zeta)(x_1^2+x_2^2)-2\alpha x_3(\delta x_2-\zeta x_1)-2\alpha x_4(\varepsilon x_1-\gamma x_2)=0$$

, die das einschalige Hyperboloid $\Omega-\alpha^2\omega=0$ in Punktcoordiarstellt. Die Linie $x_1=0$ $x_2=0$ d. h. die x_3-Axe gehört der an und jede Ebene durch sie trifft die Fläche in einer Lothlinie.

§ 23.

n kann somit sagen: *im Allgemeinen giebt es ausser der Loth-* (der x_3-Axe des Systems) *noch drei andere Lothlinien, von denen rallel sind, welche die Längen- und die Breitenbedingungen gleichfüllen.* In besonderen Fällen, die im Vorigen erwähnt sind, r hier nicht aufgezählt werden sollen, kann ihre Anzahl geringer wenn jedoch $\eta=0$, $\vartheta=-\alpha$ ist, giebt es unendlich viele, Hyperboloid erfüllen. Weil eine Ebene durch a nur *eine* ie dieser Fläche enthält, können ihr zwei Lothlinien, deren ıkte in A gleiches Azimut haben, nicht gleichzeitig angehören, e verschieden sind und beide die Längen- und Breitenbedingungen . Es reichen also vier Längen- und Breitenbestimmungen hin, Aehnlichkeit von F und F' constatiren zu können.

§ 24.

Wenn ω und Ω verschieden sind, kann die Breitenbedingung nur für einfach unendlich viele Lothlinien erfüllt sein, die eine Regelfläche bilden. Da die Fläche F keine geraden Linien enthalten soll, so kann sie von der Regelfläche keinen Theil bilden, sondern wird von ihr in einer Curve getroffen. Wenn daher die Breitenbedingung für *jeden* Punkt von F erfüllt ist, also für eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Lothlinien, so muss sie, da das System Γ von Lothlinien irreducibel ist, für jede Lothlinie erfüllt sein. Um diesen Schluss strenge zu machen, wollen wir für die beiden Grenzflächen ω und Ω die Gleichungen in der einfachsten Form annehmen (vgl. § 7)

$$\omega = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0,$$
$$\Omega = \alpha^2 v_1^2 + \beta^2 v_2^2 + v_4^2 = 0.$$

Eine Lothlinie schneide die Ebene von ω im Punkte $(y_1 y_2 y_3 0)$, die von Ω im Punkte $(z_1 z_2 0 z_4)$. Die Coordinaten des Polpunkts π seien $(p_1 p_2 p_3 0)$, die von Π (vgl. § 12) $(\pi_1 \pi_2 0 \pi_4)$. Dann ist die Gleichheit der Breiten durch die Gleichung

$$(30) \qquad \frac{(y_1 p_1 + y_2 p_2 + y_3 p_3)^2 z_4^2}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) z_4^2} = \frac{(\beta^2 z_1 \pi_1 + \alpha^2 z_2 \pi_2 + \alpha^2 \beta^2 \pi_4 z_4)^2 y_3^2}{(\beta^2 z_1^2 + \alpha^2 z_2^2 + \alpha^2 \beta^2 z_4^2)(\beta^2 \pi_1^2 + \alpha^2 \pi_2^2 + \alpha^2 \beta^2 \pi_4^2) y_3^2}$$

ausgedrückt, wo links z_4^2, rechts y_3^2 stehen gelassen sind, damit beiderseits nur die Liniencoordinaten der Lothlinie vorkommen*).

§ 25.

Bezeichnen wir des kürzeren Ausdrucks wegen die Gesammtheit der Ebenen, die ω und Ω gleichzeitig berühren, mit E. Durch eine reelle Lothlinie a von F gehen dann zwei conjugirt complexe Ebenen e und $\bar{e}$ aus E. Die Coordinaten derjenigen Ebenen von E, welche in der Umgebung von e liegen, kann man durch Potenzreihen einer Variabeln t

$$v_i' = \mathfrak{P}_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ausdrücken, von denen man eine gleich Eins setzen kann.

Man erhält dann die reellen Lothlinien, welche die Umgebung der Lothlinie a bilden, wenn man die Ebenen (v_i') durch die zu ihnen conjugirt complexen (v_i'') schneidet. Diese sind aber durch die Reihen

$$v_i'' = \bar{\mathfrak{P}}_i(\bar{t}) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

*) Die Idee, zum Beweise der Irreducibilität der Congruenz aller Sehnen einer Raumcurve (oder aller Linien, die zwei Curven schneiden) Potenzreihen und ihre Fortsetzungen zu verwenden, wurde mir von Herrn Prof. Stickelberger mitgetheilt. In dem speciellen hier vorliegenden Falle hätte man auch die σ-Functionen verwenden können.

gegeben, wo $\overline{\mathfrak{P}}_i(t)$ aus $\mathfrak{P}_i(t)$ entsteht, indem man die Coefficienten durch die conjugirten Werthe ersetzt und wo $\bar{t}$ zu t conjugirt ist. Ist $t = t' + it''$, so werden die Liniencoordinaten der fraglichen Lothlinien Potenzreihen der reellen Grössen t', t'' mit reellen Coefficienten. Setzt man diese Reihen in die Gleichung (30) ein, so sind zwei Fälle möglich. Erstens die Gleichung ist identisch erfüllt für alle reellen t' und t'', die der Convergenzbedingung genügen. Oder, zweitens, sie ist nicht identisch erfüllt. Im letzten Falle wird durch sie t'' als Function von t' bestimmt und man erhält eine einfach unendliche Schaar von reellen Lothlinien, welche der Gleichung genügen. Da wir aber annehmen, *jede* Lothlinie von F erfülle die Gleichung (30), so ist die letzte Alternative nicht möglich und es bleibt nur die erste. Nach einem bekannten Satze wird die Gleichung auch dann erfüllt, wenn man für t' und t'' complexe Werthe setzt. Führt man also

$$t' = \frac{\xi + \eta}{2}, \qquad t'' = \frac{\xi - \eta}{2i}$$

ein, unter ξ und η beliebige complexe Veränderliche verstanden, die nur eine gewisse Convergenzbedingung erfüllen müssen, so wird $t = \xi$ $\bar{t} = \eta$ und es folgt, dass die Gleichung (30) erfüllt wird durch den Schnitt der Ebenen

$$v_i = \mathfrak{P}_i(\xi) \quad \text{und} \quad w_i = \overline{\mathfrak{P}}_i(\eta),$$

die in der Umgebung der Stellen e und $\bar{e}$ von E liegen. Der Gleichung wird dann auch genügt durch die sämmtlichen analytischen Fortsetzungen der Reihen $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$. Durch diese Fortsetzungen kann man aber, weil E nicht zerfällt, jedes Paar von Ebenen erreichen, die ihm angehören. Also muss die Gleichung (30) von *jeder* Linie der Congruenz Γ befriedigt werden.

§ 26.

Für die Lothlinien, welche von den Punkten der Schnittlinie l der Ebenen von ω und Ω ausgehen, ist $y_3 = z_4 = 0$, dagegen sind $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2$ beliebig. Daher wird für sie die Gleichung (30)

$$(33) \qquad \frac{(y_1 p_1 + y_2 p_2)^2 (\beta^2 y_1^2 + \alpha^2 y_2^2)}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \frac{(\beta^2 y_1 \pi_1 + \alpha^2 y_2 \pi_2)^2 (y_1^2 + y_2^2)}{(\beta^2 \pi_1^2 + \alpha^2 \pi_2^2 + \alpha^2 \beta^2 \pi_4^2)}.$$

Da $\beta^2 y_1^2 + \alpha^2 y_2^2$ und $y_1^2 + y_2^2$ nur complexe Linearfactoren haben, müssen sie durch einander theilbar sein, daher $\alpha^2 = \beta^2$, was gegen die Annahme streitet, dass ω von Ω verschieden ist. Nur wenn beide Seiten obiger Gleichung identisch Null sind, geht dieser Schluss nicht. Dann muss aber $p_1 = p_2 = \pi_1 = \pi_2 = 0$ sein, womit die Gleichung (30) zu

$$(34) \qquad \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_3^2} = \frac{\alpha^2 z_2^2 + \beta^2 z_1^2}{\alpha^2 \beta^2 z_4^2}$$

führen würde. Um zu beweisen dass diese Gleichung nicht für alle Linien der Congruenz bestehen kann, benutzen wir die Linie, für welche

$y_1 = y_2 = 0,\ y_3 = 1,\ y_4 = 0,\ z_1 = 0,\ z_2^2 = \alpha^2 - \beta^2,\ z_3 = 0,\ z_4 = 1$

ist. Eine beliebige Ebene durch diese Linie hat die Coordinaten

$$v_1 = x_2 - x_4 z_2,\quad v_2 = -x_1,\quad v_3 = 0,\quad v_4 = x_1 z_2,$$

wo die x Coordinaten eines beliebigen Punktes vorstellen, und es ist

$$\alpha^2(x_2 - x_4 z_2)^2 + \beta^2 x_1^2 + x_1^2 z_2^2 \equiv \alpha^2[(x_2 - x_4 z_2)^2 + x_1^2]$$

eine in den x identische Gleichung, so dass die angegebene Linie wirklich zu Γ gehört. Die Gleichung (34) ist aber für sie nicht möglich wenn $\alpha^2 \neq \beta^2$ ist.

Solange ϖ von Ω verschieden ist, kann demnach die Breitenbedingung nicht für alle Punkte von F erfüllt sein; und umgekehrt, ist sie erfüllt, so muss die geodätische Abbildung von F' auf F ähnlich sein

§ 27.

Die Linie, welche ich in dieser Abhandlung, wie in der früheren als Lothlinie bezeichnet habe, ist eine ganz beliebige Linie, die nur ihre Lage mit dem Fusspunkte stetig ändern soll. Ich habe sie, in Anlehnung an die Praxis, Lothlinie genannt, obschon von der Eigenschaft der Linie, für einen bestimmten ihrer Punkte die Richtung der Schwere darzustellen, gar kein Gebrauch gemacht ist. Man könnte also statt der physikalischen Lothlinie ebensogut jede andere wohl definirte Richtung verwenden, z. B. die der magnetischen Inclinationsnadel, wenn sie genügend constant wäre, was sie ja nicht ist. Oder man könnte in jedem Punkte von F' die Richtung willkürlich gegen die Objecte auf F' festlegen, so dass man sie jeden Augenblick wiederfinden und dass man der Hauptaxe eines Winkelmessinstrumentes mit Sicherheit die betreffende Richtung geben könnte. Freilich würden dabei Meridian, Länge, Breite und Azimut ihre gewöhnliche Bedeutung verlieren, aber man könnte dagegen vielleicht andere Vortheile erreichen, den z. B., dass diese geometrischen Lothlinien stärker gegeneinander geneigt wären als die physikalischen und dass sie daher eine genauere Bestimmung der Erdgestalt ermöglichten als diese.

Sur les méthodes d'intégration des équations différentielles ordinaires et quelques applications de la méthode de différentiation.

Par

W. Anissimoff à Varsovie.

§ 1.

Remarques préliminaires sur le problème de la théorie des équations différentielles ordinaires.

Le problème fondamental de la théorie des équations différentielles ordinaires peut être considéré et traité de deux points de vue différents. Prenons, pour fixer les idées, l'équation du premier ordre

$$f[x, y, y'] = 0. \tag{1}$$

L'équation (1), regardée en soi même, ne suppose que l'existence de y fonction de x avec une dérivée déterminée y', et exprime une relation entre ces variables x, y, y'; aux dérivées du deuxième et des ordres supérieurs l'équation (1) ne fait aucune allusion. En Analyse, on démontre, sous les conditions supplémentaires*) dont doit jouir $f(x, y, y')$, qu'il existe une fonction unique y de x, ayant une dérivée déterminée y', prenant pour $x = x_0$ une valeur arbitraire $y = y_0$ et satisfaisant à l'équation (1). Mais, ces conditions n'étant pas remplies, on n'a pas de raisons satisfaisantes pour nier l'existence de la fonction intégrale y, de même qu'on ne peut pas, en cas de l'existence de cette fonction, lui imposer la condition d'avoir les dérivées des ordres supérieurs.

Supposons, qu'il existe pour l'équation (1) son intégrale générale

$$F[x, y, \alpha] = 0, \tag{2}$$

d'où y est définie comme fonction de x et de constante arbitraire α.

Au premier point de vue, le but principal de la théorie des équations différentielles est la recherche et la détermination analytique de l'intégrale générale, pour quoi on se sert de fonctions, en nombre

*) Voyez, par exemple, E. Picard. — Traité d'Analyse, t. II, p. 291—304. Paris, 1893.

fini, algébriques, élémentaires et supérieures transcendantes, de quadratures et d'intégrales définies, dans lesquelles x joue le rôle d'un paramètre. Et on regarde le problème comme résolu, dès qu'on a trouvé pour F une expression de la forme ci-indiquée. Cependant, une telle solution du problème, on le voit bien, est, en général, *purement formelle*. En effet, l'équation (2) étant trouvée, souvent on ne peut pas, immédiatement d'après cette équation, dire rien des propriétés essentielles de notre fonction y, qui la caractérisent et dont elle diffère des autres fonctions. Une recherche supplémentaire sera nécessaire pour la résolution de ces questions importantes. Par exemple, l'équation

$$y' = \sqrt{(1-y^2)(1-x^2y^2)}, \quad x^2 < 1$$

étant donnée, le problème d'intégration, au sens indiqué plus haut, se résout au moyen de la quadrature

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-x^2y^2)}} = x + \alpha,$$

qui, les fonctions elliptiques n'étant pas connues, ne nous donnerait aucune indication (au moins immédiatement) sur les propriétés de y. On a aussi pour l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0, \quad \begin{cases} X = a_0x^4 + a_1x^3 + \cdots + a_4, \\ Y = a_0y^4 + a_1y^3 + \cdots + a_4, \end{cases}$$

l'intégrale générale

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int^y \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \alpha,$$

exprimée au moyen des quadratures. Mais cette équation intégrale nous apprend peu de choses sur les propriétés de la fonction cherchée, et il fallait avoir toute la pénétration de Lagrange*) pour faire voir qu'on a aussi

$$\left(\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x-y}\right)^2 - a_0(x+y)^2 - a_1(x+y) = \alpha,$$

la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques.

Les considerations précedentes mettent en avant, tout naturellement, une autre manière d'envisager le problème, dont il s'agit. *A ce deuxième point de vue*, le problème consiste dans l'étude des propriétés caractéristiques de la fonction intégrale, l'étude dont les résultats indiqueront pour cette fonction la forme analytique la plus

*) L. Euler. — Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris de Lagrange usus est, in integranda equatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Acta Acad. Imp. Sc. Petropolit., t. II. p. I, pag. 20—57.

simple. La question étant si posée, la théorie des fonctions d'une variable complexe avec ses propositions et théorèmes généraux offre, pensons nous contrairement aux avis de M. Korkine*), des ressources inappréciables. En beaucoup de cas, cette théorie, permettant de déterminer les propriétés caractéristiques (dans l'ordre des idées de Riemann) de la fonction intégrale, si elle ne donne pas le résultat final, aide au moins au succès de la recherche concernant la représentation analytique de cette fonction. Ainsi, par exemple, il y a déjà très longtemps, qu'on a connu, que l'intégrale générale de l'équation

$$X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \cdots + X_n y = 0$$

peut être représentée formellement par l'expression

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n,$$

où, $y_1, y_2, \ldots y_n$ étant les n intégrales particulières distinctes, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ designent des constantes arbitraires. Mais c'est M. Fuchs, qui, en s'appuyant sur les théorèmes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, a développé le premier la véritable nature analytique des fonctions satisfaisant à de telles équations. Les travaux de M. Fuchs nous ont montré la forme des intégrales dans le domaine d'un point singulier quelconque. Cette connaissance préliminaire de la représentation analytique des intégrales en facilite beaucoup le calcul.

Sans doute, il peut être très utile pour notre but — l'étude de la fonction intégrale — de savoir l'intégrale générale sous une des formes (2), mais, existant une infinité de telles formes vu la voie d'intégration, il s'arrive souvent, que la plus simple, au premier point de vue, manière d'intégrer donne des résultats moins convenables. Cela est bien évident, nous n'en citerons pas d'exemples. Quoi qu'il en soit, dans tout le cas, l'intégrale générale d'une forme quelconque étant un supplément essentiel à l'équation (1), la recherche des nouvelles méthodes d'intégration aussi que la révision et le développement des anciennes est pour l'Analyse d'une importance capitale.

C'est la discussion des méthodes d'intégration usitées qui est l'objet des lignes suivantes.

§ 2.

La méthode de multiplicateur pour l'intégration des équations différentielles du 1er ordre.

En Analyse, nous ne possédons au fond que deux méthodes générales d'intégration. L'une d'elles c'est *la méthode de multiplicateur*, attribuée ordinairement à Euler, qui a développé, à peu près complètement, la théorie de cette méthode et en a donné de nombreuses

*) A. Korkine. — Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. Math. Annal., Bd. XLVIII, p. 317.

applications; l'autre-c'est *la méthode de différentiation*, dont les conséquences importantes sont montrées par Lagrange et appliquées à une classe d'équations qui portent son nom. Ces deux méthodes, conduisant à la résolution du problème proposé par des voies variées, présentent, en leurs principes, une différence essentielle, que nous allons éclaircir.

L'équation (1) étant réduite à

$$M\,dx + N\,dy = 0, \tag{3}$$

Euler cherche son intégrale générale sous la forme

$$F[x, y] = \alpha. \tag{4}$$

On arrivera à ce but, après avoir trouvé un multiplicateur E sous la condition

$$E(M\,dx + N\,dy) = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy;$$

d'où il suit que E satisfait à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$N\frac{\partial E}{\partial x} - M\frac{\partial E}{\partial y} = E\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

On démontre aisément que ce multiplicateur E existe une fois que l'équation (3) a une intégrale de la forme (4). Mais, M et N étant données, la détermination de E ne réussit que dans peu de cas. C'est ainsi qu' Euler et plusieurs autres géomètres renversaient le problème; et, E étant pris en avant, cherchaient la forme des fonctions M et N. En faisant, par division, le coefficient $N = 1$, et supposant que le multiplicateur E est donné, on aura l'équation différentielle linéaire ordinaire

$$\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \log E}{\partial y} = \frac{\partial \log E}{\partial x},$$

log étant le signe des logarithmes népériens. On trouve

$$M = \frac{\varphi(x) + \int \frac{\partial E}{\partial x}\,dy}{E}, \tag{5}$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction arbitraire d'une seule variable x, et l'intégrale générale de l'équation (3) s'écrira dans ce cas sous la forme

$$\int \varphi(x)\,dx + \int E\,dy = \alpha. \tag{6}$$

La méthode de multiplicateur est des plus usitées. En effet, on se sert de cette méthode pour la séparation des variables. Dans les cas, où la séparation ne réussit pas immédiatement, on se prête de la transformation des variables afin de donner à l'équation considérée une telle forme, pour laquelle la séparation se ferait le plus simplement. On comprend tout de suite, que la transformation des variables ne peut jouer un rôle différent de celui que nous en avons indiqué; car,

l'expression $Mdx + Ndy$, n'étant pas la différentielle exacte, ne la deviendra pas après la transformation. Cette proposition est bien évidente, nous n'en insistons pas davantage.

Envisageons la méthode de multiplicateur d'un point de vue un peu différent. On a l'identité

$$E(M+Ny') = \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y},$$

nous disant que le multiplicateur d'Euler rend l'expression $M + Ny'$ la dérivée exacte par rapport à x de la fonction $F(x, y)$, dès qu'on y considère y comme fonction de x avec une dérivée déterminée y', et on a pour cette fonction y la relation

$$F[x, y] = \alpha,$$

si l'équation (1) est satisfaite. Quant aux dérivées des ordres supérieurs, dans la méthode de multiplicateur il n'y en a pas un mot: il peut arriver que, la fonction intégrale y n'ayant pas des dérivées des ordres supérieurs, l'intégrale générale existera et sera trouvée par la méthode de multiplicateur. Nous avons ainsi la conclusion suivante: *au point de vue de la théorie, la méthode de multiplicateur est applicable toutes les fois, quand, pour l'équation* (1), *existe son intégrale générale.*

§ 3.

La méthode de différentiation pour l'intégration des équations différentielles du 1er ordre.

Le problème de l'intégration peut se résoudre d'une autre manière. À côté de l'équation (1) on considère encore l'équation d'en déduite par la différentiation. Cette voie donne lieu à une méthode, qui peut être nommée *la méthode de différentiation.*

La fonction y, définie par l'équation (1), ayant les dérivées y' et y'', on obtient par la différentiation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \tag{7}$$

l'équation dont $f(x, y, y') = \alpha$ sera une des intégrales premières. Supposons que nous connaissons une autre intégrale

$$f_1[x, y, y'] = \alpha_1 \tag{8}$$

de la même équation. L'élimination de y' entre (1) et (8) nous donnera pour l'équation (1) son intégrale générale. La fonction f_1 de trois arguments x, y, y' se trouve déterminée, comme on le voit aisément, par l'équation aux dérivées partielles*) du premier ordre

*) Il ne faut pas, à notre avis, s'étonner que dans la méthode de multiplicateur aussi bien que dans la méthode de différentiation la résolution de la

$$\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}+y'\frac{\partial f_1}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial f_1}{\partial y'}}{\frac{\partial f}{\partial y'}}, \tag{9}$$

dont l'intégration est équivalente à celle-ci du système d'équations

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y'}}=\frac{dy}{y'\frac{\partial f}{\partial y'}}=-\frac{dy'}{\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{10}$$

Il est bien visible qu'il existe toujours pour le système (10) une intégrale $f_1(x, y, y') = \alpha_1$, différente de $f(x, y, y') = \alpha$, *s'il existe une fonction intégrale y de l'équation* (7) *dépendant de deux constantes arbitraires et ayant les dérivées déterminées y' et y''*. Quant aux dérivées des ordres supérieurs, la fonction y peut ne pas les avoir. Sous les conditions énoncées, *l'intégrale générale de l'équation* (1) *se trouve par la méthode de différentiation.*

Les considérations précedentes nous mettent en lumière la différence entre les deux méthodes d'intégration. Tandis que la méthode du multiplicateur est tout à fait générale, la méthode de différentiation n'est applicable que sous les conditions ci-indiquées.

§ 4.

Les équations différentielles du 1er ordre de Lagrange; une autre forme de ces équations.

Revenons à l'équation (7). Supposons que nous connaissons deux intégrales premières de cette équation $\varphi(x, y, y') = \alpha$ et $\psi(x, y, y') = \beta$, où α et β sont des constantes arbitraires. On obtient, y et y' étant exprimées en fonction de x, φ et ψ,

$$f[x, y, y'] = \Phi[x, \varphi, \psi].$$

Or, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ étant nulles simultanément, on conclut

$$f(x, y, y') = \Phi(\varphi, \psi).$$

Ainsi, vient-on aux équations de Lagrange

$$\Phi[x, \psi] = 0, \tag{11}$$

où $\varphi = \alpha$, $\psi = \beta$ sont les intégrales premières d'une même équation du deuxième ordre. L'intégrale générale de l'équation (10) sera donnée par le système

---

question principale se reduit à l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous en voyons la cause véritable en ce que la fonction cherchée y, définie par l'intégrale générale, est une fonction de deux variables indépendantes x et α, constante de l'intégration. De ces variables seulement x figure explicitement dans l'équation (1) et l'autre α doit apparaître nécessairement, quand nous faisons le dernier pas pour obtenir le résultat final.

$$(12)\qquad \begin{cases} \varphi[x, y, y'] = \alpha, \\ \psi[x, y, y'] = \beta, \end{cases} \quad \Phi[\alpha, \beta] = 0.$$

Les équations de Lagrange peuvent prendre une forme un peu plus différente. La fonction y étant définie par l'équation $f_0(x, y, y') = 0$ et admettant $y', y'', \ldots y^{(n+1)}$, on a par la différentiation

$$f_0 = 0,$$
$$f_1 = \frac{df_0}{dx} = 0,$$
$$\ldots\ldots$$
$$f_n = \frac{df_{n-1}}{dx} = 0.$$

Soient

$$\varphi_0[x, y, \ldots y^{(n)}] = \alpha_0,$$
$$\varphi_1[x, y, \ldots y^{(n)}] = \alpha_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_n[x, y, \ldots y^{(n)}] = \alpha_n$$

les $n + 1$ intégrales premières indépendantes de l'équation $f_n = 0$. On démontre sans peine qu'il y aura

$$f_0 = \Phi_0 [\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n],$$
$$f_1 = \Phi_1 [\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n],$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{n-1} = \Phi_{n-1}[\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n].$$

Ainsi, *si l'équation* (1) *du premier ordre peut être considérée comme le résultat de l'élimination de* $y'', y''', \ldots y^{(n)}$ *entre les équations*

$$(13)\qquad \begin{cases} \Phi_0 [\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n] = 0, \\ \Phi_1 [\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{n-1}[\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n] = 0, \end{cases}$$

$\varphi_0 = \alpha_0$, $\varphi_1 = \alpha_1, \ldots \varphi_n = \alpha_n$ *étant les* $n + 1$ *intégrales premières indépendantes d'une même équation d'ordre* $n + 1$, *l'intégrale générale de cette équation* (1) *sera représentée par le système*

$$(14)\qquad \begin{cases} \varphi_0 = \alpha_0, & \Phi_0 [\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n] = 0, \\ \varphi_1 = \alpha_1, & \Phi_1 [\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n] = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n = \alpha_n, & \Phi_{n-1}[\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n] = 0. \end{cases}$$

Par exemple, l'équation, résultante de l'élimination y'' entre

$$\Phi_0[y'', xy'' - y', x^2y'' - 2xy' + 2y] = 0,$$
$$\Phi_1[y'', xy'' - y', x^2y'' - 2xy' + 2y] = 0,$$

a pour l'intégrale générale

$$2y = \alpha_0 x^2 - 2\alpha_1 x + \alpha_2,$$

où les constantes arbitraires $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont liées par les relations

$$\Phi_0[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] = 0,$$
$$\Phi_1[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] = 0.$$

§ 5.

Discussion de l'équation (9) fondamentale dans la méthode de différentiation.

Reprenons l'équation (9) et le système (10) qui lui est conjugué. Pour ce système, une intégrale $f(x, y, y') = \alpha$ nous est donnée par le problème même. D'après le principe du multiplicateur dernier, principe de Jacobi, si fécond en applications, on trouvera, au moyen des quadratures, une autre intégrale $f_1(x, y, y') = \alpha$, toutes les fois, que nous sera connu le multiplicateur J de Jacobi pour le système (10). Cette remarque est bien importante.

Le multiplicateur J soit donné. Si l'équation (1) est résoluble par rapport à y', l'expression

$$J(y'dx - dy),$$

y' étant déterminée en fonction de x et y par l'équation (1), sera une différentielle exacte. On obtient, par suite,

$$f_1[x, y, y'] = \int J(y'dx - dy) \tag{15}$$

et le problème sera résolu. Le multiplicateur J de Jacobi se confond en ce cas avec le multiplicateur E d'Euler.

Quand il est bien plus facile de résoudre l'équation (1) par rapport à y, nous aurons la différentielle exacte

$$J\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial y'}dy'}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

après avoir exprimé y en fonction de x et y', et nous obtiendrons

$$f_1[x, y, y'] = \int J\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial y'}dy'}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{16}$$

Enfin, l'équation (1) étant résoluble par rapport à x, on trouve

$$f_1[x, y, y'] = \int J\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial y'}dy'}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \tag{17}$$

où, sous le signe d'intégration, on a une différentielle exacte.

Supposons maintenant, que le multiplicateur J ne nous soit pas connu. En ce cas, nous n'aurons pour la détermination de J que l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial J}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial J}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial J}{\partial y'} = J\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{18}$$

Il n'est pas nécessaire, pour notre but, d'intégrer complètement l'équation (18), car il suffit de connaître pour J une solution particulière quelconque. Mais, ce problème si simple qu'il le soit, est au dessus des forces de l'Analyse en son état présent.

Nous ne pouvons non plus résoudre, en cas général, le problème inverse: J étant donné, déterminer la fonction correspondante $f(x, y, y')$. Ainsi, nous nous contenterons de traiter les cas les plus simples de ce problème inverse.

Les cas, où J est une constante ou une fonction de l'une des variables x, y, y', ne nous donnent aucune nouvelle classe des équations intégrables car on arrive aux formes suivantes

$$\begin{aligned}
&\text{I)} && J = \text{const.}, && y' = \varphi(x);\\
&\text{II)} && J = \Theta(x), && y' = y\varphi(x) + \psi(x);\\
&\text{III)} && J = \Theta(y), && y' = \varphi(x)\,.\,\psi(y);\\
&\text{IV)} && J = \Theta(y'), && y = x\varphi(y') + \psi(y').
\end{aligned}$$

On obtient plus de résultats utiles quand J dépend de deux quelconques des variables x, y, y'.

1^er^ *cas:* $J = \Theta(x, y)$. L'équation (18) devenant

$$J\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial J}{\partial x} + y'\frac{\partial J}{\partial y'}\right)\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

la fonction $f(x, y, y')$ contient x comme un paramètre. On s'assure sans peine, que l'équation (1) sera de la forme

$$Jy' + \int \frac{\partial J}{\partial x}\,dy + \varphi(x) = 0, \tag{19}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction arbitraire de x. L'équation (19) est identique à celle (3), si l'on y pose $N = 1$ et si l'on détermine M d'après la formule (5) dans laquelle on a pris $J = E$.

2^me^ *cas:* $J = \Theta(x, y')$. Dans ce cas, on détermine la forme de la fonction $f(x, y, y')$ par l'équation

$$\frac{\partial J}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial x} + \left(J + y'\frac{\partial J}{\partial y'}\right)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial J}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

dont l'intégration exige celle du système

$$\frac{dx}{\frac{\partial J}{\partial y'}} = \frac{dy}{J + y'\frac{\partial J}{\partial y'}} = -\frac{dy'}{\frac{\partial J}{\partial x}}.$$

On obtient aisément deux intégrales

$$J = \alpha,$$

$$y - \int \frac{1 + y' \frac{\partial \log J}{\partial y'}}{\frac{\partial \log J}{\partial y'}} dx = \alpha_1,$$

y' sous le signe d'intégration étant remplacée par son expression en fonction de x et α au moyen de l'équation $J = \alpha$; l'intégration étant faite, on pose $\alpha = J$. On arrive ainsi à l'équation

$$y + \varphi(J) = \int \frac{1 + y' \frac{\partial \log J}{\partial y'}}{\frac{\partial \log J}{\partial y'}} dx, \tag{20}$$

φ étant le signe d'une fonction arbitraire.

3^me^ *cas:* $J = \Theta(y, y')$. L'équation (18) prend la forme

$$\frac{\partial J}{\partial y'} \frac{\partial f}{\partial x} + \left(J + y' \frac{\partial J}{\partial y'}\right) \frac{\partial f}{\partial y} - y' \frac{\partial J}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

dont le système conjugué sera

$$\frac{dx}{\frac{\partial J}{\partial y'}} = \frac{dy}{J + y' \frac{\partial J}{\partial y'}} = -\frac{dy'}{y' \frac{\partial J}{\partial y}}.$$

On calcule sans peine deux intégrales de ce système

$$Jy' = \alpha,$$

$$x + \int \frac{\frac{\partial J}{\partial y'}}{y' \frac{\partial J}{\partial y}} dy' = \alpha_1,$$

d'où l'on conclut que l'équation (1) doit être de la forme

$$x + \int \frac{\frac{\partial J}{\partial y'}}{y' \frac{\partial J}{\partial y}} dy' = \varphi(Jy'). \tag{21}$$

Pour les équations (19), (20), (21) l'intégrale $f_1(x, y, y') = \alpha_1$ sera donnée par l'une des formules (15), (16), (17).

§ 6.

La méthode de différentiation pour l'intégration des équations différentielles d'ordre n.

Considérons une équation différentielle d'ordre n

$$f[x, y, \ldots y^{(n)}] = 0. \tag{22}$$

L'application de la méthode de multiplicateur pour la recherche de l'intégrale générale nous conduirait aux calculs de même qu'aux résultats compliqués; nous n'insistons pas sur ce point. La méthode de différentiation, nous donne, au contraire comme on le verra, des résultats aussi simples qu'intéressants. Nous étudierons cette méthode avec plus de détails.

Différentions l'équation (22), en supposant que la fonction y ait les dérivées $y', y'', \ldots y^{(n+1)}$; on aura l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y^{(n+1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0, \tag{23}$$

dont $f(x, y, \ldots y^{(n)}) = \alpha$ sera une intégrale première. Les n autres intégrales premières

$$\begin{aligned} f_1[x, y, \ldots y^{(n)}] &= \alpha_1, \\ f_2[x, y, \ldots y^{(n)}] &= \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_n[x, y, \ldots y^{(n)}] &= \alpha_n \end{aligned}$$

étant connues, nous obtiendrons l'intégrale générale de l'équation (22) en éliminant $y', y'', \ldots y^{(n)}$ entre les équations

$$f = 0, \; f_1 = \alpha_1 \ldots f_n = \alpha_n.$$

Arrêtons-nous à l'hypothèse la plus simple: toutes les $n + 1$ intégrales premières de l'équation (23) nous sont connues

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_0[x, y, \ldots y^{(n)}] &= \alpha_0, \\ \varphi_1[x, y, \ldots y^{(n)}] &= \alpha_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \varphi_n[x, y, \ldots y^{(n)}] &= \alpha_n. \end{aligned} \right. \tag{24}$$

On démontre, sans peine, que

$$f[x, y, \ldots y^{(n)}] = \Phi[\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n];$$

par suite, l'équation (22) sera de la forme

$$\Phi[\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n] = 0 \tag{25}$$

et son intégrale générale est représentée par le système (24), en même temps que les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ sont liées par la relation

$$\Phi[\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n] = 0.$$

De même, étant donnée l'équation

$$\Phi[\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_k] = 0 \qquad k \leqq n \tag{26}$$

le système

$$\begin{cases} \varphi_0 = \alpha_0, \\ \varphi_1 = \alpha_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_k = \alpha_k \end{cases} \qquad \Phi[\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_k] = 0 \tag{27}$$

représentera son intégrale avec k constantes arbitraires. Toutes ces propositions sont dues à J. Serret*).

Revenons au cas général. Toutes les fonctions f_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ satisfaisant à l'équation de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \cdots + y^{(n+1)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

nous avons, pour déterminer ces fonctions des arguments $x, y, \ldots y^{(n)}$, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \cdots + y^{(n)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}}{\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}}{\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}} \tag{28}$$

avec le système conjugué

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}} = \frac{dy}{y' \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}} = \cdots = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}} = -\frac{dy^{(n)}}{\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}}. \tag{29}$$

Pour le système (29) l'une des intégrales nous est déjà connue: c'est $f(x, y, \ldots y^{(n)}) = \alpha$. D'après le principe du multiplicateur dernier, si l'on nous donne les $n - 1$ autres intégrales du même système aussi que le multiplicateur J, la dernière intégrale sera trouvée au moyen des quadratures. Or, donner à côté de l'équation (22) les $n - 1$ intégrales du système (29) c'est la même chose que donner pour cette équation (22) une intégrale avec les $n - 1$ constantes arbitraires. On vient ainsi à la conclusion: étant données une intégrale de l'équation (22) avec les $n - 1$ constantes arbitraires aussi que le multiplicateur J du système (29), l'intégrale générale cherchée se déterminera par des quadratures. Cela posé, il est bien intéressant d'étudier de plus près

*) Oeuvres de Lagrange, t. IX. Note de M. J. Serret, p. 415—421. Paris, 1881.

la relation existante entre J et la fonction f. On trouve sans peine pour J l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\left[\frac{\partial J}{\partial x}+y'\frac{\partial J}{\partial y}+\cdots+y^{(n)}\frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}}\right] \tag{30}$$
$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots+y^{(n)}\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right]\frac{\partial J}{\partial y^{(n)}}+J\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

et il y a lieu de considérer quelques hypothèses particulières relatives à J.

1re *hypothèse.* J étant constante, on voit tout de suite que $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}=0$ et l'équation (22) sera de la forme

$$y^{(n)}=\varphi[x, y, \ldots y^{(n-2)}]. \tag{31}$$

2me *hypothèse.* Ayant $J=\Theta(x)$, l'équation (30) devient

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\frac{\partial J}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}J$$

et on trouve aisément que l'équation (22) doit être de la forme

$$y^{(n)}=Xy^{(n-1)}+\varphi[x, y, \ldots y^{(n-2)}], \tag{32}$$

X ne dépendant que de x.

3me *hypothèse.* Supposons $J=\Theta[y^{(k)}]$, k recevant les valeurs $k=0, 1, \ldots n-2$ et $y^{(0)}$ étant y; on a

$$y^{k+1}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\frac{\partial J}{\partial y^{(k)}}=\frac{\partial f}{\partial y^{(k-1)}}J$$

et on calcule, que l'équation (22) deviendra

$$y^{(n)}=Y_k y^{(k+1)}y^{(n-1)}+\varphi[x, y, \ldots y^{(n-2)}], \quad k=0, 1, \ldots n-2 \tag{33}$$

où Y_k est une fonction d'une seule variable $y^{(k)}$.

4me *hypothèse.* En cas $J=\Theta[y^{(n-1)}]$, on a

$$y^{(n)}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}}=\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}J,$$

et l'équation (22) prendra la forme

$$y^{(n)}=Y_{n-1}\varphi[x, y, \ldots y^{(n-2)}], \tag{34}$$

Y_{n-1} ne dépendant que de $y^{(n-1)}$.

5me *hypothèse.* Enfin, en supposant $J=[\Theta y^{(n)}]$ on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots+y^{(n-1)}\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}+Y_n\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}=0,$$

et on calculera que l'équation (22) sera de la forme

$$y^{(n)}=\varphi[u_1, u_2, \ldots u_n], \tag{35}$$

où l'on a désigné

$$u_x=y^{(n-x)}-\frac{x}{1}y^{(n-x+1)}+\cdots+\frac{(-x)^{x-1}}{1.2.x-1}y^{(n-1)}+\frac{(-x)^x}{1.2\ldots x}Y_n,$$
$$x=1, 2, \ldots n.$$

En nous rappelant tout ce qui est dit plus haut, nous concluons:

L'intégrale générale des équations (31), (32), (33), (34) *et* (35) *se trouve au moyen des quadratures, si l'on donne pour ces équations une intégrale avec les* $n-1$ *constantes arbitraires.*

La proposition concernant l'équation (31) a été déjà indiquée et démontrée (en cas $n=2$) par Jacobi*). Nous rencontrons aussi chez Jacobi**) un cas particulier $n=2$ du théorème relatif à l'équation (32). Quant aux autres équations, les propositions leur correspondantes, paraissent ici, aussi bien que nous le savons, pour la première fois.

§ 7.

L'application de la méthode de différentiation au problème des isopérimetres.

Considérons le cas, où il s'agit de déterminer y en fonction de x de telle manière que l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} F[x, y, \ldots y^{(n)}]\, dx$$

soit un maximum ou un minimum. Le problème, comme on sait, se réduit à l'intégration de l'équation

$$f[x, y, \ldots y^{(2n)}] = \frac{d^n P_n}{dx^n} - \frac{d^{n-1} P_{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + (-1)^n P_0 = 0,$$

où l'on pose

$$P_0 = \frac{\partial F}{\partial y},\quad P_1 = \frac{\partial F}{\partial y'}, \cdots P_n = \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}.$$

En nous reportant à l'équation de la forme (30) déterminant le multiplicateur J, calculons

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}}{\dfrac{\partial f}{\partial y^{(2n)}}}.$$

Les termes avec $y^{(2n)}$ et $y^{(2n-1)}$ ne proviennent que des expressions $\frac{d^n P_n}{dx^n}$, $\frac{d^{n-1} P_{n-1}}{dx^{n-1}}$. En cas $n > 1$ on trouve

$$\frac{d^n P_n}{dx^n} - \frac{d^{n-1} P_{n-1}}{dx^{n-1}} = y^{(2n)} \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)^2}} + n y^{(2n-1)} \frac{d}{dx} \log \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)^2}} + \psi[x, y, \ldots y^{(2n-2)}];$$

*) C. Jacobi. — Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium applicandi. Gesam. Werke, Bd. IV, pag. 399. — Vorlesungen über Dynamik. Gesam. Werke, Supplementband, pag. 81–82.

**) C. Jacobi. — Theoria novi ... pag. 408.

en supposant, que J ne dépend pas de $y^{(2n)}$, on vient sans peine à la formule

$$J = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}}\right]^n. \tag{36}$$

La même formule, comme on s'assure directement, est vraie aussi en cas exclu $n = 1$. Vu ceci, la méthode de différentiation avec le principe du multiplicateur dernier nous amène à cette proposition de Jacobi*): *l'intégrale générale de l'équation d'ordre* $2n$ (35) *des isopérimètres s'obtient au moyen des quadratures toutes les fois, quand on sait pour cette équation une intégrale avec* $2n - 1$ *constantes arbitraires.*

Varsovie, 7.—19. octobre 1897.

*) C. Jacobi. — Theoria novi .... Gesam. Werke, Bd. IV, pag. 498.

Ueber die Entwickelungscoefficienten der lemniscatischen Functionen*).

Von

A. Hurwitz in Zürich.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf gewisse Zahlen, welche ähnliche Eigenschaften besitzen, wie die Bernoulli'schen Zahlen. Die letzteren lassen sich bekanntlich durch die Gleichung

$$\sum \frac{1}{r^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

definiren, wobei die Summe über alle positiven und negativen reellen ganzen Zahlen r mit Ausschluss der Null zu erstrecken ist und die Zahl π als Werth des Integrales

$$\pi = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

aufgefasst werden kann. In ähnlicher Weise können und sollen die hier zu untersuchenden Zahlen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ durch die Gleichung

$$\text{(D)} \qquad \sum \frac{1}{(r + is)^{4n}} = \frac{(2\omega)^{4n}}{(4n)!} E_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

definirt werden. Dabei ist die Summe auf alle complexen ganzen Zahlen $r + is$ mit Ausschluss der Null auszudehnen; ferner bedeutet ω den Werth des Integrales

$$\omega = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = 2{,}622057 \ldots .$$

Die Zahlen E_n nehmen also, ihrer Definition nach, eine entsprechende Stellung in der Theorie der Gaussischen complexen ganzen Zahlen

*) Vgl. eine vorläufige Mittheilung in den Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Classe. 1897, pag. 273.

n, wie die Bernoulli'schen Zahlen in der Theorie der reellen ganzen hlen.

Die Zahlen E_n sind übrigens, ebenso wie die Bernoulli'schen hlen, positive reelle rationale Zahlen. Es wird sich dies weiterhin unmittelbare Folge der Thatsache ergeben, dass die Zahlen E_n im esentlichen mit den Entwickelungscoefficienten einer gewissen lemnisischen Function, d. h. einer doppeltperiodischen Function, deren riodenparallelogramm ein Quadrat ist, identisch sind. Hierin liegt e weitere Analogie der Zahlen E_n mit den Bernoulli'schen Zahlen. nn die letzteren sind bekanntlich im Wesentlichen die Entwickelungsfficienten einer einfach periodischen Function, der Cotangente.

Aber auch eine tiefer liegende Eigenschaft der Bernoulli'schen hlen, nämlich diejenige, welche sich auf ihre Partialbruchzerlegung ieht und in dem v. Staudt-Clausen'schen Satze ihren Ausdruck let, besitzt ihr völlig entsprechendes Gegenbild bei den Zahlen E_n. ses nachzuweisen, also die Herleitung desjenigen Satzes über die hlen E_n, welcher dem v. Staudt-Clausen'schen Satze von den noulli'schen Zahlen entspricht, bildet das Hauptziel der folgenden ersuchungen. Dabei sind die Methoden, deren ich mich bediene, Theil von allgemeinem Charakter, so dass dieselben auch über vorliegenden speciellen Zweck hinaus bei Untersuchungen ähnr Art brauchbar sein dürften.

§ 1.

Ganzzahlige Potenzreihen.

Um den Gang der Untersuchung später nicht unterbrechen zu sen, schicke ich hier einige allgemeine Sätze über Potenzreihen us, welche weiterhin zur Anwendung gelangen. Diese Sätze be- en sich auf Potenzreihen einer complexen Variabeln u, welche Gestalt

$$\mathfrak{P} = c_0 + c_1 \frac{u}{1!} + c_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{u^n}{n!} + \cdots$$

tzen, wo $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ ganze rationale Zahlen bezeichnen. Zur Abkürzung will ich eine derartige Potenzreihe „ganzzahlig" nen.

Der Inbegriff aller ganzzahligen Potenzreihen bildet einen „Intetätsbereich", d. h. Summe, Differenz und Product irgend zweier zzahligen Potenzreihen sind wiederum ganzzahlige Reihen. Oder anderer Ausdrucksweise: im Systeme aller ganzzahligen Potenzen sind Addition, Subtraction und Multiplication unbeschränkt führbare Operationen. Für die Addition und Subtraction leuchtet

diese Thatsache unmittelbar ein. Für die Multiplication folgt sie aus der Bemerkung, dass das Product der Reihe (1) in die Reihe

$$\mathfrak{P}_1 = d_0 + d_1 \frac{u}{1!} + d_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + d_n \frac{u^n}{n!} + \cdots \tag{2}$$

durch die Reihe

$$\mathfrak{P}_2 = e_0 + e_1 \frac{u}{1!} + e_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + e_n \frac{u^n}{n!} + \cdots \tag{3}$$

vorgestellt ist, wenn man allgemein

$$e_n = c_0 d_n + n_1 c_1 d_{n-1} + n_2 c_2 d_{n-2} + \cdots + c_n d_0$$

setzt, unter $n_1, n_2, \ldots$ die Binomialcoefficienten zur Basis n verstanden.

In dem Systeme der ganzzahligen Reihen sind aber überdies auch die Operationen der Differentiation und der Integration von $u = 0$ ab unbeschränkt ausführbar.

Denn bedeutet $\mathfrak{P}$ die ganzzahlige Reihe (1), so sind offenbar auch

$$\frac{d\mathfrak{P}}{du} = c_1 + c_2 \frac{u}{1!} + \cdots + c_{n+1} \frac{u^n}{n!} + \cdots$$

und

$$\int_0^u \mathfrak{P}\, du = c_0 u + c_1 \frac{u^2}{2!} + \cdots + c_{n-1} \frac{u^n}{n!} + \cdots$$

ganzzahlige Reihen.

Die Division ist im Gebiete der ganzzahligen Reihen nicht unbeschränkt ausführbar, und hierauf gründet sich die Definition:

„Eine ganzzahlige Reihe $\mathfrak{P}_1$ heisst durch eine andere $\mathfrak{P}$ theilbar, wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}}$ ebenfalls eine ganzzahlige Reihe ist."

Die Theilbarkeit einer Reihe $\mathfrak{P}_1$ durch eine andere $\mathfrak{P}$ deute ich auch an durch die Congruenz

$$\mathfrak{P}_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}},$$

und allgemeiner schreibe ich

$$\mathfrak{P}_1 \equiv \mathfrak{P}_2 \pmod{\mathfrak{P}},$$

wenn $\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2$ durch $\mathfrak{P}$ theilbar ist.

Im Folgenden werde ich namentlich solche Congruenzen zu betrachten haben, deren Modul $\mathfrak{P}$ sich auf eine ganze nicht verschwindende Zahl m reducirt. Offenbar ist eine derartige Congruenz

$$\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}_1 \pmod{m},$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ die Reihen (1) und (2) bezeichnen mögen, völlig gleichbedeutend mit den unzählig vielen gewöhnlichen Congruenzen

$$c_n \equiv d_n \pmod{m} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wenn die ganzzahlige Reihe (1) Divisor jeder beliebigen ganzzahligen Reihe, also insbesondere auch Divisor der Zahl 1, sein soll, so ist

offenbar erforderlich, dass $c_0 = 1$ ist. Diese nothwendige Bedingung ist aber auch hinreichend, wie aus der Gleichung

$$\frac{1}{\mathfrak{P}(u)} = 1 + [1 - \mathfrak{P}(u)] + [1 - \mathfrak{P}(u)]^2 + \cdots$$

hervorgeht. In dem Gebiete der ganzzahligen Reihen spielen also diejenigen Reihen, welche sich für $u = 0$ auf 1 reduciren, die Rolle der Einheiten. Diese Reihen will ich deshalb „Einheitsreihen" nennen.

Von Wichtigkeit wird weiterhin der folgende

Satz I. *Ist $\mathfrak{P}$ eine ganzzahlige Reihe, die mit u verschwindet, also kein constantes Glied enthält, so ist für jede positive Zahl m*

$$\mathfrak{P}^m \equiv 0 \pmod{m!}. \tag{4}$$

Die Behauptung des Satzes, dass $\frac{1}{m!}\mathfrak{P}^m$ ganzzahlig ist, bedarf für $m = 1$ keines Beweises. Daher genügt es die Richtigkeit des Satzes nachzuweisen unter der Voraussetzung, dass der Satz schon für den Fall bewiesen sei, wo die Zahl $m - 1$ an die Stelle der Zahl m tritt. Nun ist aber

$$\frac{1}{m!}\mathfrak{P}^m = \int_0^u \frac{1}{(m-1)!}\mathfrak{P}^{m-1}\cdot\mathfrak{P}'\,du,$$

und da $\frac{1}{(m-1)!}\mathfrak{P}^{m-1}$ und $\mathfrak{P}'$ ganzzahlige Reihen sind, so folgt aus der vorstehenden Gleichung, dass $\frac{1}{m!}\mathfrak{P}^m$ ebenfalls ganzzahlig ist, w. z. b. w.

An den Satz I knüpft sich ein anderer, welcher ebenfalls Bezug hat auf die m^{te} Potenz einer ganzzahligen Reihe ohne constantes Glied. Es sei

$$\mathfrak{P} = c_1 u + c_2\frac{u^2}{2!} + \cdots + c_n\frac{u^n}{n!} + \cdots$$

eine solche Reihe und es werde

$$\mathfrak{P}^m \equiv C_m\frac{u^m}{m!} + C_{m+1}\frac{u^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots + C_k\frac{u^k}{k!} + \cdots$$

gesetzt. Dann ist $\frac{C_m}{m!} = c_1^m$, $\frac{C_{m+1}}{(m+1)!} = m c_1^{m-1}\cdot\frac{c_2}{2!}$, u. s. w.; allgemein ist $\frac{C_k}{k!}$ eine ganze ganzzahlige Function von c_1 $\frac{c_2}{2!}, \cdots \frac{c_{k-m+1}}{(k-m+1)!}$ und folglich wird der Nenner von $\frac{C_k}{k!}$, wenn man diese Zahl auf die kleinste Benennung bringt, keinen Primfactor enthalten, der grösser ist als $k - m + 1$. Wenn daher $k!$ durch eine Primzahl $p > k - m + 1$ theilbar ist, so muss p nothwendig in C_k aufgehen. Somit gilt der

Satz II. *Wenn die Reihe*

$$C_m\frac{u^m}{m!} + C_{m+1}\frac{u^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots + C_k\frac{u^k}{k!} + \cdots$$

die m^{te} Potenz einer ganzzahligen Reihe ist, so enthält C_k jede Primzahl als Factor, die zwischen $k - m + 1$ und $k + 1$ liegt.

Eine unmittelbare Folge des Satzes I ist der weitere Satz:

Setzt man in einer beliebigen ganzzahligen Reihe an Stelle von u eine andere ganzzahlige Reihe ohne constantes Glied und ordnet sodann nach Potenzen von u, so erhält man wiederum eine ganzzahlige Reihe.

Wenn beispielsweise $\mathfrak{P}(u)$ eine mit u verschwindende ganzzahlige Reihe ist, so wird die Entwickelung von $e^{\mathfrak{P}(u)}$ nach Potenzen von u eine ganzzahlige Reihe, und zwar offenbar eine Einheitsreihe sein. Ebenso ist die Entwickelung des Logarithmus einer Einheitsreihe eine ganzzahlige Reihe, und man erkennt hieraus, dass die aus der Function $e^{\mathfrak{P}(u)}$ entspringende Reihe die allgemeinste Einheitsreihe vorstellt. —

Man kann dieser ganzen Betrachtung eine andere, für manche Zwecke geeignetere Wendung geben, indem man an die Stelle der Potenzreihen die analytischen Functionen setzt, welche sie definiren. Dann hat man es offenbar mit dem Inbegriff derjenigen analytischen Functionen zu thun, welche an der Stelle $u = 0$ regulär sind und an dieser Stelle ebenso wie alle ihre Ableitungen ganzzahlige Werthe annehmen.

Von dieser Auffassung ausgehend, beweist man leicht noch die folgenden Sätze, welche ich hier anführe, weil sie weiterhin — freilich in speciellerer Form — zur Geltung kommen.

Erstens: Es sei $\varphi(u)$ eine analytische Function, welche an der Stelle $u = 0$ regulär ist und einer Differentialgleichung der Gestalt

$$\varphi^{(n)}(u) = G\left(\varphi(u),\ \varphi'(u),\ \ldots\ \varphi^{(n-1)}(u)\right) \tag{5}$$

genügt. Dabei soll G eine ganze rationale Function der eingeklammerten Argumente bedeuten mit Coefficienten, welche ganzzahlige Reihen sind. Wenn dann

$$\varphi(0),\ \varphi'(0),\ \ldots\ \varphi^{(n-1)}(0)$$

ganze Zahlen sind, so ist die Entwickelung von $\varphi(u)$ nach Potenzen von u eine ganzzahlige Reihe.

In der That ergiebt sich successive, indem man die Differentialgleichung (5) wiederholt nach u differenzirt, dass

$$\varphi^{(n)}(0),\ \varphi^{(n+1)}(0),\ \varphi^{(n+2}(0), \ldots$$

sämmtlich ganze Zahlen sind*).

*) Der Satz gilt, falls $\varphi(0) = 0$ ist, auch dann noch, wenn die rechte Seite der Differentialgleichung (5) eine ganze rationale Function von

$$\varphi(u),\ \varphi'(u), \ldots\ \varphi^{(n-1)}(u)$$

der Gestalt

$$\sum A\,\frac{(\varphi)^r}{r!}\,(\varphi')^{r_1}\cdots(\varphi^{(n-1)})^{r_{n-1}}$$

ist, wobei die Coefficienten A ganzzahlige Reihen bedeuten.

Zweitens: Durch Umkehrung der Reihe

$$t = \mathfrak{P}(u) = u + c_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{u^n}{n!} + \cdots$$

möge die Reihe

$$u = \mathfrak{P}_1(t) = t + d_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + d_n \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

entstehen. Wenn nun $\mathfrak{P}(u)$ eine ganzzahlige Reihe ist, so gilt das Nämliche von der Reihe $\mathfrak{P}_1(t)$.

Es ist nämlich $\frac{d^n u}{dt^n} \cdot \left(\frac{dt}{du}\right)^{2n-1}$ eine ganze ganzzahlige Function von $\frac{dt}{du}, \frac{d^2t}{du^2}, \cdots \frac{d^n t}{du^n}$ und folglich (wie die Annahme $t = u = 0$ ergiebt) d_n eine ganzzahlige Function von $c_2, \ldots c_n$, woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die vorstehenden Betrachtungen und Sätze ohne wesentliche Aenderung auch dann noch gelten, wenn man an die Stelle der „ganzzahligen" Reihen diejenigen Potenzreihen (1) treten lässt, für welche $c_0, c_1, c_2, \ldots$ complexe ganze Zahlen $a + ib$ im Gaussischen Sinne oder, noch allgemeiner, ganze algebraische Zahlen eines endlichen Zahlkörpers sind.

§ 2.

Die Zahlen E_n als Entwickelungscoefficienten.

Aus der Definitionsgleichung (D) der Zahlen E_n ist ersichtlich, dass diese Zahlen bei der Entwickelung der Weierstrass'schen Function

$$(6) \qquad \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum \left\{ \frac{1}{(u-(r+is)\omega)^2} - \frac{1}{((r+is)\omega)^2} \right\}$$

nach aufsteigenden Potenzen von u zum Vorschein kommen werden. In der That ergiebt sich ohne Schwierigkeit, dass

$$(7) \quad \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{2^4 E_1}{4} \cdot \frac{u^2}{2!} + \frac{2^5 E_2}{8} \cdot \frac{u^6}{6!} + \cdots + \frac{2^{4n} E_n}{4n} \cdot \frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!} + \cdots$$

ist. Durch die Substitution $x = \frac{1}{\sqrt{s}}$ erhält man für die reelle Periode ω die Darstellung

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2\int_1^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3-4s}}.$$

Folglich haben die Invarianten von $\wp(u)$ die Werthe

und die Differentialgleichung der Function $\wp(u)$ lautet daher:

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - 4\wp(u). \tag{8}$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich zunächst in bekannter Weise eine Recursionsformel für die Zahlen $E_1, E_2, E_3, \ldots$. Man differenzire nämlich (8) nach u, wodurch man

$$\wp''(u) = 6\wp^2(u) - 2$$

findet; hierin setze man nach (7)

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_1^\infty \frac{2^{4n} E_n}{4n} \cdot \frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!},$$

$$\wp''(u) = \frac{6}{u^4} + \sum_1^\infty \frac{2^{4n} E_n}{4n} \cdot \frac{u^{4n-4}}{(4n-4)!}.$$

Der Vergleich der Coefficienten der einzelnen Potenzen von u ergiebt dann

$$E_1 = \frac{1}{10}$$

und

$$(2n-3)(4n-1)(4n+1)E_n = 3\sum_{r+s=n}(4r-1)(4s-1)(4n)_{4r} \cdot E_r E_s \tag{9}$$

$$(n = 2, 3, 4, \ldots)$$

wobei die Summation auf alle positiven Zahlen r, s auszudehnen ist, welche der Bedingung $r + s = n$ genügen. Unter $(4n)_{4r}$ ist der $4r^{\text{te}}$ Binomialcoefficient zur Basis $4n$ zu verstehen.

Aus der Formel (9) geht hervor, dass die Zahlen E_n positive, reelle rationale Zahlen sind. Am Schlusse dieser Arbeit findet man eine Tabelle der Zahlen E_n, die ich auf Grund der Formel (9) hergestellt habe.

§ 3.

Die Function $\varphi(u)$.

Die Function

$$\varphi(u) = \sqrt{\frac{1}{\wp(u)}} = u + k_1 \frac{u^5}{5!} + k_2 \frac{u^9}{9!} + \cdots + k_n \frac{u^{4n+1}}{(4n+1)!} + \cdots \tag{10}$$

befriedigt die Differentialgleichung

$$\varphi'^2(u) = 1 - \varphi^4(u). \tag{11}$$

Sie ist diejenige eindeutige doppeltperiodische Function, welche Eisenstein seinen Untersuchungen über die biquadratischen Reste zu Grunde gelegt hat*). Die Werthe

*) Eisenstein, Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen I. (Crelle's Journal, Bd. 30 oder Mathematische Abhandlungen, Berlin 1847, pag. 129.)

$$2\omega, \quad (1+i)\omega$$

bilden ein Paar primitiver Perioden von $\varphi(u)$. Das Additionstheorem dieser Function spricht sich in der Gleichung aus:

$$\varphi(u+v) = \frac{\varphi(u)\,\varphi'(v) + \varphi(v)\,\varphi'(u)}{1 + \varphi^2(u)\,\varphi^2(v)}. \tag{12}$$

Ferner geht aus (10) hervor, dass

$$\varphi(iu) = i\varphi(u) \tag{13}$$

ist. Durch Differentiation von (11) ergiebt sich

$$\varphi''(u) = -2\varphi^3(u), \tag{14}$$

und diese Differentialgleichung hat die Gestalt (5) in § 1. Daraus folgt, dass die Entwickelungscoefficienten

$$k_0 = 1, \; k_1, \; k_2, \ldots k_n, \ldots$$

der Function $\varphi(u)$ sämmtlich reelle ganze Zahlen sind.

Bemerkenswerth und für die weiteren Untersuchungen wichtig ist die Thatsache, dass sich die Entwickelungscoefficienten der Functionen $\frac{1}{\varphi(u)}$ und $\frac{1}{2}\varphi^2(u)$ in einfacher Weise durch die Zahlen E_n ausdrücken lassen. Die Entwickelungen dieser Functionen will ich in folgender Form ansetzen:

$$\sqrt{\varphi(u)} = \frac{1}{\varphi(u)} = \frac{1}{u} + \frac{F_1}{4}\cdot\frac{u^3}{3!} + \frac{F_2}{8}\cdot\frac{u^7}{7!} + \cdots + \frac{F_n}{4n}\,\frac{u^{4n-1}}{(4n-1)!} + \cdots, \tag{15}$$

$$\frac{1}{2\varphi(u)} = \frac{1}{2}\varphi^2(u) = e_0\frac{u^2}{2!} + e_1\frac{u^6}{6!} + e_2\cdot\frac{u^{10}}{10!} + \cdots + e_n\,\frac{u^{4n+2}}{(4n+2)!} + \cdots. \tag{16}$$

Um die Entwickelungscoefficienten F_n, e_n durch die Zahlen E_n auszudrücken, gehe ich aus von der Gleichung

$$\frac{1+i}{\varphi\big((1+i)u\big)} = \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}, \tag{17}$$

welche aus (12) und (13) leicht folgt. Durch Quadrirung von (17) ergiebt sich

$$2i\varphi\big((1+i)\,u\big) = \frac{1}{\varphi^2(u)} - \varphi^2(u) = \varphi(u) - \varphi^2(u),$$

oder

$$\frac{1}{2}\varphi^2(u) = \frac{1}{2}\varphi(u) - i\varphi\big(1+i)u\big). \tag{18}$$

Benutzt man nun die Gleichung (7), so folgt:

$$e_{n-1} = 2^{4n-1}\left(1-(1+i)^{4n}\right)\frac{E_n}{4n}, \qquad (n=1,2,3\ldots) \tag{19}$$

wobei man beachten möge, dass $(1+i)^{4n}$ reell, nämlich $= (-4)^n$

Andererseits erhält man durch Differentiation aus (17)

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\varphi((1+i)u)}\right) = \frac{1}{1+i}\,\frac{\varphi\varphi'' - \varphi'^2}{\varphi^2} = -\frac{1}{1+i}\left(\frac{1}{\varphi^2} + \varphi^2\right)$$

oder, wenn man u durch $\frac{u}{1+i}$ ersetzt und (18) berücksichtigt,

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\varphi(u)}\right) = -\frac{1}{(1+i)^7}\left(2\varphi\left(\frac{u}{1+i}\right) - 2i\varphi(u)\right),$$

und endlich

$$\frac{1}{\varphi(u)} = \int\left\{\varphi(u) + i\varphi\left(\frac{u}{1+i}\right)\right\} du. \tag{20}$$

Hieraus folgt nun

$$F_n = (1+i)^{4n}[(1+i)^{4n} - 2]E_n. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{21}$$

§ 4.

Die complexe Multiplication für die Function $\varphi(u)$.

Die Function $\varphi(u)$ lässt bekanntlich „complexe Multiplication" zu. Die hierauf bezüglichen Sätze stelle ich, soweit sie im Folgenden Anwendung finden, in diesem Paragraphen zusammen*). Es bezeichne $m = a + ib$ eine complexe ganze Zahl, die ungerade, d. h. durch $1 + i$ nicht theilbar ist. Ueberdies sei m primär, d. h. m genügt der Congruenz

$$m = a + ib \equiv 1 \pmod{2 + 2i}.$$

(Unter vier associirten ungeraden Zahlen m, $-m$, im, $-im$ ist stets eine und nur eine primär). Die Function $\varphi(mu)$ ist nun, wie aus functionentheoretischen Gründen unmittelbar folgt, rational durch $\varphi(u)$ darstellbar. Und zwar hat man, wenn zur Abkürzung

$$\varphi(mu) = y, \qquad \varphi(u) = x \tag{22}$$

gesetzt wird,

$$y = \frac{mx + a_1x^5 + a_2x^9 + \cdots + x^\mu}{1 + b_1x^4 + b_2x^8 + \cdots + mx^{\mu-1}} = \frac{U(x)}{V(x)}. \tag{23}$$

Der Grad μ des Zählers $U(x)$ ist die Norm der Zahl m, also

$$\mu = a^2 + b^2.$$

Ferner sind die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ sämmtlich complexe ganze Zahlen. Zwischen ihnen besteht zunächst die Beziehung, dass die Coefficienten von $U(x)$ in umgekehrter Ordnung geschrieben genau mit den Coefficienten von $V(x)$ übereinstimmen, so dass

$$V(x) = x^\mu U\left(\frac{1}{x}\right)$$

*) Vgl. wegen dieser Sätze: Eisenstein, l. c.

it. Sodann sind diese Coefficienten so beschaffen, dass die ganze unction

4) $$D(x) = V(x)\,U'(x) - U(x)\,V'(x)$$

ıter durch m theilbare Coefficienten besitzt.

Setzt man

$$U(x) = \sum_{k=0,1,2,\cdots} a_k x^{4k+1}, \quad V(x) = \sum_{k=0,1,2,\cdots} b_k x^{4k}, \qquad (a_0 = m,\ b_0 = 1)$$

ergiebt sich nach kurzer Rechnung

$$D(x) = \sum_{h,k} (4h - 4k + 1)\, a_h b_k x^{4(h+k)} = \sum_{r=0,1,2,\cdots} c_r x^{4r}.$$

ɜ Coefficienten von $D(x)$ haben also der Reihe nach die Werthe

$$c_0 = a_0 = m,$$
$$c_1 = 5a_1 - 3a_0 b_1,$$
$$c_2 = 9a_2 + a_1 b_1 - 7a_0 b_2,$$
$$c_3 = 13a_3 + 5a_2 b_1 - 3a_1 b_2 - 11a_0 b_3,$$
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
$$c_r = (4r+1)a_r + (4r-7)a_{r-1}b_1 + \cdots + (-4r+1)a_0 b_r.$$
. . . . . .

Wenn nun m eine zweigliedrige complexe Primzahl ist, so wird $= N(m)$ eine reelle Primzahl von der Form $4k+1$. In diesem lle ist keine der Zahlen 5, 9, 13, ... $\mu - 4$ durch m theilbar. Daher lgt aus der Thatsache, dass $c_0, c_1, c_2, \ldots$ durch m theilbar sind, ccessive $a_1 \equiv 0$, $a_2 \equiv 0$, $a_3 \equiv 0, \ldots a_{\frac{\mu-5}{4}} \equiv 0 \pmod{m}$. D. h. es ıd alle Coefficienten des Zählers mit Ausnahme des Coefficienten ın x^μ, welcher gleich 1 ist, durch m theilbar.

Wenn zweitens $m = -q$ ist, wo q eine reelle Primzahl von der ırm $4k+3$ bezeichnet, so ist die erste Zahl der Reihe 5, 9, 13, ..., ılche durch m theilbar ist, offenbar gleich $3q$. In diesem Falle ıd also wenigstens die ersten $\frac{3q-1}{4}$ Coefficienten des Zählers $U(x)$, mlich

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots a_{\frac{3q-5}{4}}$$

rch $m = -q$ theilbar.

§ 5.

Der Nenner der Zahl E_n.

Die Zahl E_n ist eine reelle positive rationale Zahl und lässt sich also auf die Form bringen

$$E_n = \frac{Z_n}{N_n}, \tag{25}$$

wo Z_n, N_n positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind.

Mit den bisher entwickelten Hülfsmitteln gelingt es nun, Näheres über die Primfactoren des Nenners N_n festzustellen.

Zu diesem Zwecke betrachte ich die Function

$$F(u) = m^2\wp(mu) - \wp(u) = \frac{m^2}{\wp^2(mu)} - \frac{1}{\wp^2(u)}, \tag{26}$$

wobei m eine ungerade primäre complexe ganze Zahl bedeutet. Die Entwickelung dieser Function nach aufsteigenden Potenzen von u lautet:

$$F(u) = \sum_1^\infty 2^{4n}(m^{4n}-1)\frac{E_n}{4n}\frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!}. \tag{27}$$

Andererseits ist nach dem vorigen Paragraphen:

$$F(u) = \frac{m^2V^2(x)}{U^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{[mV(x)x - U(x)][mV(x)x + U(x)]}{x^2U^2(x)} \tag{28}$$

$$= \frac{[(mb_1-a_1)x^2+(mb_2-a_2)x^6+\cdots][2m+(mb_1+a_1)x^4+(mb_2+a_2)x^8+\cdots]}{[m+a_1x^4+a_2x^8+\cdots+x^{4m-1}]^2}.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung u durch mu, so geht

$$x = \wp(u) = u + k_1\frac{u^5}{5!} + k_2\frac{u^9}{9!} + \cdots$$

in eine durch m theilbare ganzzahlige Reihe über. Dasselbe gilt von allen Potenzen von x, so dass die Gleichung (28), nachdem man Zähler und Nenner rechts durch m^2 dividirt hat, die Form erhält

$$F(mu) = \frac{\mathfrak{P}_1(u)}{\mathfrak{P}_2(u)},$$

wo $\mathfrak{P}_1(u)$ und $\mathfrak{P}_2(u)$ ganzzahlige Reihen sind, von denen die letztere das Anfangsglied 1 besitzt, also eine Einheitsreihe ist. Folglich ist $F(mu)$ selbst eine ganzzahlige Reihe. Man erkennt somit:

Wenn m eine ungerade complexe ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$(2m)^{4n-2}(m^{4n}-1)\frac{E_n}{n} = G_{m,n} \tag{29}$$

eine ganze Zahl.

Die beim Beweise gemachte Voraussetzung, dass m primär sei, f unterdrückt werden, weil die linke Seite von (29) höchstens das reichen ändert, wenn man m durch eine associirte Zahl $i^s . m$ ersetzt.

Für den Fall, wo $m = -q$ ist, unter q eine Primzahl der Form $+3$ verstanden, lässt sich der vorstehende Satz noch wesentlich schärfen. Auf der rechten Seite der Gleichung (28) ist dann näm- im Nenner

$$m + a_1 x^4 + a_2 x^8 + \cdots + x^{\mu-1}$$

durch m theilbare ganzzahlige Reihe. In der That sind die fficienten

$$a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{3q-5}{4}}$$

h m theilbar und die Glieder $a_r x^{4r}$, in welchen $r \geqq \frac{3q-1}{4}$, also sicher $> q$ ist, sind ebenfalls durch m theilbar, weil $\frac{x^{4r}}{(4r)!}$ nach § 1 ganzzahlige Reihe ist und $(4r)!$ den Factor q mindestens ein Mal ält. Aus entsprechenden Gründen ist jeder Factor im Zähler auf rechten Seite der Gleichung (28) eine durch m theilbare ganzzahlige e. Hieraus folgt nun, dass in dem jetzt betrachteten Falle schon) eine ganzzahlige Reihe ist, oder:

Wenn q eine reelle Primzahl von der Form $4k+3$ bezeichnet, so ist

$$2^{4n}(q^{4n}-1) \cdot \frac{E_n}{4n} = H_{q,n}$$

ganze Zahl.

Aus dieser Thatsache geht zunächst hervor, dass der Nenner von eine Primzahl q von der Form $4k+3$ nicht als Factor enthalten . Denn aus der Gleichung

$$E_n = \frac{n H_{q,n}}{2^{4n-2}(q^{4n}-1)}$$

ersichtlich, dass $2^{4n-2}(q^{4n}-1)$ ein Multiplum des Nenners N_n ist. e also N_n durch q theilbar, so müsste auch $2^{4n-2}(q^{4n}-1)$ durch eilbar sein, was aber offenbar nicht der Fall ist.

Die Annahme, p sei eine Primzahl von der Form $4k+1$, welche Nenner N_n von E_n aufgeht, zieht folgende Consequenzen nach . Es sei p^α die höchste Potenz von p, welche in N_n enthalten so dass $\alpha \geqq 1$ sein wird; ferner sei $p^{\alpha'}$ die höchste Potenz von p, che in n aufgeht, wobei $\alpha' \geqq 0$. Aus der Gleichung (29) folgt nun

$$(2m)^{4n-2}(m^{4n}-1) Z_n = n N_n G_{m,n} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+\alpha'}}.$$

r wähle ich für m eine ungerade Primitivwurzel $(\mathrm{mod.}\ p^{\alpha+\alpha'})$, also solche ungerade (reelle) ganze Zahl, für welche keine niedrigere enz als die mit dem Exponenten

$$\varphi(p^{\alpha+\alpha'}) = p^{\alpha+\alpha'-1}(p-1)$$

congruent 1 (mod. $p^{\alpha+\alpha'}$) ist. Da die Factoren $(2m)^{4n-2}$ und Z_n theilerfremd zu p sind (denn Z_n und N_n haben keinen gemeinsamen Theiler), so folgt aus (31)

$$m^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+\alpha'}}$$

und daher

$$4n = M \cdot p^{\alpha+\alpha'-1}(p-1), \tag{32}$$

wo M eine ganze Zahl bezeichnet. Die höchste Potenz von p, welche $4n$ theilt, ist aber $p^{\alpha'}$; folglich ist $\alpha = 1$. Ferner zeigt die Gleichung (32), dass $4n$ durch $p-1$ theilbar ist.

Die Resultate dieses Paragraphen fasse ich in folgenden Satz zusammen:

„Jede ungerade Primzahl p, welche im Nenner der Zahl E_n aufgeht, ist nothwendig von der Form $4k+1$ und so beschaffen, dass $p-1$ ein Divisor von $4n$ ist; sie kann ferner nur in erster, nicht in höherer Potenz im Nenner von E_n aufgehen."

§ 6.

Erster Ansatz zur Partialbruchzerlegung der Zahl E_n.

Bezeichnet p eine Primzahl, welche im Nenner einer rationalen Zahl R entweder gar nicht oder nur in der ersten Potenz enthalten ist, so kann man die ganze Zahl ε so bestimmen, dass der Nenner der Zahl

$$R - \frac{\varepsilon}{p}$$

den Primfactor p sicher nicht enthält. Die Zahl ε ist (mod. p) völlig bestimmt; sie ist $\equiv 0$ (mod. p), wenn der Nenner von R nicht durch p theilbar ist; andernfalls ist ε incongruent 0 (mod. p).

Die Anwendung dieser Bemerkung auf die Zahl $R = E_n$ führt zunächst zu folgendem Ergebniss: Aus den Divisoren $\delta, \delta', \delta'', \ldots$ der Zahl n bilde man die Zahlen

$$4\delta + 1,\ 4\delta' + 1,\ 4\delta'' + 1,\ \ldots \tag{33}$$

und bezeichne diejenigen unter ihnen, welche Primzahlen sind, mit

$$p_1, p_2, \ldots, p_r. \tag{34}$$

Dann hat die Partialbruchzerlegung von E_n jedenfalls die Gestalt

$$E_n = G + \frac{\varepsilon_0}{2^\alpha} + \frac{\varepsilon_1}{p_1} + \frac{\varepsilon_2}{p_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_r}{p_r} = G + \frac{\varepsilon_0}{2^\alpha} + \sum \frac{\varepsilon}{p}, \tag{35}$$

wo G eine ganze Zahl, 2^α die höchste Potenz von 2, welche im Nenner von E_n aufgeht, und $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ ganze Zahlen bezeichnen.

Die nähere Bestimmung der Zähler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ ist nun das Ziel dieses und der beiden folgenden Paragraphen.

Es bedeute p irgend eine der Primzahlen $p_1, p_2 \ldots p_r$ und es sei ε der zugehörige Zähler.

Die Primzahl p zerlege man in ihre primäre complexe Primfactoren

$$p = m \cdot m' = (a + ib)(a - ib) \tag{36}$$

und multiplicire dann die Gleichung (35) mit m. Man erkennt so, dass nach dem Modul m die Congruenz gilt*)

$$mE_n \equiv \frac{\varepsilon}{m'} \equiv \frac{\varepsilon}{m' + m} \equiv \frac{\varepsilon}{2a} \pmod{m}, \tag{37}$$

die nun zur näheren Bestimmung des Zählers ε dienen wird.

Die Gleichung (23), in welcher

$$\mu = N(m) = a^2 + b^2 = p$$

zu setzen ist, ergiebt, in Rücksicht darauf, dass die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ sämmtlich durch m theilbar sind, die Congruenz:

$$\frac{y}{x} = \varphi(mu) \cdot \frac{1}{\varphi(u)} \equiv \varphi^{p-1}(u) \equiv -\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{p-1}(u) \pmod{m}, \tag{38}$$

wobei von dem Wilson'schen Satze $(p-1)! \equiv -1 \pmod{m}$ Gebrauch gemacht ist. Die linke Seite der vorstehenden Congruenz entwickele ich nach Potenzen von u, indem ich nach (10) und (15)

$$\varphi(mu) = mu + \sum_1^\infty m^{4n+1} k_n \frac{u^{4n+1}}{(4n+1)!},$$

$$\frac{1}{\varphi(u)} = \frac{1}{u} + \sum_1^\infty \frac{F_n}{4n} \frac{u^{4n-1}}{(4n-1)!}$$

setze. In dem Producte dieser beiden Reihen ist der Coefficient von $\frac{u^{4n}}{(4n)!}$ gleich

$$mF_n + k_1 \frac{m^5}{5}(4n)_4 F_{n-1} + k_2 \frac{m^9}{9}(4n)_8 F_{n-2} + \cdots \tag{39}$$

$$\cdots + k_{n-1} \frac{m^{4n-3}}{4n-3}(4n)_{4n-4} F_1 + k_n \cdot \frac{m^{4n+1}}{4n+1}.$$

Hier sind nun alle Glieder vom zweiten ab congruent 0 (mod. m). Denn in dem Producte

$$k_r \frac{m^{4r+1}}{(4r+1)}(4n)_{4r} F_{n-r}$$

$$= k_r \cdot (4n)_{4r} \cdot \frac{m^{4r}}{(4r+1)} \cdot mE_{n-r}(1+i)^{4(n-r)}\left((1+i)^{4(n-r)} - 2\right)$$

*) Die Congruenz $r \equiv s \pmod{m}$, in welcher r und s rationale Zahlen bezeichnen, bedeutet, dass die Differenz $r - s$ einen durch m theilbaren Zähler besitzt, vorausgesetzt, dass diese Differenz auf die Form eines Bruches gebracht ist, dessen Zähler und Nenner theilerfremd sind.

enthält mE_{n-r} sicher nicht den Factor m im Nenner, und $\frac{m^{4r}}{(4r+1)}$ enthält in reducirter Form den Factor m mindestens ein Mal im Zähler. Anderenfalls würde nämlich m^{4r} ohne Rest in $4r+1$ aufgehen müssen, also auch p^{4r} ohne Rest in $4r+1$, während doch

$$p^{4r} \geqq 5^{4r} = (1+4)^{4r} > 1 + 16r$$

ist.

Die Zahl (39) ist also nach dem Modul m congruent

$$mF_n = m(1+i)^{4n}\left((1+i)^{4n} - 2\right)E_n.$$

Da nun $4n$ Multiplum von $p-1$ ist, so hat man nach dem Fermat'schen Satze $(1+i)^{4n} \equiv 1 \pmod{m}$ und folglich

$$mF_n \equiv -mE_n \pmod{m}.$$

Die Congruenz (38) besagt nun, dass der Coefficient von $\frac{u^{4n}}{(4n)!}$ in der Entwickelung von $\frac{\varphi(mu)}{\varphi(u)} \pmod{m}$ denselben Werth hat, wie der entsprechende Coefficient in der Entwickelung von $-\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{p-1}(u)$. Bezeichnet also $-c_n$ diesen letzteren Coefficienten, so ist

$$mE_n \equiv c_n \pmod{m},$$

folglich nach (37)

$$\varepsilon \equiv (2a) \cdot c_n \pmod{m}$$

und da beide Seiten dieser Congruenz reell sind, so gilt die nämliche Congruenz auch $\pmod{p}$. Hiermit ist folgender Satz bewiesen:

Ist $\frac{\varepsilon}{p}$ irgend einer der Brüche, welche in der Partialbruchzerlegung (35) *der Zahl E_n auftreten, so gilt die Congruenz*

(40) $$\varepsilon \equiv 2a \cdot c_n \pmod{p}.$$

Dabei bedeutet a den reellen Theil des primären complexen Primfactors $m = a + ib$ der Zahl p und c_n den Coefficienten von $\frac{u^{4n}}{(4n)!}$ in der Entwickelung der Function

$$\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{p-1}(u).$$

§ 7.

Entwickelung der Ableitungen von $\varphi^2(u)$ nach den Potenzen von $\varphi^2(u)$.

Die Bestimmung der Reihe $\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{p-1}(u) \pmod{p}$ gelingt nun vermöge derjenigen Gleichungen, welche die Potenzen von $\varphi^2(u)$ durch die Differentialquotienten von $\varphi^2(u)$ ausdrücken und umgekehrt diese durch jene.

Die gemeinsame Quelle dieser Gleichungen (deren Existenz übrigens auch aus allgemeinen functionentheoretischen Gründen folgt) bildet

das Additionstheorem (12) der Function $\varphi(u)$. Aus diesem ergiebt sich zunächst, wenn zur Abkürzung

(41) $$\varphi^2(u) = s, \qquad \varphi^2(v) = t$$

gesetzt wird,

(42) $$\frac{1}{2}\left[\varphi^2(u+v) + \varphi^2(u-v)\right]$$
$$= \frac{\left[\varphi(u)\varphi'(v) + \varphi'(u)\varphi(v)\right]^2 + \left[\varphi(u)\varphi'(v) - \varphi'(u)\varphi(v)\right]^2}{2.\left[1 + \varphi^2(u)\varphi^2(v)\right]^2}$$
$$= \frac{(s+t)(1-st)}{(1+st)^2}.$$

Entwickelt man hier die linke Seite nach Potenzen von v, die rechte Seite nach Potenzen von s, so kommt

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{d^{2r}s}{du^{2r}} \frac{v^{2r}}{(2r)!} = t + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left\{(2r+1)t^{r+1} - (2r-1)t^{r-1}\right\} s^r,$$

oder, indem man berücksichtigt, dass

$$\frac{d^2\varphi^{2r}(v)}{dv^2} = 2r(2r-1)\varphi^{2r-2}(v) - 2r(2r+1)\varphi^{2r+2}(v),$$

also

$$\frac{d^2t^r}{dv^2} = -2r\left[(2r+1)t^{r+1} - (2r-1)t^{r-1}\right]$$

ist,

(43) $$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{d^{2r}s}{du^{2r}} \frac{v^{2r}}{(2r)!} = t + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \cdot \frac{s^r}{2r} \cdot \frac{d^2t^r}{dv^2}.$$

Differentiirt man nun endlich diese Gleichung $2n$ Mal nach v und setzt sodann $v = 0$, so ergiebt sich die gewünschte Darstellung der $2n^{\text{ten}}$ Ableitung von $s = \varphi^2(u)$ durch die Potenzen von s, nämlich:

(44) $$\frac{d^{2n}s}{du^{2n}} = \left(\frac{d^{2n}t}{dv^{2n}}\right)_{v=0} + \sum_{r=1,2,\cdots} (-1)^{r+1} \cdot \frac{s^r}{2r} \left(\frac{d^{2n+2}(t^r)}{dv^{2n+2}}\right)_{v=0}.$$

Zur Vereinfachung führe ich hier die Entwickelungscoefficienten der Potenzen von $t = \varphi^2(v)$ ein, indem ich setze:

(45) $$t^r = \varphi^{2r}(v) = \varepsilon_{2r}^{(2r)} \frac{v^{2r}}{(2r)!} + \varepsilon_{2r+4}^{(2r)} \frac{v^{2r+4}}{(2r+4)!} + \cdots + \varepsilon_{2k}^{(2r)} \frac{v^{2k}}{(2k)!} + \cdots.$$

Diese Entwickelung enthält nur solche Potenzen von v, deren Exponenten $\equiv 2r \pmod 4$ und $\geq 2r$ sind; es ist daher

$$\varepsilon_{2k}^{(2r)} = 0,$$

wenn r nicht $\equiv k \pmod 2$ ist und ebenso, wenn $r > k$ ist.

Die Gleichung (44) nimmt nun folgende definitive Gestalt an:

$$(46)\qquad \frac{d^{2n}\varphi^2(u)}{du^{2n}} = \varepsilon_{2n}^{(2)} + \sum_{r=1,2,\cdots} (-1)^{r+1}\,.\,(2r-1)!\;\varepsilon_{2n+2}^{(2r)}\,\frac{\varphi^{2r}(u)}{(2r)!}\,.$$

Die Summe braucht man hier nur auszudehnen auf diejenigen Werthe von r, welche $\equiv n+1 \pmod 2$ und überdies $\leqq n+1$ sind; denn alle übrigen Glieder der Summe verschwinden.

Nach Satz I in § 1 ist $\frac{\varphi^{2r}(u)}{(2r)!}$ eine ganzzahlige Reihe; ferner ist nach Satz II in § 1 die Zahl $\varepsilon_{2n+2}^{(2r)}$ durch jede Primzahl theilbar, die zwischen $2n-2r+3$ und $2n+3$ liegt.

Wenn also $2n+1$, wie ich jetzt voraussetzen will, eine Primzahl ist, so wird $\varepsilon_{2n+2}^{(2r)}$ durch $2n+1$ theilbar sein, sobald $r \geqq 2$ ist. Daher gilt dann die Congruenz

$$\frac{d^{2n}\varphi^2(u)}{du^{2n}} \equiv \varepsilon_{2n}^{(2)} + \varepsilon_{2n+2}^{(2)}\,\frac{\varphi^2(u)}{2} \pmod{2n+1}.$$

Der Gleichung (16) zufolge ist $\varepsilon_{2k}^{(2)} = 0$, wenn k gerade und $\varepsilon_{2k}^{(2)} = 2\,.\,e_{\frac{k-1}{2}}$, wenn k ungerade. Unterscheidet man also die beiden Fälle, wo $2n+1 = p$ eine Primzahl der Form $4k+1$ und wo $2n+1 = q$ eine Primzahl von der Form $4k+3$ ist, von einander, so lautet die vorstehende Congruenz im ersten Falle:

$$(47)\qquad \frac{d^{p-1}\varphi^2(u)}{du^{p-1}} \equiv e_{\frac{p-1}{4}}\,.\,\varphi^2(u) \pmod p$$

und im zweiten Falle

$$(48)\qquad \frac{d^{q-1}\varphi^2(u)}{du^{q-1}} \equiv 2\,.\,e_{\frac{q-3}{4}} \pmod q.$$

Die r-malige Differentiation dieser Congruenzen führt zu den weiteren:

$$(47')\qquad \frac{d^{p-1+r}\varphi^2(u)}{du^{p-1+r}} \equiv e_{\frac{p-1}{4}}\,\frac{d^r\varphi^2(u)}{du^r} \pmod p,$$

$$(48')\qquad \frac{d^{q-1+r}\varphi^2(u)}{du^{q-1+r}} \equiv 0 \pmod q.$$

Diese Congruenzen gelten für jeden positiven (ganzzahligen) Werth von r; die Congruenz (47′) auch noch für $r=0$, in welchem Falle sie mit (47) zusammenfällt.

§ 8.

Entwickelung der Potenzen von $\varphi^2(u)$ nach den Ableitungen von $\varphi^2(u)$.

Die Gleichungen, welche die Potenzen von $z = \varphi^2(u)$ durch die Ableitungen dieser Function darstellen, sind die Umkehrungen der Gleichungen (46). Man erhält sie in expliciter Form vermöge der Gleichung (43) auf folgende Weise. Man setze

$$t = \tau^2,$$

so dass (nach (10))

$$(49) \qquad \tau = \varphi(v) = v + k_1 \frac{v^5}{5!} + \cdots + k_n \frac{v^{4n+1}}{(4n+1)!} + \cdots$$

ist. Integrirt man sodann die beiden Seiten der Gleichung (43) zwei Mal zwischen den Grenzen 0 und v, so ergiebt sich zunächst

$$(50) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{d^{2r}s}{du^{2r}} \cdot \frac{v^{2r+2}}{(2r+2)!} = \int_0^v dv \cdot \int_0^v \tau^2 dv + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \frac{s^r}{2r} \cdot \tau^{2r}.$$

Durch Umkehrung der Gleichung (49) lässt sich nun v in eine nach Potenzen von τ fortschreitende Reihe entwickeln und diese Reihe ist nach § 1 ganzzahlig*). Daher hat man für jeden positiven ganzzahligen Werth von r:

$$(51) \qquad \frac{v^{2r}}{(2r)!} = \eta_{2r}^{(2r)} \cdot \frac{\tau^{2r}}{(2r)!} + \eta_{2r+4}^{(2r)} \frac{\tau^{2r+4}}{(2r+4)!} + \cdots + \eta_{2k}^{(2r)} \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} + \cdots,$$

wo die Entwickelungscoefficienten $\eta_{2k}^{(2r)}$ ganze Zahlen sind. Analog wie bei der Reihe (45) ist auch hier

$$\eta_{2k}^{(2r)} = 0,$$

wenn r nicht $\equiv k \pmod 2$, oder wenn $r > k$ ist.

Entwickelt man nun in der Gleichung (50) Alles nach Potenzen von τ und vergleicht sodann die Coefficienten von τ^{2n} so ergiebt sich

$$(52) \qquad (-1)^{n+1} \cdot \frac{s^n}{2n} = \sum_{r=0,1,2,\cdots} \frac{\eta_{2n}^{(2r+2)}}{(2n)!} \frac{d^{2r}s}{du^{2r}} - A_{2n},$$

wobei A_{2n} den Coefficienten von τ^{2n} in der Entwickelung

$$\int_0^v dv \int_0^v \tau^2 dv = A_2\tau^2 + A_4\tau^4 + \cdots + A_{2n}\tau^{2n} + \cdots$$

*) Die betreffende Reihe ist die folgende:

$$v = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^4}} = \tau + \frac{1}{2} \cdot 4! \frac{\tau^5}{5!} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 4n} \cdot (4n)! \frac{\tau^{4n+1}}{(4n+1)!} + \cdots.$$

bedeutet. Um den Werth von A_{2n} zu bestimmen, differenzire ich vorstehende Gleichung zwei Mal nach v; hierdurch entsteht

$$\tau^2 = -A_2(2.3\tau^4 - 2.1) - A_4(4.5\tau^6 - 4.3\tau^2) - \cdots$$
$$\cdots - A_{2n}\left(2n(2n+1)\tau^{2n+2} - 2n(2n-1)\tau^{2n-2}\right) - \cdots$$

und durch Coefficientenvergleichung findet sich nun leicht

$$A_{2n} = 0 \quad \text{oder} \quad A_{2n} = \frac{1.5.9\ldots(2n-3)}{3.7.11\ldots(2n-1)} \cdot \frac{1}{2n}$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist. Demnach nimmt nun die Gleichung (52), mit Unterscheidung der Fälle n gerade und n ungerade, die folgende definitive Form an:

Es ist

$$(53)\quad \varphi^{2n}(u) = \frac{-1}{(2n-1)!} \sum_{r=1,2,\cdots} \eta_{2n}^{(2r)} \frac{d^{2r-2}\varphi^2(u)}{du^{2r-2}} + \frac{1.5.9\ldots(2n-3)}{3.7.11\ldots(2n-1)},$$

wenn n gerade ist; dagegen

$$(54)\qquad \varphi^{2n}(u) = \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{r=1,2,\cdots} \eta_{2n}^{(2r)} \frac{d^{2r-2}\varphi^2(u)}{du^{2r-2}},$$

wenn n ungerade ist.

Vermöge dieser Gleichungen lässt sich das Ergebnis des vorigen Paragraphen erheblich verallgemeinern.

Sei zunächst p eine Primzahl von der Form $4k+1$. Die in (53) und (54) auftretende Zahl n werde der Bedingung $2n < p$ unterworfen, so dass $(2n-1)!$ theilerfremd zu p ist.

Nun differenzire ich die Gleichungen (53) und (54) $p-1$ Mal nach u und benutze sodann die Congruenz (47'), der zufolge sich die Ableitungen von $\varphi^2(u)$ bis auf den Factor $e_{\frac{p-1}{4}} \pmod p$ reproduciren.

Auf diese Weise ergiebt sich der Satz:

Ist $2n < p$, so gilt die Congruenz

$$(55)\quad \frac{d^{p-1}\varphi^{2n}(u)}{du^{p-1}} \equiv e_{\frac{p-1}{4}} \left(\varphi^{2n}(u) - \frac{1.5.9\ldots(2n-3)}{3.7.11\ldots(2n-1)}\right) \pmod p,$$

oder die Congruenz

$$(56)\qquad \frac{d^{p-1}\varphi^{2n}(u)}{du^{p-1}} \equiv e_{\frac{p-1}{4}} \cdot \varphi^{2n}(u) \pmod p,$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist.

In entsprechender Weise ergiebt sich für eine Primzahl q von der Form $4k+3$ der Satz:

Ist $2n < q$, so gilt die Congruenz:

$$\frac{d^{q-1}\varphi^{2n}(u)}{du^{q-1}} \equiv (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{(2n-1)!}\, e_{\frac{q-3}{4}}\, \eta_{2n}^{(2)} \pmod{q}.$$

Für $n = 1$ geht (56) in die Congruenz (47) und (57) in die Con-
ınz (48) über.

§ 9.

Die Entwickelungscoefficienten der Potenzen von $\varphi^2(u)$.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Congruenzen enthalten
isse Eigenschaften der Entwickelungscoefficienten der Function
(u), wie ich jetzt des Näheren darlegen will.
Zur Abkürzung setze ich

$$C_n = \frac{1.5.9\ldots(2n-3)}{3.7.11\ldots(2n-1)} \quad \text{oder} \quad C_n = 0,$$

achdem n gerade oder ungerade ist. Dann lassen sich die beiden
gruenzen (55) und (56) in die folgende:

$$\frac{d^{p-1}\varphi^{2n}(u)}{du^{p-1}} \equiv e_{\frac{p-1}{4}} \left(\varphi^{2n}(u) - C_n\right) \pmod{p}$$

inigen. Hier bedeutet n eine beliebige positive ganze Zahl und p
nd eine Primzahl von der Form $4k+1$, die grösser als $2n$ ist.
ı ist nach Gleichung (45)

$$\varphi^{2n}(u) = \varepsilon_{2n}^{(2n)} \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \varepsilon_{2n+4}^{(2n)} \frac{u^{2n+4}}{(2n+4)!} + \cdots + \varepsilon_{2k}^{(2n)} \frac{u^{2k}}{2k!} + \cdots.$$

em man diese Entwickelung in die Congruenz (59) einführt, ergiebt
durch Coefficientenvergleichung:

$$\varepsilon_{p-1}^{(2n)} \equiv -\, e_{\frac{p-1}{4}} \cdot C_n \pmod{p}$$

$\varepsilon_{2k+p-1}^{(2n)} \equiv e_{\frac{p-1}{4}}\, \varepsilon_{2k}^{(2n)} \pmod{p}$, welch' letztere Congruenz durch
lerholte Anwendung zu

$$\varepsilon_{2k+r(p-1)}^{(2n)} \equiv \left(e_{\frac{p-1}{4}}\right)^r \varepsilon_{2k}^{(2n)} \pmod{p} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

t, unter r eine positive ganze Zahl verstanden.
Durch die Congruenz (62) werden die Reste der Entwickelungs-
ficienten von $\varphi^{2n}(u)$ nach dem Modul p zurückgeführt auf die
te derjenigen unter ihnen, deren Index nicht grösser als $p-1$ ist.
Für das Hauptziel dieser Arbeit ist der Fall $2n = p-1$ von be-
lerer Wichtigkeit. In diesem Falle ist

$$\varepsilon_{p-1}^{(2n)} = \varepsilon_{p-1}^{p-1} = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

und die Congruenz (61) lehrt also, dass

$$c_{\frac{p-1}{4}} \equiv \frac{3.7.11\ldots(p-2)}{1.5.9\ldots(p-4)} \pmod{p} \tag{63}$$

ist. Nach einem bekannten Satze von Gauss*) ist die rechte dieser Congruenz $\equiv 2a \pmod{p}$, wenn $a+bi$ den primäre plexen Primfactor von p bezeichnet. Daher ist auch

$$c_{\frac{p-1}{4}} \equiv 2a \pmod{p}. \tag{64}$$

Endlich sind im Falle $2n = p-1$ alle Coefficienten $\varepsilon_{2k}^{(2n)}$, Index $2k$ unter $p-1$ liegt gleich Null. Folglich sind, in Bezug auf (62), sämmtliche Coefficienten $\varepsilon_{2k}^{(2n)}$ durch p theilbar, deren dices $2k$ nicht Multipla von $p-1$ sind. Dieselbe Congruenz liefert, indem man $k = \frac{p-1}{2}$ setzt und sodann $r-1$ an Stelle schreibt:

$$\varepsilon_{r(p-1)}^{(p-1)} \equiv -\left(c_{\frac{p-1}{4}}\right)^{r-1} \equiv -(2a)^{r-1} \pmod{p}. \tag{65}$$

Diese Resultate fasse ich in folgenden Satz zusammen:

Bezeichnet p eine Primzahl von der Form $4k+1$ und den primären complexen Primfactor derselben, so gilt die Congr

$$\frac{\varphi^{p-1}(u)}{(p-1)!} \equiv \sum_{r=1}^{\infty} (2a)^{r-1} \cdot \frac{u^{r(p-1)}}{(r(p-1))!} \cdot \pmod{p}. \tag{66}$$

Der Vollständigkeit halber will ich noch die Congruenz (57) licher Weise entwickeln, wie es soeben mit den Congruenzen ((56) geschehen ist.

Die Congruenz (57) besagt, dass

$$\varepsilon_{q-1}^{(2n)} \equiv (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{(2n-1)!}\, e_{\frac{q-3}{4}} \cdot \eta_{2n}^{(2)} \pmod{q} \tag{67}$$

ist, und dass alle Coefficienten $\varepsilon_{2k}^{(2n)}$, deren Indices $2k$ grö $q-1$ sind, den Factor q haben. Die in (67) auftretenden cienten $\eta_{2n}^{(2)}$ sind durch die Gleichung

$$\frac{v^2}{2} = \eta_2^{(2)} \frac{\tau^2}{2!} + \eta_6^{(2)} \cdot \frac{\tau^6}{6!} + \cdots + \eta_{2k}^{(2)} \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} + \cdots \tag{68}$$

---

*) Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio prima. Werk pag. 90.

definirt, wobei

$$(69)\quad v = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^4}} = \tau + \frac{1}{2}\frac{\tau^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\tau^{4k+1}}{4k+1} + \cdots$$

ist. Da nun v^2 der Differentialgleichung

$$(1-\tau^4)\frac{d^2v^2}{d\tau^2} - 2\tau^3\frac{dv^2}{d\tau} = 2$$

genügt, so kann man die Coefficienten $\eta_{2k}^{(2)}$ recurrent berechnen. Man findet auf diese Weise, dass das Quadrat des elliptischen Integrales (69) folgende Entwickelung besitzt

$$(70)\quad v^2 = \tau^2 + \frac{3}{5}\cdot\frac{\tau^6}{3} + \frac{3.7}{5.9}\cdot\frac{\tau^{10}}{5} + \cdots + \frac{3.7\ldots(4n-1)}{5.9\ldots(4n+1)}\frac{\tau^{4n+2}}{2n+1} + \cdots,$$

dass also

$$\eta_{2k}^{(2)} = 0$$

oder

$$\eta_{2k}^{(2)} = (2k)!\,\frac{3.7\ldots(2k-3)}{5.9\ldots(2k-1)}\cdot\frac{1}{2k}$$

ist, je nachdem k eine gerade oder eine ungerade Zahl bezeichnet.

Hiernach nimmt die Congruenz (67) (welche für ein gerades n eine Identität vorstellt) für den Fall, wo n ungerade ist, die Gestalt an

$$(71)\quad \varepsilon_{q-1}^{(2n)} \equiv 2e_{\frac{q-3}{4}}\cdot\frac{3.7\ldots(2n-3)}{5.9\ldots(2n-1)} \pmod q.$$

Wenn hier $2n$ den grössten zulässigen Werth $q-1$ erhält, so ergiebt sich, weil

$$\varepsilon_{q-1}^{(q-1)} = (q-1)! \equiv -1 \pmod q$$

ist,

$$e_{\frac{q-3}{4}} \equiv -\frac{1}{2}\cdot\frac{5.9\ldots(q-2)}{3.7\ldots(q-4)} \pmod q$$

oder

$$(72)\quad e_{\frac{q-3}{4}} \equiv \frac{1.5\ldots(q-6)}{3.7\ldots(q-4)} \pmod q,$$

und die Congruenz (71) lässt sich in Folge dessen auch so schreiben:

$$(73)\quad \varepsilon_{q-1}^{(2n)} \equiv -\frac{(2n+3)(2n+7)\ldots(q-2)}{(2n+1)(2n+5)\ldots(q-4)} \pmod q.$$

§ 10.

Die Partialbruchzerlegung der Zahl E_n.

Aus den Congruenzen (40) und (66) geht nun hervor, dass

$$\varepsilon \equiv (2a)^{\frac{4n}{p-1}} \pmod{p}$$

ist und dass folglich die Partialbruchzerlegung der Zahl E_n die Gestalt hat:

$$E_n = G + \frac{\varepsilon_0}{2^\alpha} + \sum \frac{(2a)^{\frac{4n}{p-1}}}{p}. \tag{74}$$

Hier ist die Summe über diejenigen Primzahlen p von der Form $4k+1$ auszudehnen, für welche $p-1$ ein Divisor von $4n$ ist, und für jede einzelne dieser Primzahlen p bedeutet a den reellen Theil ihres primären complexen Primfactors $a+ib$. Die Zahl a kann hiernach auch definirt werden als die Basis des ungeraden Quadrates bei der Zerlegung von p in die Summe zweier Quadrate:

$$p = a^2 + b^2,$$

und zwar diese Basis mit solchem Vorzeichen genommen, dass die Congruenz

$$a \equiv b + 1 \pmod{4}$$

besteht.

Es erübrigt noch, den auf die Primzahl 2 bezüglichen Theil $\frac{\varepsilon_0}{2^\alpha}$ der Partialbruchzerlegung von E_n zu bestimmen. Zu diesem Zwecke bediene ich mich der Recursionsformel (9).

Aus dieser Formel ergiebt sich leicht, dass $\frac{\varepsilon_0}{2^\alpha} = \frac{1}{2}$, oder was dasselbe besagt, dass

$$2E_n \equiv 1 \pmod{2} \tag{75}$$

ist. In der That: die Formel (9) lässt sich, je nachdem n gerade oder ungerade ist, in die Gestalt bringen:

$$(2n-3)(16n^2-1).(2E_n) \tag{76}$$

$$= 3\left\{\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} (4r-1)(4n-4r-1)(4n)_{4r}(2E_r).(2E_{n-r}) + (2n-1)^2(4n)_{2n}\frac{1}{2}(2E\right.$$

respective

$$(2n-3)(16n^2-1)(2E_n) = 3\cdot\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} (4r-1)(4n-4r-1)(4n)_{4r}(2E_r)(2E_{n-r}) \tag{77}$$

Hierbei ist, wie man leicht erkennt, der Factor $(4n)_{2n} \cdot \frac{1}{2}$ in (76) eine ganze Zahl. Nimmt man nun an, die Congruenz (75) sei schon für die Zahlen $E_1, E_2, \ldots E_{n-1}$ als richtig nachgewiesen, so folgt aus (76) resp. (77)

$$2E_n \equiv \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} (4n)_{4r} + \frac{1}{2}(4n)_{2n} = \frac{1}{8}[(1+1)^{4n} + (1+i)^{4n} + (1-1)^{4n} + (1-i)^{4n} - 8)] \pmod 2$$

resp.

$$2E_n \equiv \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} (4n)_{4r} = \frac{1}{8}[(1+1)^{4n} + (1+i)^{4n} + (1-1)^{4n} + (1-i)^{4n} - 8] \pmod 2,$$

oder

$$2E_n \equiv 1 \pmod 2.$$

Da aber für $E_1 = \frac{1}{10}$ die Congruenz (75) erfüllt ist, so gilt sie allgemein.

Hiermit ist nun das Hauptziel dieser Untersuchung erreicht:
Die Partialbruchzerlegung der Zahl E_n lautet wie folgt:

$$E_n = G_n + \frac{1}{2} + \sum \frac{(2a)^{p-1}}{p}. \tag{78}$$

Dabei bezeichnet G_n eine ganze Zahl und die Summe ist über diejenigen Primzahlen p von der Form $4k+1$ zu erstrecken, für welche $p-1$ ein Divisor von $4n$ ist. Die der einzelnen Primzahl p entsprechende Zahl a ist die Basis des ungeraden Quadrates in der Zerlegung

$$p = a^2 + b^2,$$

und zwar mit solchem Vorzeichen genommen, dass

$$a \equiv b + 1 \pmod 4$$

ist.

§ 11.

Die ganzzahligen Theile in der Partialbruchzerlegung der Zahlen E_n.

Vermöge der Gleichungen (76) und (77) gelingt es, den Rest der Zahl $2E_n$ nach dem Modul 16 zu bestimmen. Für die niedrigen Werthe von n findet man nach dem Modul 16:

$$2E_1 = \frac{1}{5} \equiv -3, \quad 2E_2 = \frac{3}{5} \equiv 7, \quad 2E_3 = \frac{3^4 \cdot 7}{5 \cdot 13} \equiv 7,$$

$$2E_4 = \frac{3^4 \cdot 7^2 \cdot 11}{5 \cdot 17} \equiv -1 \text{ u. s. w.}$$

Durch Fortsetzung der Rechnung wird man auf die Vermuthung geführt, dass vom Index $n = 3$ ab die Congruenz

$$2E_n \equiv 8n - 1 \pmod{16} \tag{79}$$

besteht, dass also $2E_n \equiv 7$ oder $-1 \pmod{16}$, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Diese Vermuthung bestätigt sich durch folgende Schlüsse. Aus den Gleichungen (76) und (77) folgen zunächst nach dem Modul 16 die Congruenzen:

$$(2n-3)(2E_n) \equiv (4n-1).3.\left\{\sum_{r=1}^{r=\frac{n}{2}-1}(4n)_{4r}(2E_r')(2E_{n-r}) + \frac{1}{2}(4n)_{2n}(2E_{\frac{n}{2}})^2\right\}$$

resp.

$$(2n-3)(2E_n) \equiv (4n-1).3.\left\{\sum_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}}(4n)_{4r}(2E_r)(2E_{n-r})\right\},$$

und hieraus, durch Multiplication mit $4n+1$, in beiden Fällen

$$(4n+1)(2n-3).(2E_n) \equiv -\frac{3}{2}\sum_{r=1}^{r=n-1}(4n)_{4r}(2E_r)(2E_{n-r}).$$

Sei nun $n > 4$ und überdies die Congruenz (79) schon bewiesen für $n = 3, 4, \ldots n-1$. Dann folgt*)

$$\begin{aligned}(4n+1)(2n-3)(2E_n) \equiv -\frac{3}{2}\Big[&2.(4n)_4(2E_1)(2E_{n-1}) + 2(4n)_8(2E_2)(2E_{n-2}) \\ &+ \sum_{r=3}^{r=n-3}(4n)_{4r}(2E_r)(2E_{n-r})\Big] \\ \equiv +\frac{3}{2}\Big[&2.(4n)_4.3.\big(8(n-1)-1\big) \\ &-2.(4n)_8.7.\big(8(n-2)-1\big) \\ &-\sum_{r=3}^{r=n-3}(4n)_{4r}(8r-1)(8n-8r-1)\Big].\end{aligned}$$

Nach leichten Reductionen und unter Benutzung der Congruenz**)

---

*) Die folgenden Congruenzen beziehen sich sämmtlich auf den Modul 16, sofern nicht ein anderer Modul ausdrücklich angegeben ist.

**) Es ist

$$(4n)_{4r} = (2n)_{2r} \cdot \prod_{k=0}^{r-1}\frac{[4(n-k)-1][4(n-k)-3]}{(4k+1)(4k+3)},$$

und für jeden Werth von k

$$[4(n-k)-1][4(n-k)-3] \equiv (4k+1)(4k+3) \equiv 1.3 \pmod{16}.$$

$$(4n)_{4r} \equiv (2n)_{2r} \pmod{16}$$

ommt:

$$(4n+1)(2n-3)(2E_n)$$
$$\equiv 3\Big[(2n)_2(8n+5)+(2n)_4(8n+7)+(8n-1)\cdot\frac{1}{2}\sum_{r=3}^{r=n-3}(2n)_{2r}\Big]\cdot$$

rücksichtigt man nun, dass

$$\frac{1}{2}\sum_{r=3}^{r=n-3}(2n)_{2r} = \frac{1}{2}[(1+1)^{2n}+(1-1)^{2n}-2-2(2n)_2-2(2n)_4]$$
$$\equiv -1-(2n)_2-(2n)_4 \pmod{16},$$

erkennt man, dass die vorhergehende Congruenz

$$(n+1)(2n-3)(2E_n) \equiv 3[6.(2n)_2+8(2n)_4-(8n-1)]$$
$$\equiv 2n(2n-1)+2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)$$
$$+8n+3$$
$$\equiv 2n(2n-1)+4n(n-1)+8n+3$$
$$\equiv 8n^2+2n+3$$

Fert. Da $8n^2 \equiv 8n \pmod{16}$, so ergiebt sich schliesslich

$$2E_n \equiv \frac{10n+3}{(4n+1)(2n-3)} \equiv \frac{10n+3}{-2n-3} \equiv 8n-1 \pmod{16},$$

raus nun die Gültigkeit der Congruenz (79) für $n \geqq 3$ folgt, da sie $n=3$, $n=4$ feststeht.

Die Congruenz (79) giebt Aufschluss über das Verhalten der nzzahligen Theile G_n der Partialbruchzerlegung (78) der Zahlen E_n Bezug auf den Modul 8. Setzt man, unter der Voraussetzung $n>2$, e Partialbruchzerlegung von E_n in (79) ein, so ergiebt sich zunächst

$$G_n \equiv 4n-1-\sum\frac{(2a)^{\frac{4n}{p-1}}}{p} \pmod{8}.$$

Die hier auftretenden Primzahlen p sind von der Form $4\delta+1$, o δ Divisor von n ist.

Der Exponent $\frac{4n}{p-1}=\frac{n}{\delta}$ wird daher, falls nicht $\delta=\frac{n}{2}$ oder $\delta=n$, grösser als 2 und folglich das entsprechende Glied $\frac{(2a)^{\frac{n}{\delta}}}{p} \equiv 0 \pmod{8}$ in. Für $\delta=\frac{n}{2}$ resp. $\delta=n$ ist der Exponent $\frac{n}{\delta}$ gleich 2 resp. 1; gleich wird $p=2n+1$ resp. $p=4n+1$. Ich unterscheide nun lgende Fälle:

1. Fall. Weder $2n+1$ noch $4n+1$ ist eine Primzahl von der rm $4k+1$. Dann ist

$$G_n \equiv 4n-1 \pmod{8}.$$

2. Fall. Es ist $2n+1$ eine Primzahl von der Form $4k+1$, $4n+1$ dagegen nicht. Dieser Fall kann nur für gerades n eintreten. Ferner ist nun der Exponent $\frac{4n}{p-1}$ stets >2, ausgenommen für $p=2n+1$. Also ist

$$G_n \equiv 4n - 1 - \frac{(2a)^2}{2n+1} \pmod 8.$$

Da $a \equiv 1 \pmod 2$, so wird $(2a)^2 \equiv 4 \pmod 8$; ferner ist

$$\frac{1}{2n+1} \equiv -2n+1 \pmod 8,$$

weil n gerade ist. Daher kommt:

$(80)_2$ $$G_n \equiv 3 \pmod 8.$$

3. Fall. Es ist $4n+1$ Primzahl, $2n+1$ dagegen nicht Primzahl von der Form $4k+1$. In diesem Falle ist

$$G_n \equiv 4n - 1 - \frac{2a}{4n+1} \pmod 8.$$

Nun folgt aus der Gleichung

$$4n+1 = a^2 + b^2,$$

dass

$$b^2 \equiv 4n \pmod 8,$$

und hieraus successive:

$$b \equiv 2n \pmod 4,$$

$$a \equiv b+1 \equiv 2n+1 \pmod 4,$$

$$\frac{2a}{4n+1} \equiv +2a \equiv 4n+2 \pmod 8$$

und schliesslich:

(80_3) $$G_n \equiv 5 \pmod 8.$$

4. Fall. Es sind $2n+1$ und $4n+1$ Primzahlen von der Form $4k+1$. Dieser Fall kann nur für gerades n eintreten. Die Glieder der Summe $\sum \frac{(2a)^{\frac{4n}{p-1}}}{p}$, welche den Primzahlen $p = 2n+1$ und $p = 4n+1$ entsprechen, werden respective $\equiv 4, 2 \pmod 8$, so dass jetzt

(80_4) $$G_n \equiv 1 \pmod 8$$

wird. —

Wenn n ungerade ist, so können nur die Fälle 1 und 3 stattfinden. Man hat demgemäss den Satz:

Ist $n > 1$ eine ungerade Zahl, so ist

$$G_n \equiv 5 \quad \textit{oder} \quad G_n \equiv 3 \pmod 8$$

nachdem $4n + 1$ eine Primzahl ist oder nicht.

Wenn n gerade ist, so kann jeder der vier Fälle eintreten. Die ngruenzen (80) ergeben jetzt den Satz:

Ist $n > 2$ eine gerade Zahl, so ist

$$G_n \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$$

nachdem die Zahlen $2n + 1$ und $4n + 1$ beide Primzahlen sind, oder r $2n+1$ oder nur $4n+1$ Primzahl ist oder endlich keine von beiden.

Betrachtet man die Reste der Zahlen $G_n \pmod 4$, so erhält man s den beiden vorstehenden Sätzen (wenn man noch beachtet, dass $-1 \equiv 3 \pmod 4$) das Resultat:

Ist $n > 1$, so lässt die Zahl G_n durch 4 dividirt den Rest 1 oder a Rest 3, je nachdem $4n + 1$ Primzahl ist oder nicht.

Dass die Zahlen G_n, abgesehen von $G_1 = 0$, sämmtlich ungerade id, ist eine selbstverständliche Folge der vorstehenden Sätze.

§ 12.

Die Entwickelungscoefficienten der Function $\frac{1}{2}\varphi^2(u)$.

Die Congruenzen (62) und (67) bestehen unter der Voraussetzung, s $2n < p$ resp. $2n < q$ ist.

Diese Voraussetzung ist für $n = 1$ stets erfüllt. In diesem Falle überdies, wie schon oben bemerkt wurde, $\varepsilon_{2k}^{(2n)} = \varepsilon_{2k}^{(2)} = 0$ oder $2e_{\frac{k-1}{2}}$, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Daher führt die nahme $n = 1$ zu folgendem Satze über die Entwickelungscoeffienten der Function $\frac{1}{2}\varphi^2(u)$, welche durch die Gleichung (16), nämlich

$$\frac{1}{2\varphi(u)} = \frac{1}{2}\varphi^2(u) = e_0\frac{u^2}{2!} + e_1\frac{u^6}{6!} + \cdots + e_n\frac{u^{4n+2}}{(4n+2)} + \cdots$$

efinirt sind:

Bezeichnet p eine Primzahl $\equiv 1 \pmod 4$ und ist $p' = \frac{p-1}{4}$, so steht die Congruenz

1) $$e_{n+p'} \equiv e_{p'}e_n \pmod p, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

rch welche die Reste der Zahlen $e_n \pmod p$ auf die der ersten $p' - 1$ ter ihnen zurückgeführt werden. Ueberdies ist nach (63) *und* (64)

$$e_{p'} \equiv \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \ldots (p-2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (p-4)} \equiv 2a \pmod p.$$

Bezeichnet andererseits q eine Primzahl $\equiv 3 \pmod 4$ *und ist* $q' = \frac{q-3}{4}$, *so ist nach* (72)

$$e_{q'} = \frac{1.5.9\ldots(q-6)}{3.7.11\ldots(q-4)} \pmod q$$

und die Zahlen $e_{q'+1}, e_{q'+2}, \ldots$ *sind sämmtlich durch* q *theilbar.*

Diese Eigenschaften der Zahlen e_n lassen sich, vermöge der Gleichung (19), auf die Zahlen E_n übertragen.

Beispielsweise ergiebt sich so, dass der Zähler der Zahl

$$\left(1-(1+i)^{4n}\right)\frac{E_n}{n}$$

den Factor q besitzt, sobald $n > \frac{q+1}{4}$ ist. Indessen dürften diese Sätze nur ein untergeordnetes Interesse beanspruchen, da für die Zahlen E allgemeinere Congruenzen zu gelten scheinen, welche jene Sätze in sich enthalten.

Zur Berechnung der Zahlen e_n kann man sich einer Recursionsformel bedienen, die sich folgendermassen ergiebt. Die Function $s = \varphi^2($— genügt der Differentialgleichung

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s-s^3), \tag{82}$$

aus welcher durch Differentiation

$$\frac{d^2s}{du^2} = 2 - 6s^2 \tag{83}$$

folgt. Setzt man hier

$$s = 2\sum_{n=0}^{\infty} e_n \frac{u^{4n+2}}{(4n+2)!},$$

so ergiebt sich durch Coefficientengleichung

$$e_{n+1} = -12\sum(4n+4)_{4r+2}\, e_r e_s, \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{84}$$

wobei die Summe über alle nicht negativen Zahlen r, s zu erstrecken ist, welche die Bedingung $r+s=n$ befriedigen.

Die Recursionsformel (84) vereinfacht sich noch etwas, wenn man

$$e_n = (-12)^n \cdot \partial_n \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{85}$$

setzt. Man erhält dann offenbar für die Zahlen ∂_n die Gleichung

$$\partial_{n+1} = \sum(4n+4)_{4r+2}\,\partial_r\partial_s, \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{86}$$

aus welcher hervorgeht, dass diese Zahlen positive ganze Zahlen sind.

I. Tabelle der Zerfällungen $p = a^2 + b^2$, $\left(a \equiv b + 1 \pmod 4\right)$,

p	a	b	$2a$
5	−1	2	− 2
13	3	2	6
17	1	4	2
29	−5	2	− 10
37	−1	6	− 2
41	5	4	10

II. Tabelle der Zahlen $E_n = G_n + \frac{1}{2} + \sum \frac{(2a)^{\frac{4n}{p-1}}}{p}$.

(Wegen des raschen Anwachsens der ganzzahligen Theile G_n sind diese nur bis $n = 6$ in der Tabelle angegeben.)

$$E_1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$$

$$E_2 = \frac{3}{10} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{2^2}{5}$$

$$E_3 = \frac{3^4 \cdot 7}{10 \cdot 13} = 5 + \frac{1}{2} - \frac{2^3}{5} + \frac{6}{13}$$

$$E_4 = \frac{3^4 \cdot 7^2 \cdot 11}{10 \cdot 17} = 253 + \frac{1}{2} + \frac{2^4}{5} + \frac{2}{17}$$

$$E_5 = \frac{3^6 \cdot 7^2 \cdot 11}{10} = 39299 + \frac{1}{2} - \frac{2^5}{5}$$

$$E_6 = \frac{3^7 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 19}{10 \cdot 13} = 13265939 + \frac{1}{2} + \frac{2^6}{5} + \frac{6^2}{13}$$

$$E_7 = \frac{3^9 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 23}{10 \cdot 29} = G_7 + \frac{1}{2} - \frac{2^7}{5} - \frac{10}{29}$$

$$E_8 = \frac{3^{10} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 223}{10 \cdot 17} = G_8 + \frac{1}{2} + \frac{2^8}{5} + \frac{2^2}{17}$$

$$E_9 = \frac{3^{14} \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 61}{10 \cdot 13 \cdot 37} = G_9 + \frac{1}{2} - \frac{2^9}{5} + \frac{6^3}{13} - \frac{2}{37}$$

$$E_{10} = \frac{3^{13} \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 2381}{10 \cdot 41} = G_{10} + \frac{1}{2} + \frac{2^{10}}{5} + \frac{10}{41}$$

$$E_{11} = \frac{3^{15} \cdot 7^6 \cdot 11^4 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 31}{10} = G_{11} + \frac{1}{2} - \frac{2^{11}}{5}$$

$$E_{12} = \frac{3^{16} \cdot 7^5 \cdot 11^4 19^2 \cdot 23^2 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 1162253}{10 \cdot 13 \cdot 17} = G_{12} + \frac{1}{2} + \frac{2^{12}}{5} + \frac{6^4}{13} + \frac{2^3}{17}$$

III. Tabelle der Zahlen e_n.

Reste nach dem Modul p:	$p=5$ $(p'=1)$	$p=13$ $(p'=3)$	$p=17$ $(p'=4)$	$p=29$ $(p'=7)$	$p=37$ $(p'=9)$	$p=41$ $(p'=10)$
$e_0 = 1$	1	1	1	1	1	1
$e_1 = -2^3.3^2$	−2	6	−4	15	2	10
$e_2 = 2^8.3^3.7$	−1	−2	2	12	25	4
$e_3 = -2^{10}.3^5.7^2.11$	2	6	−2	−1	1	23
$e_4 = 2^{16}.3^6.7^2.11.41$	1	10	2	13	9	0
$e_5 = -2^{19}.3^8.7^4.11^2.19$	−2	1	−8	7	1	−14
$e_6 = 2^{24}.3^9.7^3.11^2.19.23.113$	−1	10	4	12	14	38
$e_7 = -2^{25}.3^{11}.7^4.11^2.19.23.223.257$	2	−5	−4	−10	25	− 6
$e_8 = 2^{32}.3^{12}.7^5.11^3.19.23.31.61.109$	1	6	4	24	18	10
$e_9 = -2^{35}.3^{14}.7^5.11^4.19^2.23.31^2.2381$	−2	−5	1	25	−2	− 4
$e_{10} = 2^{40}.3^{15}.7^6.11^3.19^4.23.31.397.2113$	−1	9	8	10	−4	10
$e_{11} = -2^{42}.3^{17}.7^6.11^4.19^2.23^2.31.43.241.1162253$	2	10	−8	15	24	18

ur Theorie der Maxima und Minima einer Function von n Veränderlichen.

Von

Victor v. Dantscher in Graz.

Die Untersuchungen von A. Mayer*) und O. Stolz**) über die thwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Funcn von n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ an einer Stelle $a_1 \ldots a_n$, in deren ngebung eine Entwickelung nach ganzen positiven Potenzen von $-a_1, \ldots x_n - a_n$ stattfindet, welche mit einer *semidefiniten* Form ginnt, ein eigentliches Maximum oder Minimum habe, gaben mir Anregung dazu nachzusehen, wie sich die Lösung dieser Frage staltet, wenn man von der Grundanschauung ausgeht, die ich für nctionen von zwei Veränderlichen in der Abhandlung *„Zur Theorie Maxima und Minima einer Function von zwei Veränderlichen"* ***) twickelt habe.

In dem vorliegenden Aufsatze sollen die Resultate dieser Studien tgetheilt werden.

Die reelle Function $f(x_1 \ldots x_n)$ der n reellen Veränderlichen $\ldots x_n$ hat an der endlichen Stelle $a_1 \ldots a_n$ ein eigentliches Maxiım, bezw. Minimum, wenn sich eine positive Zahl τ so klein anben lässt, dass für alle Werthesysteme $x_1 \ldots x_n$, welche der Bengung

$$0 < (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 \leqq \tau^2$$

enügen, die Differenz

$$f(x_1 \ldots x_n) - f(a_1 \ldots a_n) < 0$$

st im Falle des Maximums, > 0 ist im Falle des Minimums.

---

*) *Zur Theorie der Maxima und Minima der Functionen von n Variabeln*, erichte der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig, Januar 1892.

**) *Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen.* Mit zwei Nachträgen). Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, Juni 90, Nov. 1891, Febr. 1893.

***) Math. Ann. Bd. 42.

Lässt sich diese Differenz, wie im Folgenden durchweg vorausgesetzt wird, nach ganzen positiven Potenzen von

$$x_1 - a_1 = h_1, \ldots x_n - a_n = h_n$$

entwickeln, so wird diese Entwickelung in der Form angesetzt

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(x_1 \ldots x_n) - f(a_1 \ldots a_n) &= g(h_1 \ldots h_n) \\ &= g_i(h_1 \ldots h_n) + g_{i+1}(h_1 \ldots h_n) + \cdots, \end{aligned}$$

wobei $g(h_1 \ldots h_n)$ eine gewöhnliche Potenzreihe der reellen Veränderlichen $h_1 \ldots h_n$ bezeichnet, welche mit diesen zugleich verschwindet, $g_i(h_1 \ldots h_n)$ eine ganze homogene Function i^{ter} Dimension von $h_1 \ldots h_n$ ist, u. s. w.

Die Frage ist damit darauf zurückgeführt, ob sich eine positive Zahl $\mathfrak{r}$ so klein angeben lässt, dass für alle reellen Werthesysteme $h_1 \ldots h_n$, welche der Bedingung

$$(3) \qquad 0 < h_1^2 + \cdots + h_n^2 \leqq \mathfrak{r}^2$$

genügen, die Function $g(h_1 \ldots h_n)$ durchaus negativ ist im Falle des Maximums, bezw. durchaus positiv ist im Falle des Minimums.

Es sind nun, wie bekannt, drei Fälle zu unterscheiden

I) $g_i(h_1 \ldots h_n)$ ist eine *definite* Form (i gerade), dann ist $f(a_1 \ldots a_n)$ ein eigentliches Maximum, wenn $g_i < 0$ ist, ein eigentliches Minimum, wenn $g_i > 0$ ist.

II) $g_i(h_1 \ldots h_n)$ ist eine *indefinite* Form, dann ist $f(a_1 \ldots a_n)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

III) $g_i(h_1 \ldots h_n)$ ist eine *semidefinite* Form, d. h. eine solche, welche den Werth Null für von $0 \ldots 0$ verschiedene reelle Werthesysteme $\overset{0}{h}_1 \ldots \overset{0}{h}_n$ annimmt, im Uebrigen aber für alle anderen reellen Werthesysteme $h_1 \ldots h_n$ nur Functionswerthe von einem und demselben Vorzeichen annimmt, welches kurz als das Vorzeichen von g_i bezeichnet wird; ist dieses Vorzeichen das positive, so nennt man wohl auch g_i eine *semidefinite positive* Form, andernfalls eine *semidefinite negative* Form. In diesem Falle entscheidet das Vorzeichen von g_i allein nicht, ob $g(0 \ldots 0)$ ein Maximum oder Minimum ist.

Die Beweise der Sätze I) und II) — die übrigens längst erledigt sind — sowie die Untersuchung des Falles III) stützen sich nun auf folgende Ueberlegung.

Wenn für die Function $g(h_1 \ldots h_n)$ der Werth 0 auf jeder durch den Nullpunkt O des Bereiches $h_1 \ldots h_n$ gehenden Geraden

$$(4) \qquad h_1 = \lambda_1 \varrho, \ldots h_n = \lambda_n \varrho$$

(wobei ϱ eine reelle Veränderliche ist, welche sowohl positive als negative Werthe annehmen kann, $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ reelle Veränderliche sind, für welche $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 1$ ist, so dass $h_1^2 + \cdots + h_n^2 = \varrho^2$ ist)

einem Intervalle $P_\lambda O Q_\lambda$, nämlich $-p_\lambda \leqq \varrho \leqq q_\lambda$, (wobei der Zeiger auf das Werthesystem $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ hindeuten soll und p_λ, q_λ wesentlich itive von 0 verschiedene Grössen sind), welches den Nullpunkt in iem Inneren enthält, ein eigentliches Maximum, bezw. Minimum ist, l wenn die untere Grenze r der positiven Veränderlichen r_λ, welche absoluten Betrag der kleineren der beiden Strecken $P_\lambda O$ und $O Q_\lambda$ eichnet, oder die kleinere der Grössen p_λ und q_λ, für den Bereich $+ \cdots + \lambda_n^2 = 1$ von Null verschieden ist, so ist $g(h_1 \ldots h_n)$ in Umgebung der Stelle $0 \ldots 0$ vom Radius r, d. h. im Bereiche $\leqq h_1^2 + \cdots + h_n^2 \leqq r^2$ *durchaus negativ*, bezw. *durchaus positiv*, $> g(0 \ldots 0)$ ein eigentliches Maximum, bezw. Minimum.

Setzt man daher

$$g(\lambda_1 \varrho \ldots \lambda_n \varrho) = \varrho^i \varphi(\lambda_1 \ldots, \lambda_n; \varrho),$$

ei

$$\varphi(\lambda_1 \ldots \lambda_n; \varrho) = g_i(\lambda_1 \ldots \lambda_n) + \varrho g_{i+1}(\lambda_1 \ldots \lambda_n) + \cdots$$

so handelt es sich nur darum zu entscheiden, ob sich eine positive l $\mathfrak{r}$ so klein angeben lässt, dass $\varphi(\lambda_1 \ldots \lambda_n; \varrho)$ für alle reellen rthesysteme $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ des Bereiches $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 1$ durchaus Null verschieden ist, solange nur $0 < \varrho^2 \leqq \mathfrak{r}^2$ ist.

Diese Entscheidung ist nun eben in den Fällen I) und II) sehr ht zu treffen.

Der Voraussetzung nach convergirt die Potenzreihe $g(h_1 \ldots h_n)$ nge $|h_1| \ldots |h_n|$ eine gehörig klein gewählte positive Zahl c nicht rschreiten. Ersetzt man in $g_{i+k}(h_1 \ldots h_n)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die Coefenten durch ihre absoluten Beträge und bezeichnet das Resultat $G_{i+k}(h_1 \ldots h_n)$, so giebt es demnach eine positive Zahl $\mathfrak{M}$ so chaffen, dass

$$G_{i+k}(c \ldots c) = c^{i+k} G_{i+k}(1 \ldots 1) < \mathfrak{M}$$

für alle k.

Daraus folgt aber

$$|g_{i+k}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)| < \frac{\mathfrak{M}}{c^{i+k}}$$

alle betrachteten Werthesysteme $\lambda_1 \ldots \lambda_n$.

Macht man also nur $|\varrho| < c$, so ist

$$|\varrho g_{i+1}(\lambda_1 \cdots \lambda_n) + \varrho^2 g_{i+2}(\lambda_1 \cdots \lambda_n) + \cdots| < \frac{\mathfrak{M}}{c^i} \frac{|\varrho|}{c - |\varrho|}$$

l kann somit durch Verkleinerung von $|\varrho|$ beliebig klein gemacht rden.

Ist nun $g_i(h_1 \ldots h_n)$ eine *definite* Form, so ist auch $g_i(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$ Bereiche $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 1$ eine solche und stimmt im Vorchen mit $g_i(h_1 \ldots h_n)$ überein.

Der absolute Betrag von $g_i(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$ hat also eine von Null verschiedene untere Grenze $\mathfrak{m}$. Wählt man daher $\mathfrak{r} < c$ und so klein, dass

$$\frac{\mathfrak{M}}{c^i} \frac{\mathfrak{r}}{c-\mathfrak{r}} < \mathfrak{m}$$

ist, so ist im Bereiche $0 < h_1^2 + \cdots + h_n^2 \leqq \mathfrak{r}^2$ das Vorzeichen von $g(h_1 \ldots h_n)$ mit dem von $g_i(h_1 \ldots h_n)$ übereinstimmend, also $g(0 \ldots 0)$ ein eigentliches Maximum, wenn $g_i(h_1 \ldots h_n) < 0$ ist, ein eigentliches Minimum, wenn $g_i(h_1 \ldots h_n) > 0$ ist.

Ist dagegen $g_i(h_1 \ldots h_n)$ *indefinit*, so giebt es einerseits Werthesysteme $h_1' = \lambda_1' \varrho' \ldots h_n' = \lambda_n' \varrho'$, für welche

$$g_i(h_1' \ldots h_n') = \varrho'^i g_i(\lambda_1' \ldots \lambda_n')$$

positiv ist, somit (da ϱ' positiv gewählt werden kann) auch $g_i(\lambda_1' \ldots \lambda_n')$ positiv ist; andrerseits Werthesysteme

$$h_1'' = \lambda_1'' \varrho'', \ldots h_n'' = \lambda_n'' \varrho'',$$

für welche

$$g_i(h_1'' \ldots h_n'') = \varrho''^i g_i(\lambda_1'' \ldots \lambda_n'')$$

negativ ist, somit (da ϱ'' positiv gewählt werden kann) auch $g_i(\lambda_1'' \ldots \lambda_n'')$ negativ ist.

Macht man daher wieder $\mathfrak{r} < c$ und so klein, dass $\frac{\mathfrak{M}}{c^i} \frac{\mathfrak{r}}{c-\mathfrak{r}}$ kleiner ist als $g_i(\lambda_1' \ldots \lambda_n')$ und $|g_i(\lambda_1'' \ldots \lambda_n'')|$, so folgt, dass $g(h_1 \ldots h_n)$ in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle $0 \ldots 0$ sowohl positive als negative Werthe annimmt, somit $g(0 \ldots 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum ist.

Im Falle III), wo $g_i(h_1 \ldots h_n)$ *semidefinit* ist, müssen zur Entscheidung, ob $g(0 \ldots 0)$ ein Maximum bezw. ein Minimum ist, jedenfalls noch Glieder von höherer als der i^{ten} Dimension herangezogen werden, wie die folgende Betrachtung zeigen wird.

Ist $\overset{0}{h}_1 \ldots \overset{0}{h}_n$ ein von $0 \ldots 0$ verschiedenes Werthesystem, für welches $g_i(h_1 \ldots h_n)$ verschwindet, so ordnen sich demselben sofort unendlich viele andere Werthesysteme von derselben Beschaffenheit zu, die sich von $\overset{0}{h}_1 \ldots \overset{0}{h}_n$ nur durch einen reellen Proportionalitätsfactor t unterscheiden, nämlich die Werthesysteme $t\overset{0}{h}_1 \ldots t\overset{0}{h}_n$; unter diesen giebt es stets zwei, deren Quadratsumme gleich 1 ist; sie werden mit $\xi_1 \cdots \xi_n$, $-\xi_1 \cdots -\xi_n$ bezeichnet. Fasst man im Falle $n=3$ h_1, h_2, h_3 als Parallelcoordinaten eines Punktes auf, so stellen die Formeln

$$h_1 = \xi_1 \varrho, \quad h_2 = \xi_2 \varrho, \quad h_3 = \xi_3 \varrho$$

die Gerade dar, welche den Nullpunkt O mit dem Punkte (ξ_1, ξ_2, ξ_3) verbindet.

Ich gebrauche daher für die Gesammtheit der Werthesysteme

$$h_1 = \xi_1 \varrho \ldots h_n = \xi_n \varrho$$

auch für ein beliebiges n die Bezeichnung *Nullgerade* der semidefiniten Form $g_i(h_1 \ldots h_n)$.

Da g_i sein Vorzeichen nicht wechselt, so müssen in der Entwickelung von $g_i(\xi_1 + \eta_1 \ldots \xi_n + \eta_n)$ nach Potenzen von $\eta_1 \ldots \eta_n$ die Glieder 1. Dimension identisch verschwinden, also die n Gleichungen

$$\frac{\partial g_i}{\partial h_1} = 0 \ldots \frac{\partial g_i}{\partial h_n} = 0 \tag{10}$$

durch ein solches Werthesystem $\xi_1 \ldots \xi_n$ erfüllt sein; die Discriminante von g_i ist daher nothwendig gleich Null.

Verschwindet eine der partiellen Ableitungen identisch, z. B. $\frac{\partial g_i}{\partial h_n}$, so dass g_i die Veränderliche h_n nicht enthält, so wird offenbar durch

$$h_1 : h_2 : \ldots : h_{n-1} : h_n = 0 : 0 : \ldots : 0 : 1 \tag{11}$$

eine Nullgerade von g_i bestimmt; verschwindet auch $\frac{\partial g_i}{\partial h_{n-1}}$ identisch, so werden, wenn c_{n-1} eine willkürliche reelle Constante bezeichnet, durch

$$h_1 : h_2 : \ldots : h_{n-2} : h_{n-1} : h_n = 0 : 0 : \ldots : 0 : c_{n-1} : 1$$

einfach unendlich viele Nullgerade dargestellt. Enthält g_i nur die Veränderlichen $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ $(\nu < n)$, so werden, wenn $c_{\nu+1} \ldots c_{n-1}$ $n - \nu - 1$ willkürliche reelle Constanten sind, durch

$$\begin{aligned} h_1 : h_2 : \ldots : h_\nu : h_{\nu+1} : h_{\nu+2} : \ldots : h_{n-1} : h_n \\ = 0 : 0 : \ldots : 0 : c_{\nu+1} : c_{\nu+2} : \ldots : c_{n-1} : 1 \end{aligned} \tag{12}$$

$n - \nu - 1$-fach unendlich viele Nullgerade dargestellt; dieselben erschöpfen die Gesammtheit der Nullgeraden von g_i, wenn g_i im Bereiche der wirklich darin vorkommenden Veränderlichen $h_1 \ldots h_\nu$ definit ist; ist aber g_i in diesem Bereiche semidefinit und ist $h_1 : \ldots : h_\nu = \xi_1 : \ldots : \xi_\nu$ eine Nullgerade im Bereiche $h_1 \ldots h_\nu$, so entspringen aus ihr für den Bereich $h_1 \ldots h_n$ die $n - \nu - 1$-fach unendlich vielen Nullgeraden

$$h_1 : \ldots : h_\nu : h_{\nu+1} : \ldots : h_{n-1} : h_n = \xi_1 : \ldots : \xi_\nu : c_{\nu+1} : \ldots : c_{n-1} : 1. \tag{13}$$

Wenn die Hesse'sche Determinante von $g_i(h_1 \ldots h_n)$ nicht identisch verschwindet, so besteht zwischen den partiellen Ableitungen von g_i keine Relation und können somit unendlich viele Nullgerade nur dann vorhanden sein, wenn die partiellen Ableitungen von g_i sämmtlich einen gemeinsamen Theiler $\vartheta(h_1 \ldots h_n)$ besitzen; aus $ig_i = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial h_\nu} h_\nu$ folgt sofort, dass ϑ auch Factor von g_i ist; setzt man also $g_i = \vartheta\gamma$,

so folgt $\frac{\partial g_i}{\partial h_\nu} = \vartheta \frac{\partial \gamma}{\partial h_\nu} + \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial h_\nu}$; hat also ϑ selbst keinen quadratischen Factor, so muss ϑ auch Factor von γ und somit ϑ^2 Factor von g_i sein. Damit ist gezeigt:

Wenn die *semidefinite* Form $g_i(h_1 \ldots h_n)$, deren Hesse'sche Determinante nicht identisch verschwindet, unendlich viele Nullgerade besitzt, so hat sie nothwendig einen quadratischen Factor.

Es soll nun zunächst für $n = 3$, wo die geometrische Interpretation zur Verfügung steht, das Verfahren beschrieben werden, durch welches man zu gewissen nothwendigen und unter Umständen auch zu hinreichenden Kriterien dafür gelangt, dass $g(0, 0, 0)$ ein eigentliches Minimum, bezw. Maximum ist, wenn die Entwickelung

$$g(h_1, h_2, h_3) = g_i(h_1, h_2, h_3) + g_{i+1}(h_1, h_2, h_3) + g_{i+2}(h_1, h_2, h_3) + \cdots$$

mit einer *semidefiniten* Form $g_i(h_1, h_2, h_3)$ beginnt, deren sämmtliche Nullgeraden als bekannt vorausgesetzt werden.

Um die Sache anschaulich zu machen fasse ich h_1, h_2, h_3 als rechtwinklige Punktcoordinaten auf. Aus dem Anfangspunkte O werde die Kugel $\mathfrak{K}$ vom Radius 1 geschlagen; auf ihr sei ξ mit den Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 ein Punkt, für welchen g_i verschwindet; dann wird durch

$$h_1 = \xi_1 \varrho, \quad h_2 = \xi_2 \varrho, \quad h_3 = \xi_3 \varrho \tag{14}$$

die Nullgerade $\mathfrak{N}_\xi$ dargestellt. Bildet man

$$g(\xi_1 \varrho_1, \xi_2 \varrho_1, \xi_3 \varrho) = \varrho^{i+1} [g_{i+1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \varrho g_{i+2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \cdots] \tag{15}$$

(die Convergenz der Entwickelung steht nach der Voraussetzung über die Convergenz von $g(h_1, h_2, h_3)$ für hinreichend kleine $|h_1|, |h_2|, h_3$ ausser Frage) und erinnert sich, dass i gerade ist, so erkennt man sofort, da für hinreichend kleine ϱ, falls $g_{i+1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \gtrless 0$ ist, das Vorzeichen des Klammerausdruckes mit dem von $g_{i+1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ übereinstimmt, als erste nothwendige Bedingung:

I. *Jede Nullgerade von g_i muss auch Nullgerade von g_{i+1} sein.*

Ist sie erfüllt, so beginnt die Entwickelung (15) mit dem Gliede $\varrho^{i+2} g_{i+2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$; daraus ergiebt sich als eine weitere nothwendige Bedingung:

II. *g_{i+2} muss auf jeder Nullgeraden von g_i entweder Functionswerthe vom Vorzeichen der semidefiniten Form g_i annehmen oder verschwinden.*

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so weiss man sicher, dass $g(0, 0, 0)$ weder ein Minimum noch ein Maximum ist.

Für

$$g(h_1, h_2, h_3) = h_1^4 + 2h_1^2 h_3^3 + 3h_1 h_2^2 h_3^2 + 5h_2 h_3^4 + \cdots$$

z. B. giebt es einfach unendlich viele Nullgerade der Anfangsform h_1^4,

nämlich das ganze Büschel der Geraden durch den Nullpunkt in der $h_2 h_3$ Ebene:

$$h_1 = 0, \quad h_2 = \xi_2 \varrho, \quad h_3 = \xi_3 \varrho \quad (\xi_2^2 + \xi_3^2 = 1).$$

Greift man eine solche heraus, für welche ξ_2 und ξ_3 von Null verschieden sind, so verschwindet auf ihr das Glied $5 h_2 h_3^4$ aus g_5 nicht, folglich ist $g(0, 0, 0)$ gewiss kein Minimum.

Oder bei

$$g(h_1, h_2, h_3) = h_1^4 + 2h_1^3 h_2^2 + 4h_1^2 h_2^2 h_3 + h_1 h_2 h_3^3 - h_2^6 + (h_1, h_2, h_3)_7 + \cdots$$

ist für diejenigen Nullgeraden, bei welchen $\xi_2 \gtrless 0$ ist, die Bedingung II) nicht erfüllt.

Ebenso erkennt man:

III) *Ist* $g_{i+2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$, *so muss, damit* $g(h_1, h_2, h_3)$ *auf der Nullgeraden* $\mathfrak{N}_\xi$ *sein Zeichen nicht wechsle,* $g_{i+3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ *sein,* $g_{i+4}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ *mit* g_i *im Vorzeichen übereinstimmen oder verschwinden u. s. w.*

Verschwinden auf einer Nullgeraden $\mathfrak{N}_\xi$ alle g_{i+k}, also auch g selbst, so ist $g(0, 0, 0)$ jedenfalls kein eigentliches Maximum bezw. Minimum.

Diese nothwendigen Bedingungen ergeben sich daraus, dass g auf jeder Nullgeraden von g_i in einem hinreichend kleinen Intervalle $P_\xi O Q_\xi$ zu beiden Seiten des Nullpunktes von Null verschieden und im Vorzeichen mit dem von g_i übereinstimmend sein muss; sie sind aber keineswegs auch schon ausreichend dafür, dass $g(0, 0, 0)$ ein Maximum bezw. Minimum sei. Dazu ist durchaus nothwendig und hinreichend, dass sich um den Nullpunkt eine Kugel mit einem so kleinen Radius r schlagen lässt, dass innerhalb derselben $g(h_1, h_2, h_3)$ von Null verschieden ist; diese Möglichkeit ist aber eben durch die eingeführten Bedingungen noch nicht festgestellt.

Der Grund dafür wird sich sogleich ergeben. Schliesst man auf der Kugel $\mathfrak{K}$ die Gesammtheit der Nullpunkte ξ von g_i aus, so handelt es sich noch darum zu untersuchen, ob für alle übrig bleibenden Punkte λ auf $\mathfrak{K}$, deren Gesammtheit mit $\mathfrak{K}'$ bezeichnet sein mag, sich $|\varrho|$ durch eine gehörig klein gewählte positive Zahl r' so begrenzen lässt, dass der Ausdruck

$$g_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \varrho g_{i+1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \varrho^2 g_{i+2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \cdots$$

für alle in Betracht kommenden Werthesysteme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von Null verschieden ist und in seinem Vorzeichen mit g_i übereinstimmt, wenn nur $0 < |\varrho| \leqq r'$ ist.

Das ist aber eben durchaus nicht nothwendig der Fall und zwar deswegen nicht, weil die untere Grenze von $|g_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)|$ dad[illegible]

dass man aus $\mathfrak{R}$ die Nullpunkte ξ von g_i absondert, zufolge der Stetigkeit von g_i nicht geändert wird, also jedenfalls auch auf $\mathfrak{R}'$ gleich Null ist; daher kann es wohl geschehen, dass es zu noch so kleinen Werthen von ϱ immer noch Werthesysteme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ giebt, für welche

$$|g_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)| < |\varrho g_{i+1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \varrho^2 g_{i+2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \cdots|$$

ist und zugleich das Vorzeichen des Ausdruckes $\varrho g_{i+1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \cdots$ verschieden ist von dem des g_i. Dann nimmt aber $g(h_1, h_2, h_3)$ in jeder noch so kleinen Umgebung des Nullpunktes sowohl positive als negative Werthe an.

Ein Beispiel dafür bietet die Function

$$g(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + 3h_1h_2^2 + 4h_1h_3^2 + 2h_2^4 + 5h_2^2h_3^2 + 3h_3^4;$$

hier ist jede Nullgerade von g_2 auch Nullgerade von g_3 und g_4 ist sogar auf jeder Nullgeraden überall mit Ausnahme des Nullpunktes positiv wie h_1^2, und doch ist sehr leicht zu sehen, dass diese Function g in jeder noch so kleinen Umgebung des Nullpunktes sowohl positive als negative Werthe annimmt, wenn man die Zerlegung

$$g(h_1, h_2, h_3) = (h_1 + h_2^2 + h_3^2)(h_1 + 2h_2^2 + 3h_3^2)$$

bemerkt.

Der eigentliche Grund dafür, dass die angeführten Kriterien für das Vorhandensein eines Minimums bezw. Maximums nicht ausreichen, liegt, wie bereits hervorgehoben wurde, darin, dass durch die Absonderung der Nullstellen ξ von g_i auf $\mathfrak{R}$ die untere Grenze von $|g_i(h_1, h_2, h_3)|$ auf $\mathfrak{R}'$ nach wie vor Null ist.

Um diesen Umstand zu beseitigen umgebe man jede Nullstelle ξ von g_i auf $\mathfrak{R}$ mit einem gehörig klein gewählten Flächenstücke σ_ξ, auf dessen Form es gar nicht ankommt, wenn es nur so gebildet ist, dass der Punkt ξ wirklich in seinem Innern und nicht etwa auf der Begrenzung liegt.

Nach Absonderung des von diesen sämmtlichen Flächenstücken σ_ξ bedeckten Theiles von $\mathfrak{R}$, der mit $\widetilde{\mathfrak{R}}$ bezeichet wird, bleibt nun von $\mathfrak{R}$ ein Stück $\overline{\mathfrak{R}}$ übrig, von dem man jetzt mit Sicherheit behaupten kann, dass auf ihm die untere Grenze von $|g_i|$ von Null verschieden ist, weil nirgends weder im Innern noch auf der Begrenzung von $\overline{\mathfrak{R}}$ eine Nullstelle ξ von g_i liegt.

Wenn $g(0, 0, 0)$ z. B. ein eigentliches Minimum ist, so lässt sich gewiss um jeden Punkt ξ ein Flächenstück σ_ξ so klein beschreiben, dass $g(h_1, h_2, h_3)$ innerhalb der Pyramide, die entsteht, wenn man σ_ξ aus O projicirt und das Bündel der projicirenden Strahlen durch eine Kugel von gehörig kleinem Radius r_ξ schneidet, überall mit Ausnahme des Punktes O selbst positiv ist; aber auch umgekehrt: wenn jedem Punkte ξ ein solcher Bereich zugeordnet werden kann und wenn

im Falle, dass unendlich viele solche Punkte vorhanden sind, die unteren Grenzen der Flächenzahlen σ_ξ und der Radien τ_ξ von Null verschieden und $g_i(h_1, h_2, h_3) \geqq 0$ ist, so ist, wie noch näher ausgeführt werden wird, $g(0, 0, 0)$ ein eigentliches Minimum.

Für diese pyramidenförmigen Bereiche ist nur wesentlich, dass sie die betrachtete Nullgerade in ihrem Inneren enthalten; auf ihre besondere Gestalt kommt es gar nicht an und man wird sie daher so wählen, wie es für den vorliegenden Zweck am vortheilhaftesten ist. In diesem Sinne werden nun diese Bereiche folgendermassen gebildet.

Man construire um den Punkt ξ als Mittelpunkt den Würfel $\mathfrak{W}_{\xi,\delta_\xi}$ von der Seitenlänge $2\delta_\xi$, der von den drei Paaren von Ebenen begrenzt wird, welche im Abstande $\pm\delta_\xi$ von ξ parallel zu den Coordinatenebenen liegen. Dann ist $\mathfrak{W}_{\xi,\delta_\xi}$ der Bereich der Punkte mit den Coordinaten

$$h_1 = \xi_1 + u_1, \quad h_2 = \xi_2 + u_2, \quad h_3 = \xi_3 + u_3, \tag{16}$$

wenn die reellen Veränderlichen u_1, u_2, u_3 die Bedingungen

$$-\delta_\xi \leqq u_1 \leqq \delta_\xi, \quad -\delta_\xi \leqq u_2 \leqq \delta_\xi, \quad -\delta_\xi \leqq u_3 \leqq \delta_\xi \tag{$\mathfrak{B}$}$$

erfüllen.

Verbindet man dann alle Punkte von $\mathfrak{W}_{\xi,\delta_\xi}$ geradlinig mit O und schneidet die dabei entstehende Pyramide durch die Kugel vom Radius τ_ξ aus dem Centrum O, so wird derjenige Theil der Pyramide, welcher nicht ausserhalb dieser Kugel liegt, nach Ausschluss des Punktes O selbst, als Bereich $[\delta_\xi, \tau_\zeta]$ bezeichnet und im Folgenden verwendet.

$[\delta_\xi, \tau_\xi]$ ist demnach der Bereich der Punkte mit den Coordinaten

$$h_1 = (\xi_1 + u_1)\varrho, \quad h_2 = (\xi_2 + u_2)\varrho, \quad h_3 = (\xi_3 + u_3)\varrho, \tag{17}$$

wenn u_1, u_2, u_3 die Bedingungen ($\mathfrak{B}$) erfüllen und

$$0 < \varrho \leqq \tau_\xi$$

ist.

Wenn sich nun für jeden Punkt ξ ein Bereich $[\delta_\xi, \tau_\xi]$ so klein angeben lässt, dass in demselben $g(h_1, h_2, h_3)$ von Null verschieden ist und im Vorzeichen mit g_i übereinstimmt und wenn im Falle, dass unendlich viele Nullgerade vorhanden sind, die unteren Grenzen δ und $\bar{\tau}$ der Grössen δ_ξ und τ_ξ von Null verschieden sind, so kann man in der That behaupten, dass dann $g(0, 0, 0)$ ein eigentliches Minimum, bezw. Maximum ist, je nachdem $g_i \geqq 0$ oder $\leqq 0$ ist.

Da nämlich jetzt die untere Grenze $\varkappa$ von $|g_i(h_1, h_2, h_3)|$ im Gebiete $\bar{\mathfrak{R}}$ von Null verschieden ist, so lässt sich eine positive Zahl $\bar{\tau}$ so klein angeben, dass

$$|\varrho g_{i+1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \varrho^2 g_{i+2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \cdots| < \varkappa$$

ist, wenn nur $|\varrho| \leqq \bar{\tau}$ ist, und zwar für alle Werthesysteme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des Gebietes $\bar{\mathfrak{R}}$.

Wählt man also die positive Zahl τ nur nicht grösser als $\bar{\tau}$ und $\bar{\bar{\tau}}$, so ist in der That $g(h_1, h_2, h_3)$ im Gebiete $0 < h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \leqq \tau^2$ durchaus von Null verschieden und von demselben Vorzeichen wie g_i; $g(0, 0, 0)$ ist somit ein eigentliches Minimum, wenn $g_i \geqq 0$ ist, ein eigentliches Maximum, wenn $g_i \leqq 0$ ist.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass die Existenz eines Intervalles $P_\xi O Q_\xi$ auf der Nullgeraden $\mathfrak{N}_\xi$, in welchem g ausserhalb O durchaus von Null verschieden ist, keineswegs schon hinreicht um die Existenz eines Bereiches $[\delta_\xi, \tau_\xi]$ sicher zu stellen.

Man sieht dies sehr deutlich an dem Beispiele

$$g(h_1, h_2, h_3) = (h_1 + h_2^2 + h_3^2)(h_1 + 2h_2^2 + 3h_3^2)$$

in welchem $g(h_1, h_2, h_3)$ auf jeder Nullgeraden ausserhalb O durchaus positiv ist.

Der Ort der Nullpunkte ξ ist hier der Hauptkreis auf $\mathfrak{K}$ in der Coordinatenebene $h_1 = 0$; schlägt man um einen Punkt ξ auf diesem Hauptkreise eine Kugel mit dem Radius τ_ξ und legt aus O daran den Berührungskegel und schneidet diesen durch eine Kugel vom Radius τ_ξ aus dem Centrum O, so ist es nicht möglich τ_ξ und τ_ξ so klein zu wählen, dass $g(h_1, h_2, h_3)$ innerhalb des Berührungskegels und der kleinen Kugel überall ausserhalb O von Null verschieden ist. Jede Nullgerade berührt nämlich die beiden Paraboloide $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, deren Gleichungen $h_1 + h_2^2 + h_3^2 = 0$ und $h_1 + 2h_2^2 + 3h_3^2 = 0$ sind, und jeder noch so spitzige Kegel aus O, dessen Axe eine Nullgerade ist, dringt innerhalb jeder noch so kleinen Kugel aus O in das Gebiet zwischen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ ein, in welchem $g(h_1, h_2, h_3)$ negativ ist.

Diese Ueberlegungen können nun ohne Weiteres auf den Fall eines beliebigen $n > 3$ ausgedehnt werden, da die arithmetischen Formulirungen, welche zur Anwendung kommen, dies ohne Weiteres gestatten; auf eine wirkliche Veranschaulichung der Dinge muss man dabei natürlich verzichten; die Uebertragung der geometrischen Bezeichnungen für die Bereiche hat sich als vortheilhaft für die Darstellung bereits eingebürgert.

Ich gehe jetzt daran zu zeigen unter welchen Umständen im Falle $i = 2$ die angegebenen nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein eines eigentlichen Minimums, bezw. Maximums erfüllt werden.

Soll die quadratische Form

$$g_2(h_1 \ldots h_n) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu} h_\lambda h_\mu$$

semidefinit sein, so muss ihre Determinante $A = |a_{\lambda\mu}| = 0$ sein, da

es von $0 \ldots 0$ verschiedene Werthesysteme $\overset{0}{h}_1 \ldots \overset{0}{h}_n$ giebt, welche die linearen Gl. (10) erfüllen.

Verschwinden in A alle Unterdeterminanten von höherem als dem ν^{ten} Grade (Unterdeterminanten aus ν Reihen und ν Zeilen gebildet), aber nicht alle Unterdeterminanten ν^{ten} Grades, so lässt sich bekanntlich g_2 als quadratische Form von ν (aber nicht weniger) neuen Veränderlichen darstellen, welche homogene lineare Functionen von $h_1 \ldots h_n$ sind, zwischen welchen keine lineare Relation besteht.

Diese reguläre quadratische Form von ν Veränderlichen lässt sich als Summe von ν (aber nicht weniger) Quadraten darstellen: hätten diese ν Quadrate nicht gleiche Vorzeichen, so wäre die Form indefinit und damit auch g_2 indefinit.

Die Nullgeraden der Summe von ν gleichbezeichneten Quadraten im Bereiche von n Veränderlichen bilden eine $n - \nu - 1$-fache Mannigfaltigkeit.

Man kann also sagen:

Eine semidefinite quadratische Form $g_2(h_1 \ldots h_n)$, deren Nullgerade eine $n - \nu - 1$-fache Mannigfaltigkeit bilden, lässt sich durch lineare Substitutionen von nichtverschwindender Determinante auf die Form $\varepsilon(H_1^2 + \cdots + H_\nu^2)$ bringen, wobei $H_1 \ldots H_\nu$ von einander unabhängige lineare Formen von $h_1 \ldots h_n$ sind, und $\varepsilon = \pm 1$ das Vorzeichen von $g_2(h_1 \ldots h_n)$ bezeichnet.

Ich betrachte zunächst nur den Fall

$$(18)\quad g(h_1 \ldots h_n) = h_1^2 + \cdots + h_\nu^2 + g_3(h_1 \ldots h_n) + g_4(h_1 \ldots h_n) + \cdots \qquad (\nu \leq n-1).$$

Damit $g(0 \ldots 0)$ ein eigentlich Minimum sein kann, ist nach I) unbedingt erforderlich, dass $g_3(0 \ldots 0, h_{\nu+1} \ldots h_n)$ identisch verschwinde, also g_3 die Form habe

$$(19)\quad g_3(h_1 \ldots h_n) = 2h_1 \overset{(1)}{g}_2(h_1 \ldots h_n) + \cdots + 2h_\nu \overset{(\nu)}{g}_2(h_1 \ldots h_n).$$

Die quadratischen Formen $\overset{(1)}{g}_2 \ldots \overset{(\nu)}{g}_2$ sind dabei im Allgemeinen nicht völlig eindeutig bestimmt, da ja z. B. ein Glied, welches h_1 und h_2 enthält, sowohl in $\overset{(1)}{g}_2$ als in $\overset{(2)}{g}_2$ aufgenommen werden kann. Nach II ist weiter erforderlich, dass $g_4(0 \ldots 0, h_{\nu+1} \ldots h_n)$ für reelle Werthe von $h_{\nu+1} \ldots h_n$ niemals einen negativen Werth annehme, also entweder definit oder semidefinit positiv sei oder identisch verschwinde.

(20) Angenommen es sei $g_4(0 \ldots 0, h_{\nu+1} \ldots h_n)$ eine definite positive biquadratische Form, so reichen doch die Voraussetzungen (19) und (20) im Allgemeinen für das Vorhandensein eines eigentlichen Minimums noch nicht hin; es muss untersucht werden, unter welchen weiteren Bedingungen man jedem Nullpunkte

(21) $h_1 = 0 \ldots h_\nu = 0 \quad h_{\nu+1} = \xi_{\nu+1} \ldots h_n = \xi_n \quad (\xi_{\nu+1}^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1)$

von g_2 auf $\mathfrak{R}$ einen Bereich $[\delta_\xi, \tau_\xi]$ so klein zuordnen kann, dass in demselben $g(h_1 \ldots h_n)$ positiv ist, und zwar so, dass die unteren Grenzen δ und $\overline{\tau}$ für unendlich viele Grössen δ_ξ einerseits, τ_ξ andrerseits, von Null verschieden sind.

Um nun das Verhalten von g in der Umgebung der Nullgeraden

$$h_1 = 0 \ldots h_\nu = 0, \quad h_{\nu+1} = \xi_{\nu+1}\varrho \ldots h_n = \xi_n \varrho$$

zu beurtheilen führe man ein

(22) $h_1 = u_1 \varrho \ldots h_\nu = u_\nu \varrho, \quad h_{\nu+1} = (\xi_{\nu+1} + u_{\nu+1})\varrho \ldots h_n = (\xi_n + u_n)\varrho.$

Setzt man

(23) $$g\big(u_1\varrho \ldots u_\nu\varrho, (\xi_{\nu+1} + u_{\nu+1})\varrho \ldots (\xi_n + u_n)\varrho\big) = \varrho^2 \psi(u_1 \ldots u_n; \varrho; \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n)$$

und bezeichnet für den Augenblick

$$g_n(u_1 \ldots u_\nu, \xi_{\nu+1} + u_{\nu+1}, \ldots \xi_n + u_n)$$

mit

$$\gamma_n \qquad (n = 2, 4, 5 \ldots),$$

so ergiebt sich

(24) $$\begin{aligned} \psi &= u_1^2 + \cdots + u_\nu^2 + 2\varrho u_1 \overset{(1)}{\gamma_2} + \cdots + 2\varrho u_\nu \overset{(\nu)}{\gamma_2} + \varrho^2\gamma_4 + \varrho^3\gamma_5 + \varrho^4\gamma_6 + \cdots \\ &= [u_1 + \varrho\overset{(1)}{\gamma_2}]^2 + \cdots + [u_\nu + \varrho\overset{(\nu)}{\gamma_2}]^2 + \varrho^2[\gamma_4 - \overset{(1)}{\gamma_2}{}^2 - \cdots - \overset{(\nu)}{\gamma_2}{}^2] \\ &\qquad + \varrho^3\gamma_5 + \varrho^4\gamma_6 + \cdots \\ &\geqq \varrho^2\{\gamma_4 - \overset{(1)}{\gamma_2}{}^2 - \cdots - \overset{(\nu)}{\gamma_2}{}^2 + \varrho\gamma_5 + \varrho^2\gamma_6 + \cdots\}. \end{aligned}$$

Bemerkt man nun die Zerlegungen

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= g_4(0 \ldots 0, \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n) + \mathfrak{g}_4(u_1 \ldots u_n; \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n) \\ \overset{(1)}{\gamma_2} &= \overset{(1)}{g_2}(0 \ldots 0, \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n) + \overset{(1)}{\mathfrak{g}_2}(u_1 \ldots u_n; \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{(\nu)}{\gamma_2} &= \overset{(\nu)}{g_2}(0 \ldots 0, \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n) + \overset{(\nu)}{\mathfrak{g}_2}(u_1 \ldots u_n; \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n), \end{aligned}$$

in welchen $\mathfrak{g}_4, \overset{(1)}{\mathfrak{g}_2} \ldots \overset{(\nu)}{\mathfrak{g}_2}$ ganze Functionen von $u_1 \ldots u_n$ sind, welche sämmtlich verschwinden, wenn jede dieser Veränderlichen den Werth 0 annimmt, und die Grössen

$$\overset{(1)}{g_2}(0 \ldots 0, \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n) \ldots \overset{(\nu)}{g_2}(0 \ldots 0, \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n)$$

von jener Unbestimmtheit frei sind, welche für die Formen

$$\overset{(1)}{g_2}(h_1 \ldots h_n) \ldots \overset{(\nu)}{g_2}(h_1 \ldots h_n)$$

angedeutet wurde, so lässt sich in der That zeigen, dass die auch als

hinreichend erkannten Bedingungen für das Vorhandensein eines eigentlichen Minimums erfüllt werden, wenn der Ausdruck

$$g_4(0\ldots0, \xi_{\nu+1}\ldots\xi_n) - \overset{(1)}{g_2}(0\ldots0, \xi_{\nu+1}\ldots\xi_n)^2 - \cdots - \overset{(\nu)}{g_2}(0\ldots0, \xi_{\nu+1}\ldots\xi_n)^2$$

im Bereiche $\xi_{\nu+1}^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$ eine von Null verschiedene positive untere Grenze $\mathfrak{k}$ hat, oder mit anderen Worten, wenn

$$\Delta_4(h_{\nu+1}\ldots h_n)$$
$$= g_4(0\ldots0, h_{\nu+1}\ldots h_n) - \overset{(1)}{g_2}(0\ldots0, h_{\nu+1}\ldots h_n)^2 - \cdots - \overset{(\nu)}{g_2}(0\ldots0, h_{\nu+1}\ldots h_n)^2$$

eine definite positive Form in den Veränderlichen $h_{\nu+1}\ldots h_n$ ist.

Vorerst sei noch darauf aufmerksam gemacht, wie sich die Formen

$$\overset{(1)}{g_2}(0\ldots0, h_{\nu+1}\ldots h_n)\ldots\overset{(\nu)}{g_2}(0\ldots0, h_{\nu+1}\ldots h_n)$$

aus $g_3(h_1\ldots h_n)$ unmittelbar gewinnen lassen.

Ist

$$c_{\alpha_1\ldots\alpha_n} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2}\ldots h_\nu^{\alpha_\nu} h_{\nu+1}^{\alpha_{\nu+1}}\ldots h_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_1+\cdots+\alpha_n = 3)$$

ein Glied von $g_3(h_1\ldots h_n)$, so liefert dasselbe ein Glied von

$$2\overset{(1)}{g_2}(0\ldots0, h_{\nu+1}\ldots h_n)$$

dann und nur dann, wenn $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu = 0$ ist; alle diese Glieder und nur diese kommen aber auch in $\frac{\partial g_3}{\partial h_1}$ vor, wenn man darin $h_1 = \cdots = h_\nu = 0$ setzt; dasselbe gilt bezüglich $2\overset{(2)}{g_2}(0\ldots0, h_{\nu+1}\ldots h_n)$ und $\frac{\partial g_3}{\partial h_2}$ u. s. w.

Bezeichnet man also $\frac{\partial g_3}{\partial h_n}$ mit $g_{3,n}$, so ist:

$$\begin{aligned}
&\overset{(1)}{g_2}(0\ldots0, h_{\nu+1}\ldots h_n) = \tfrac{1}{2}\, g_{3,1}(0\ldots0, h_{\nu+1}\ldots h_n)\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\overset{(\nu)}{g_2}(0\ldots0, h_{\nu+1}\ldots h_n) = \tfrac{1}{2}\, g_{3,\nu}(0\ldots0, h_{\nu+1}\ldots h_n).
\end{aligned} \tag{25}$$

Bringt man, um den versprochenen Nachweis zu geben,

$$\gamma_4 - \overset{(1)}{\gamma_2}{}^2 - \cdots - \overset{(\nu)}{\gamma_2}{}^2$$

auf die Form

$$g_4(0\ldots0, \xi_{\nu+1}\ldots\xi_n) - \overset{(1)}{g_2}(0\ldots0, \xi_{\nu+1}\ldots\xi_n)^2 - \cdots - \overset{(\nu)}{g_2}(0\ldots0, \xi_{\nu+1}\ldots\xi_n)^2 + \mathfrak{G}(u_1\ldots u_n; \xi_{\nu+1}\ldots\xi_n),$$

so ist $\mathfrak{G}$ eine ganze Function der eingeschriebenen Argumente, welche verschwindet, wenn jede der Veränderlichen $u_1\ldots u_n$ den Werth 0 annimmt; ersetzt man in ihr die Coefficienten durch ihre absoluten Beträge, jede der Grössen $\xi_{\nu+1}\ldots\xi_n$ durch 1, und bezeichnet das

Resultat mit $\Gamma(u_1 \dots u_n)$, so kann man für den absoluten Betrag jeder der Veränderlichen $u_1 \dots u_n$ eine Begrenzung δ sicher so klein angeben, dass

$$|\Gamma(u_1 \dots u_n)| < \tfrac{\mathfrak{k}}{4}$$

ist, wenn nur

$$|u_1| \leqq \delta \dots |u_n| \leqq \delta$$

ist; dann ist aber gewiss auch

$$|\mathfrak{G}(u_1 \dots u_n;\ \xi_{\nu+1} \dots \xi_n)| < \tfrac{\mathfrak{k}}{4}$$

bei derselben Beschränkung von $u_1 \dots u_n$ und zwar für jedes reelle Werthsystem $\xi_{\nu+1} \dots \xi_n$ des Bereiches $\xi_{\nu+1}^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$.

Andrerseits kann man für $|\varrho|$ eine Begrenzung $\tilde{\tau}$ so klein angeben, dass auch

$$|\varrho\gamma_5 + \varrho^2\gamma_6 + \dots| < \tfrac{\mathfrak{k}}{4}$$

ist, wenn nur $|\varrho| \leqq \tilde{\tau}$ ist, und zwar für alle soeben betrachteten Werthesysteme $u_1 \dots u_n$ und $\xi_{\nu+1} \dots \xi_n$. Die Potenzreihe $g(h_1 \dots h_n)$ convergirt ja der Voraussetzung zufolge, wenn $|h_1| \dots |h_n|$ sämmtlich die gehörig klein gewählte positive Zahl c nicht überschreiten; es convergirt daher sicher auch die Potenzreihe ψ in den Veränderlichen $u_1 \dots u_n : \varrho$, wenn nur $|u_1| \leqq \delta \dots |u_n| \leqq \delta$ und $(1+\delta)|\varrho| \leqq c$ ist und zwar gleichmässig für alle Werthsysteme $\xi_{\nu+1} \dots \xi_n$ des Bereiches $\xi_{\nu+1}^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$; dies gilt auch noch, wenn man die Coefficienten in $g(h_1 \dots h_n)$ durch ihre absoluten Beträge ersetzt.

Ersetzt man also in $\gamma_5, \gamma_6, \dots$ die Coefficienten der früheren Potenzproducte $h_1^{\mu_1} \dots h_n^{\mu_n}$ durch ihre absoluten Beträge, die Grössen $\xi_{\nu+1} \dots \xi_n$ sämmtlich durch 1, die Veränderlichen $u_1 \dots u_n$ sämmtlich durch δ, und bezeichnet die Resultate mit $\Gamma_5, \Gamma_6, \dots$, so convergirt die Potenzreihe in ϱ

$$\Gamma_5\varrho + \Gamma_6\varrho^2 + \dots$$

sicher solange $|\varrho| \leqq \frac{c}{1+\delta}$ ist und kann man die positive Zahl $\tilde{\tau}$ so klein wählen, dass

$$|\Gamma_5\varrho + \Gamma_6\varrho^2 + \dots| < \tfrac{\mathfrak{k}}{4}$$

ist, wenn nur $|\varrho| \leqq \tilde{\tau}$ ist.

Dann ist aber sicher auch

$$|\gamma_5\varrho + \gamma_6\varrho^2 + \dots| < \tfrac{\mathfrak{k}}{4},$$

wenn $|u_1| \leqq \delta \dots |u_n| \leqq \delta$, $|\varrho| \leqq \tilde{\tau}$ ist und zwar für jedes reelle Werthsystem $\xi_{\nu+1} \dots \xi_n$ des Bereiches $\xi_{\nu+1}^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$.

Damit ist nun in der That jedem solchen Werthesysteme $\xi_{\nu+1} \ldots \xi_n$ ein Bereich $[\delta_\xi, \tau_\xi]$, nämlich der Bereich

$$h_1 = u_1 \varrho \ldots h_\nu = u_\nu \varrho, \; h_{\nu+1} = (\xi_{\nu+1} + u_{\nu+1})\varrho \ldots h_n = (\xi_n + u_n)\varrho,$$
$$|u_1| \leqq \delta \ldots |u_n| \leqq \delta, \qquad 0 < |\varrho| \leqq \overline{\tau}$$

zugeordnet, in welchem $\psi > \frac{\mathfrak{k}}{2} \varrho^2$ ist, also auch $g(h_1 \ldots h_n)$ durchaus positiv ist.

Da für alle in Betracht kommenden Werthesysteme $\xi_{\nu+1} \ldots \xi_n$ δ_ξ einen und denselben Werth δ, τ_ξ einen und denselben Werth $\overline{\tau}$ hat, so ist auch im Falle, dass unendlich viele solche Werthesysteme vorhanden sind, die Bedingung sicher erfüllt, dass die untere Grenze der Grössen δ_ξ und ebenso die der Grössen τ_ξ von Null verschieden ist. Schneidet man dann aus dem Bereiche $h_1^2 + \cdots + h_n^2 = 1$, der als die Einheitskugel $\mathfrak{K}$ bezeichnet wird, die Gesammtheit $\overline{\mathfrak{K}}$ derjenigen Stellen aus, welche den Bereichen $[\delta_\xi, \tau_\xi]$ angehören, und bezeichnet den übrig bleibenden Theil von $\mathfrak{K}$ mit $\overline{\overline{\mathfrak{K}}}$, so ist für diesen Bereich die untere Grenze $\overline{\mathfrak{m}}$ von $h_1^2 + \cdots + h_\nu^2$ sicher von Null verschieden, weil im Inneren und auf der Begrenzung von $\overline{\mathfrak{K}}$ keine Nullstelle dieser quadratischen Form liegt, welche als stetige Function in jedem endlichen Bereiche ihre untere Grenze im Inneren oder an der Grenze des Bereiches wirklich erreicht.

Ist $\bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_n$ irgend eine Stelle in $\overline{\mathfrak{K}}$, so ist

$$g(\bar{\lambda}_1 \varrho, \ldots \bar{\lambda}_n \varrho)$$
$$= \varrho^2 [\bar{\lambda}_1^2 + \cdots + \bar{\lambda}_\nu^2 + \varrho g_3(\bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_n) + \varrho^2 g_4(\bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_n) + \cdots],$$

nun kann man wieder die positive Zahl $\bar{\tau}$ so klein wählen, dass

$$\overline{\mathfrak{m}} > |\varrho g_3(\bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_n) + \varrho^2 g_4(\bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_n) + \cdots|$$

ist, wenn nur $|\varrho| \leqq \bar{\tau}$ ist, und zwar für alle Stellen von $\overline{\overline{\mathfrak{K}}}$.

Ersetzt man nämlich wieder in g_3, $g_4 \ldots$ die Coefficienten durch ihre absoluten Beträge, die Grössen $\bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_n$ sämmtlich durch 1 und bezeichnet die Resultate mit $G_5, G_6, \ldots$ so convergirt die Potenzreihe $G_5 \varrho + G_6 \varrho^2 + \cdots$, wenn $|\varrho| \leqq c$ ist und kann man $\bar{\tau}$ so klein machen, dass

$$\overline{\mathfrak{m}} > |G_5 \varrho + G_6 \varrho^2 + \cdots|$$

ist, wenn nur $|\varrho| \leqq \bar{\tau}$ ist.

Dann ist aber $g(h_1 \ldots h_n)$ sicher in dem ganzen Bereiche

$$h_1 = \bar{\lambda}_1 \varrho \ldots h_n = \bar{\lambda}_n \varrho, \quad 0 < |\varrho| \leqq \bar{\tau}$$

für alle in Rede stehenden Werthesysteme $\bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_n$ positiv.

Wählt man also jetzt die positive Zahl τ nur so, dass sie nicht grösser ist als $\bar{\tau}$ und $\overline{\tau}$, so ist $g(h_1 \ldots h_n)$ in dem Bereiche

$$0 < h_1^2 + \cdots + h_n^2 \leqq r^2$$

durchaus positiv und somit $g(0 \ldots 0)$ in der That ein eigentliches Minimum.

Es ist also bewiesen:

IV. *Beginnt die Entwickelung von $g(h_1 \ldots h_n)$ nach ganzen positiven Potenzen von $h_1 \ldots h_n$ mit der semidefiniten quadratischen Form $h_1^2 + \cdots + h_\nu^2$ $(\nu \leqq n-1)$, so ist dazu, dass $g(0 \ldots 0)$ ein eigentliches Minimum sei, nothwendig, dass die Glieder 3. Dimension mit $h_1^2 + \cdots + h_\nu^2$ zugleich verschwinden, sich also auf die Form*

$$2h_1 \overset{(1)}{g_2}(h_1 \ldots h_n) + \cdots + 2h_\nu \overset{(\nu)}{g_2}(h_1 \ldots h_n)$$

bringen lassen, und hinreichend, dass

$$\Delta_4(h_{\nu+1} \ldots h_n)$$
$$= g_4(0 \ldots 0, h_{\nu+1} \ldots h_n) - \overset{(1)}{g_2}(0 \ldots 0, h_{\nu+1} \ldots h_n)^2 - \cdots - \overset{(\nu)}{g_2}(0 \ldots 0, h_{\nu+1} \ldots h_n)$$

eine definite positive Form der Veränderlichen $h_{\nu+1} \ldots h_n$ sei.

V. *Nimmt $\Delta_4(h_{\nu+1} \ldots h_n)$ für reelle Werthesysteme $h_{\nu+1} \ldots h_n$ auch negative Werthe an, ist also definit oder semidefinit negativ oder indefinit, so ist $g(0 \ldots 0)$ sicher kein Minimum.*

Es beginnt nämlich, wenn z. B. $\Delta_4(\xi'_{\nu+1} \ldots \xi'_n) < 0$ ist

$$(\xi'^2_{\nu+1} + \cdots + \xi'^2_n = 1),$$

die Entwickelung von $\psi(u_1 \ldots u_n; \varrho; \xi'_{\nu+1} \ldots \xi'_n)$ nach (24) mit der indefiniten quadratischen Form

$$[u_1 + \varrho \overset{(1)}{g_2}(0 \ldots 0, \xi'_{\nu+1} \ldots \xi'_n)]^2 + \cdots + [u_\nu + \varrho \overset{(\nu)}{g_2}(0 \ldots 0, \xi'_{\nu+1} \ldots \xi'_n)]^2 + \Delta_4(\xi'_{\nu+1} \ldots \xi'_n)\varrho^2$$

und nimmt daher diese Function ψ in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle $u_1 = 0 \ldots u_n = 0$, $\varrho = 0$ sowohl positive als negative Werthe an und daher nach (23) und (22) auch die Function $g(h_1 \ldots h_n)$ in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle $h_1 = 0 \ldots h_n = 0$ sowohl positive als negative Functionswerthe an.

VI. *Unentschieden bleibt der Fall, dass $\Delta_4(h_{\nu+1} \ldots h_n)$ semidefinit positiv ist, oder identisch verschwindet.*

1. Beispiel.

$$\begin{aligned} g(h_1, h_2, h_3, h_4) = {} & h_1^2 + h_2^2 + 6h_1^3 - 8h_1^2 h_2 + 20h_1 h_2 h_4 + 2h_1 h_4^2 \\ & + 2h_2 h_3^2 + 2h_2 h_3 h_4 - 11h_1^4 - 40h_1^3 h_2 - 60h_1^2 h_2^2 \\ & - 100h_2^4 + 6h_3^4 - 2h_3^3 h_4 + 2h_4^4 \\ & + (h_1, h_2, h_3, h_4)_5 + \cdots \end{aligned}$$

die Glieder 3. Dimension verschwinden mit h_1 und h_2 zugleich; man kann setzen:

$$\overset{(1)}{g_2} = 3h_1^2 - 4h_1h_2 + 10h_2h_4 + h_4^2, \qquad \overset{(2)}{g_2} = h_3^2 + h_3h_4;$$

ist

$$\overset{(1)}{g_2}(0, 0, h_3, h_4) = h_4^2, \qquad \overset{(2)}{g_2}(0, 0, h_3, h_4) = h_3^2 + h_3h_4;$$

r ist

$$g_4(0, 0, h_3, h_4) = 6h_3^4 - 2h_3^3h_4 + 2h_4^4;$$

t ist

$$\Delta_4(h_3, h_4) = 5h_3^4 - 4h_3^3h_4 - h_3^2h_4^2 + h_4^4 = h_3^2(2h_3 - h_4)^2 + (h_3^2 - h_4^2)^2$$

definite positive Form, also $g(0, 0, 0, 0)$ ein eigentliches Minimum.

2. Beispiel.

$$h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + 8h_1h_2h_3 - 4h_1h_3^2 + h_2^4 + 20h_2^2h_3^2 + 8h_3^4 + (h_1, h_2, h_3)_5 + \cdots,$$

Bedingungen I und II sind erfüllt;

$$, h_2, h_3) = 4h_2h_3 - 2h_3^2, \quad g_4(0, h_2, h_3) = h_2^4 + 20h_2^2h_3^2 + 8h_3^4,$$
$$\Delta_4(h_2, h_3) = h_2^4 + 4h_2^2h_3^2 + 16h_2h_3^3 + 4h_3^4$$

ndefinit, weil

$$\Delta_4(h_2, -h_2) = -7h_2^4$$

somit ist nach V $g(0, 0, 0)$ kein Minimum.

3. Beispiel.

$$h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + 2h_1(Ah_1h_3 + Bh_2^2) + (h_2^2 + h_3^2)(h_2 - h_3)^2 + B^2h_2^4 + (h_1, h_2, h_3)_5 + \cdots,$$

Bedingungen I und II sind erfüllt,

$$\overset{(1)}{g_2}(0, h_2, h_3) = Bh_2^2, \quad \Delta_4(h_2, h_3) = (h_2^2 + h_3^2)(h_2 - h_3)^2$$

emidefinit positiv; es bleibt unentschieden, ob $g(0, 0, 0)$ ein eigentes Minimum ist, oder nicht.

4. Beispiel.

$$h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + h_2^2 + 2Ah_1h_3^2 + 2Bh_2h_3^2 + (A^2 + B^2)h_3^4 + (h_1, h_2, h_3)_5 + \cdots,$$

Bedingungen I und II sind erfüllt,

$$\overset{(1)}{g}(0, 0, h_3) = Ah_3^2, \quad \overset{(2)}{g_2}(0, 0, h_3) = Bh_3^2, \quad \Delta_4(h_3) = 0;$$

leibt also unentschieden ob $g(0, 0, 0)$ ein Minimum ist, oder nicht.

Beginnt die Entwickelung von $g(h_1 \ldots h_n)$ mit der semidefiniten quadratischen Form $H_1^2 + \cdots + H_\nu^2$ $(\nu < n)$ wobei

(26) $H_1 = \alpha_{11} h_1 + \cdots + \alpha_{1n} h_n, \ldots H_\nu = \alpha_{\nu 1} h_1 + \cdots + \alpha_{\nu n} h_n$

von einander linear unabhängige Linearformen sind, in deren Coefficienten-Matrix also mindestens eine Determinante ν^{ten} Grades von Null verschieden ist, so kann dieser Fall durch eine lineare Substitution auf den früheren zurückgeführt werden und damit die entsprechenden nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür abgeleitet werden, dass $g(0 \ldots 0)$ ein eigentliches Minimum sei, wenn $g_2(h_1 \ldots h_n)$ eine semidefinite positive quadratische Form ist.

Wählt man nämlich $n - \nu$ weitere Linearformen

(27) $H_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1,1} h_1 + \cdots + \alpha_{\nu+1,n} h_n, \cdots H_n = \alpha_{n,1} h_1 + \cdots + \alpha_{nn} h_n$

nur so aus, dass die Determinante A der n Linearformen $H_1 \ldots H_n$ von Null verschieden ist, so lassen sich aus (26) und (27) $h_1 \ldots h_n$ durch $H_1 \ldots H_n$ ausdrücken in der Form

(28) $h_1 = \beta_{11} H_1 + \cdots + \beta_{n1} H_n, \cdots h_n = \beta_{1n} H_1 + \cdots + \beta_{nn} H_n;$

damit geht nun $g(h_1 \ldots h_n)$ über in

$$(29) \qquad G(H_1 \ldots H_n) = H_1^2 + \cdots + H_\nu^2 + G_3(H_1 \ldots H_n) + G_4(H_1 \ldots H_n) + \cdots,$$

wobei

$$(30) \qquad \begin{aligned} G(H_1 \ldots H_n) &= g(\beta_{11} H_1 + \cdots + \beta_{n1} H_n, \ldots \beta_{1n} H_1 + \cdots + \beta_{nn} H_n) \\ G_n(H_1 \ldots H_n) &= g_n(\beta_{11} H_1 + \cdots + \beta_{n1} H_n, \ldots \beta_{1n} H_1 + \cdots + \beta_{nn} H_n) \\ &\qquad (n = 3, 4, \ldots) \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Da $h_1 \ldots h_n$ zugleich mit $H_1 \ldots H_n$ verschwinden, so steht die Convergenz der Entwickelung $G(H_1 \ldots H_n)$ für hinreichend kleine $|H_1| \ldots |H_n|$ ausser Frage.

Damit nun $G(0 \ldots 0)$ ein eigentliches Minimum sei, ist nach IV. nothwendig, dass G_3 auf die Form

$$(31) \qquad G_3(H_1 \ldots H_n) = 2 H_1 \overset{(1)}{G}_2(H_1 \ldots H_n) + \cdots + 2 H_\nu \overset{(\nu)}{G}_2(H_1 \ldots H_n)$$

gebracht werden könne, und weiter hinreichend, dass

$$(32) \qquad \Delta_4(H_{\nu+1} \ldots H_n) = G_4(0 \ldots 0, H_{\nu+1} \ldots H_n) - \overset{(1)}{G}_2(0 \ldots 0, H_{\nu+1} \ldots H_n)^2 - \cdots - \overset{(\nu)}{G}_2(0 \cdots 0, H_{\nu+1} \ldots H_n)^2$$

eine definite positive Form sei.

Nach (31) muss also

(33) $g_3(\beta_{\nu+1,1} H_{\nu+1} + \cdots + \beta_{n,1} H_n, \cdots \beta_{\nu+1,n} H_{\nu+1} + \cdots + \beta_{nn} H_n) = 0$

identisch erfüllt sein; dann lässt sich aber $g_3(h_1 \ldots h_n)$ auf die Form bringen

34) $$g_3(h_1 \dots h_n) = 2H_1 \overset{(1)}{f_2}(h_1 \dots h_n) + \dots + 2H_\nu \overset{(\nu)}{f_2}(h_1 \dots h_n),$$

wobei

35) $$\overset{(1)}{f_2}(h_1 \dots h_n) = \overset{(1)}{G_2}(H_1 \dots H_n), \dots \overset{(\nu)}{f_2}(h_1 \dots h_n) = \overset{(\nu)}{G_2}(H_1 \dots H_n)$$

gesetzt ist.

Nach (32) muss dann

36) $$g_4(\beta_{\nu+1,1} H_{\nu+1} + \dots + \beta_{n,1} H_n, \dots \beta_{\nu+1,n} H_{\nu+1} + \dots + \beta_{nn} H)$$
$$- \overset{(1)}{f_2}(\beta_{\nu+1,1} H_{\nu+1} + \dots + \beta_{n,1} H_n, \dots \beta_{\nu+1,n} H_{\nu+1} + \dots + \beta_{nn} H_n)^2 - \dots$$
$$\dots - \overset{(\nu)}{f_2}(\beta_{\nu+1,1} H_{\nu+1} + \dots + \beta_{n,1} H_n, \dots \beta_{\nu+1,n} H_{\nu+1} + \dots + \beta_{nn} H_n)^2$$

eine definite positive Form sein.

Dazu sei noch folgendes bemerkt.

Wenn es einen Bereich $0 < H_1^2 + \dots + H_n^2 \leqq \mathfrak{R}^2$ giebt, in welchem $G(H_1 \dots H_n)$ durchaus positiv ist, so giebt es sicher auch einen Bereich $0 < h_1^2 + \dots + h_n^2 \leqq \mathfrak{r}^2$, in welchem $g(h_1 \dots h_n)$ durchaus positiv ist.

Bezeichnet nämlich $\mathfrak{a}$ den grössten absoluten Betrag unter den Substitutionscoefficienten $\alpha_{m,n}$, so ist nach (26) und (27)

37) $$H_1^2 \leqq (n\mathfrak{a}h)^2, \dots H_n^2 \leqq (n\mathfrak{a}h)^2,$$

wenn

38) $$h_1^2 \leqq h^2 \dots h_n^2 \leqq h^2$$

ist, wobei die positive Grösse h mit Rücksicht auf die Convergenz von G hinreichend klein gewählt ist.

Solange also nur

$$n(n\mathfrak{a}h)^2 \leqq \mathfrak{R}^2$$

ist, ist $g(h_1 \dots h_n) = G(H_1 \dots H_n)$ für alle von $0 \dots 0$ verschiedenen allen Werthesysteme $h_1 \dots h_n$, welche die Bedingungen (38) erfüllen, positiv; diese Bedingungen erfüllt aber sicher jedes Werthesystem $h_1 \dots h_n$, für welches

$$0 < h_1^2 + \dots + h_n^2 \leqq h^2$$

ist; daraus folgt also, dass $g(h_1 \dots h_n)$ in dem Bereiche

$$0 < h_1^2 + \dots + h_n^2 \leqq \frac{\mathfrak{R}^2}{n^2\mathfrak{a}^2}$$

durchaus positiv ist, wenn $G(H_1 \dots H_n)$ im Bereiche

$$0 < H_1^2 + \dots + H_n^2 \leqq \mathfrak{R}^2$$

durchaus positiv ist.

Wenn somit $G(0 \dots 0)$ ein eigentliches Minimum ist, so ist auch $(0 \dots 0)$ ein solches.

Die Functionen

$$\overset{(k)}{f_2}\left(\sum_{n=\nu+1}^{n}\beta_{n,1}H_n,\ldots\sum_{n=\nu+1}^{n}\beta_{n,n}H_n\right)\quad(k=1,2,\ldots\nu)$$

können direct aus $g_3(h_1,\ldots h_n)$ abgeleitet werden.

Nach (25) ist nämlich

$$\overset{(k)}{G_2}(0\ldots0,\,H_{\nu+1}\ldots H_n)=\frac{1}{2}G_{3,k}(0\ldots0,\,H_{\nu+1}\ldots H_n);$$

nach (30) ist

$$G_{3,k}(0\ldots0,\,H_{\nu+1}\ldots H_n)=\sum_{l=1}^{n}\beta_{k,l}g_{3,l}\left(\sum_{n=\nu+1}^{n}\beta_{n,1}H_n,\ldots\sum\beta_{n,n}H_n\right.$$

also ist

$$\overset{(k)}{f_2}\left(\sum_{n=\nu+1}^{n}\beta_{n,1}H_n,\ldots\sum_{n=\nu+1}^{n}\beta_{n,n}H_n\right)\tag{39}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\beta_{k,l}g_{3,l}\left(\sum_{n=\nu+1}^{n}\beta_{n,1}H_n,\ldots\sum\beta_{n,n}H_n\right).$$

Die Linearformen $H_{\nu+1}\ldots H_n$ können in mannigfacher Weise so gewählt werden, dass die Determinante A nicht verschwindet. Ist

$$(\overline{27})\quad \bar{H}_{\nu+1}=\bar{\alpha}_{\nu+1,1}h_1+\cdots+\bar{\alpha}_{\nu+1,n}h_n,\cdots\bar{H}_n=\bar{\alpha}_{n,1}h_1+\cdots+\bar{\alpha}_{n,n}h_n$$

ein anderes solches System, welches ebenfalls der Bedingung genügt, dass die Determinante $\bar{A}$ der n Linearformen $H_1\ldots H_\nu\ \bar{H}_{\nu+1}\ldots\bar{H}_n$ von Null verschieden ist, so folgt aus (26) und $(\overline{27})$

$$\begin{aligned}h_1&=\bar{\beta}_{1,1}H_1+\cdots+\bar{\beta}_{\nu,1}H_\nu+\bar{\beta}_{\nu+1,1}\bar{H}_{\nu+1}+\cdots+\bar{\beta}_{n,1}\bar{H}_n,\\ &\cdots\cdots\cdots

Es ist also zu zeigen, dass die Bedingungen $(\overline{33})$ und $(\overline{36})$ mit den Bedingungen (33) und (36) zugleich erfüllt und zugleich nicht erfüllt sind.

Dies folgt aber einfach daraus, dass aus den linearen Gleichungen

$$\alpha_{k,1}h_1 + \cdots + \alpha_{k,n}h_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots \nu)$$

zusammen mit (27) und $(\overline{27})$ sich $H_{\nu+1} \ldots H_n$ linear und homogen durch $\bar{H}_{\nu+1} \ldots \bar{H}_n$ ausdrücken lassen und umgekehrt. Führt man diese Ausdrücke für $H_{\nu+1} \ldots H_n$ in die Bedingungen (33) und (36) ein, so ergeben sich eben die Bedingungen $(\overline{33})$ und $(\overline{36})$.

Setzt man voraus, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, — was ja nur Sache der Bezeichnung ist — so ist es wohl am einfachsten

$$H_{\nu+1} = h_{\nu+1}, \ldots . H_n = h_n$$

zu wählen; dann lassen sich aus den Gleichungen

$$\alpha_{11}h_1 + \cdots + \alpha_{1n}h_n = 0, \cdots \alpha_{\nu 1}h_1 + \cdots + \alpha_{\nu n}h_n = 0$$

$h_1 \ldots h_\nu$ als lineare homogene Functionen von $h_{\nu+1} \ldots h_n$ darstellen:

(40) $$h_1 = l_1(h_{\nu+1} \ldots h_n), \ldots h_\nu = l_\nu(h_{\nu+1} \ldots h_n).$$

Es ist also gezeigt:

VII. *Beginnt die Entwickelung*

$$g(h_1 \ldots h_n) = g_2(h_1 \ldots h_n) + g_3(h_1 \ldots h_n) + g_4(h_1 \ldots h_n) + \cdots$$

mit der semidefiniten positiven quadratischen Form

$$g_2(h_1 \cdots h_n) = (\alpha_{11}h_1 + \cdots + \alpha_{1n}h_n)^2 + \cdots + (\alpha_{\nu 1}h_1 + \cdots + \alpha_{\nu n}h_n)^2,$$

und ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, so dass sich aus den Gleichungen

$$\alpha_{11}h_1 + \cdots + \alpha_{1n}h_n = 0, \cdots \alpha_{\nu 1}h_1 + \cdots + \alpha_{\nu n}h_n = 0,$$
$$h_1 = l_1(h_{\nu+1} \ldots h_n) \ldots h_\nu = l_\nu(h_{\nu+1} \ldots h_n)$$

als lineare homogene Functionen von $h_{\nu+1} \ldots h_n$ darstellen lassen, so ist dafür, dass $g(0 \ldots 0)$ ein eigentliches Minimum sei, nothwendig, dass $g_3(l_1 \ldots l_\nu, h_{\nu+1} \ldots h_n)$ identisch verschwinde, also dass $g_3(h_1 \ldots h_n)$ sich auf die Form bringen lasse

$$g_3(h_1 \cdots h_n)$$
$$= 2(\alpha_{11}h_1 + \cdots + \alpha_{1n}h_n)f_2^{(1)}(h_1 \cdots h_n) + \cdots + 2(\alpha_{\nu 1}h_1 + \cdots + \alpha_{\nu n}h_n)$$

und dann auch hinreichend, dass

$$D_4(h_{\nu+1}\ldots h_n) = g_4(l_1\ldots l_\nu, h_{\nu+1}\ldots h_n)^2 - \sum_{k=1}^{\nu} f_2^{(k)}(l_1\ldots l_\nu, h_{\nu+1}\ldots h_n)^2$$

eine definite positive Form in der Veränderlichen $h_{\nu+1}\ldots h_n$ sei.

VIII. *Nimmt $D_4(h_{\nu+1}\ldots h_n)$ für reelle Werthesysteme $h_{\nu+1}\ldots h_n$ auch negative Werthe an, ist also definit oder semidefinit negativ oder indefinit, so ist $g(0\ldots 0)$ kein Minimum.*

IX. *Unentschieden bleibt der Fall, dass $D_4(h_{\nu+1}\ldots h_n)$ semidefinit positiv ist, oder identisch verschwindet.*

Es darf nicht unberücksichtigt bleiben, dass eine semidefinite quadratische Form $g_2(h_1\ldots h_n)$, wenn sie nicht gerade ein vollständiges Quadrat ist, sich auf verschiedene Arten als Summe von Quadraten darstellen lässt, wie dies die Theorie der orthogonalen Substitution lehrt.

Angenommen also es existire ausser der oben betrachteten Darstellung $g_2 = H_1^2 + \cdots + H_\nu^2$ noch eine andere

$$g_2 = H_1'^2 + \cdots + H_{\nu'}^2, \tag{41}$$

in welcher

$$H_1' = \alpha_{11}'h_1 + \cdots + \alpha_{1n}'h_n, \cdots H_{\nu'}' = \alpha_{\nu'1}'h_1 + \cdots + \alpha_{\nu'n}'h_n \tag{42}$$

ebenfalls von einander linear unabhängige Linearformen sind.

Dass in jeder solchen Darstellung alle Quadrate mit positiven Vorzeichen auftreten, ist selbstverständlich, da ja sonst g_2 indefinit wäre.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass $\nu = \nu'$ sein muss und dass sich $H_1\ldots H_\nu$ linear und homogen durch $H_1'\ldots H_\nu'$ ausdrücken lassen oder umgekehrt.

Unter der Voraussetzung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\ldots\alpha_{1\nu} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{\nu 1}\ldots\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

lassen sich aus den Gleichungen (26) $h_1\ldots h_\nu$ als lineare homogene Functionen von $H_1\ldots H_\nu$, $h_{\nu+1}\ldots h_n$ ausdrücken, welche für $H_1=0\ldots H_\nu=0$ in $l_1(h_{\nu+1}\ldots h_n), \ldots l_\nu(h_{\nu+1}\ldots h_n)$ übergehen, also die Form haben

$$\begin{aligned} h_1 &= \delta_{11}H_1 + \cdots + \delta_{1\nu}H_\nu + l_1(h_{\nu+1}\cdots h_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_\nu &= \delta_{\nu 1}H_1 + \cdots + \delta_{\nu\nu}H_\nu + l_\nu(h_{\nu+1}\cdots h_n). \end{aligned} \tag{43}$$

Führt man diese Ausdrücke für $h_1\ldots h_\nu$ in die Formeln (42) ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} H_1' &= c_{11}H_1 + \cdots + c_{1\nu}H_\nu + L_1(h_{\nu+1}\cdots h_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_{\nu'}' &= c_{\nu' 1}H_1 + \cdots + c_{\nu'\nu}H_\nu + L_{\nu'}(h_{\nu+1}\cdots h_n), \end{aligned} \tag{44}$$

wobei $L_1\ldots L_{\nu'}$ Linearformen bezeichnen.

Wenn $H_1 \ldots H_\nu$ sämmtlich den Werth Null erhalten, so wird
$\ldots h_n)$ gleich Null und somit nach (41) auch jede der Grössen
$\ldots H'_{\nu'}$; dabei bleiben die Veränderlichen $h_{\nu+1} \ldots h_n$ noch ganz
ürlich; es verschwinden somit $L_1 \ldots L_{\nu'}$ identisch und lassen
demnach $H_1' \ldots H_{\nu'}'$ linear und homogen durch $H_1 \ldots H_\nu$ aus-
ken, da aber $H_1' \ldots H_{\nu'}'$ von einander linear unabhängig sind, so
$' \leqq \nu$.

Ganz analog lässt sich zeigen, dass sich auch $H_1 \ldots H_\nu$ linear homogen durch $H_1' \ldots H_{\nu'}'$ ausdrücken lassen; also ist auch $\nu \leqq \nu'$, t nothwendig $\nu = \nu'$ und aus (44)

$$H_1' = c_{11} H_1 + \cdots + c_{1\nu} H_\nu, \cdots H_\nu' = c_{\nu 1} H_1 + \cdots + c_{\nu\nu} H_\nu.$$

Setzt man in diesen Formeln für $H_1 \ldots H_\nu$ die Ausdrücke aus ein und vergleicht die Resultate mit den Formeln für $H_1', \ldots H_\nu'$ 12), so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
&{}'_{11} = c_{11}\alpha_{11} + \cdots + c_{1\nu}\alpha_{\nu 1} \cdots \alpha'_{1\nu} = c_{11}\alpha_{1\nu} + \cdots + c_{1\nu}\alpha_{\nu\nu},\\
&\cdots\cdots\cdots

$g_2(h_1 \ldots h_n)$ als Summe von Quadraten unabhängiger Linearformen man benützt.

Handelt es sich darum zu untersuchen, ob eine Function $g(h_1 \ldots h_n)$, deren Entwickelung mit der semidefiniten quadratischen Form $-H_1^2 - \cdots - H_\nu^2$ beginnt, an der Stelle $0 \ldots 0$ ein eigentliches Maximum habe, so sind die oben aufgestellten Kriterien auf die Function $-g(h_1 \ldots h_n)$ anzuwenden.

Die weitere Untersuchung der Fälle VI und IX, in welchen die Entscheidung nicht erreicht wird, sowie die Betrachtung derjenigen Fälle, in welchen $i > 2$ ist, möge einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Ich möchte noch hervorheben, dass die in den Sätzen VII und VIII ausgesprochenen Kriterien in vollkommener Uebereinstimmung stehen mit denjenigen, welche A. Mayer in der Eingangs citirten Abhandlung in den Sätzen IV und VI angegeben hat.

Um dies nachzuweisen, wende ich die Mayer'schen Kriterien auf die Function

$$g(h_1 \ldots h_n) = \sum_{k=1}^{\nu} H_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\nu} H_k f_2^{(k)}(h_1 \ldots h_n) + g_4(h_1 \ldots h_n) + \cdots$$

unter den Voraussetzungen des Satzes VII an; die Numerirungen in der Mayer'schen Abhandlung werden durch ein beigesetztes M. angezeigt.

Ersetzt man ξ_i^1 durch h_i, ξ_i^2 durch h_i' $(i = 1, 2, \ldots n)$, so sind die bei Mayer auftretenden Ausdrücke V_2 und V_3 die folgenden

$$V_2 \equiv \sum_i \sum_\varkappa c_{i\varkappa} h_i h_\varkappa = 2\sum_{k=1}^{\nu} H_k^2,$$

$$V_3 \equiv \sum_i \sum_\varkappa \sum_\lambda c_{i\varkappa\lambda} h_i h_\varkappa h_\lambda = 3 \cdot 4 \sum_{k=1}^{\nu} H_k f_2^{(k)},$$

ferner ist

$$\sum_i \sum_\varkappa \sum_\lambda \sum_\mu c_{i\varkappa\lambda\mu} h_i h_\varkappa h_\lambda h_\mu = 2.3.4 g_4$$

$$(i, \varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n).$$

Die Werthesysteme $h_1 \ldots h_n$, für welche V_2 verschwindet, sind

$$h_1 = l_1(h_{\nu+1} \ldots h_n), \ldots h_\nu = l_\nu(h_{\nu+1}, \ldots h_n), \quad h_{\nu+1}, \ldots h_n$$

Die nothwendige Bedingung, dass V_3 zugleich mit V_2 verschwinde (M. IV, p. 71) ist durch die Form von V_3 schon erfüllt.

Setzt man

$$\alpha_{k1} h_1' + \cdots + \alpha_{kn} h_n' = H_k',$$

lässt sich das Mayer'sche Kriterium für ein Minimum von $g(h_1 \ldots h_n)$ der Stelle $0 \ldots 0$ so aussprechen:

Der Ausdruck

$$\frac{1}{2} V_4 = \sum_{k=1}^{\nu} H_k'^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_\varkappa \sum_\lambda c_{i\varkappa\lambda} h_i' h_\varkappa h_\lambda + g_4$$

ll für alle Werthesysteme $h_1 \ldots h_n$, $h_1', \ldots h_n'$, welche den Gleiungen $V_2 = 0$ und $\frac{\partial V_4}{\partial h_i'} = 0$ (M. (18), p. 70) genügen, positiv sein.

Bemerkt man, dass

$$\sum_i \sum_\varkappa \sum_\lambda c_{i\varkappa\lambda} h_i' h_\varkappa h_\lambda = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_3}{\partial h_i} h_i'$$

$$= 4 \sum_{i=1}^{n} h_i' [\alpha_{1i} \overset{(1)}{f_2} + \cdots + \alpha_{\nu i} \overset{(\nu)}{f_2}] = 4 \sum_{k=1}^{\nu} H_k' \overset{(k)}{f_2}$$

t, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2} V_4 = \sum_{k=1}^{\nu} H_k'^2 + 2 \sum_{k=1}^{\nu} H_k' \overset{(k)}{f_2} + g_4.$$

Von den Gleichungen M. (18) sind nach dem Lehrsatze II (M. p. 17) r die Werthesysteme

$$h_1 = l_1, \ldots h_\nu = l_\nu, \; h_{\nu+1}, \ldots h_n$$

e $n - \nu$ letzten mit den ν ersten zugleich erfüllt; deutet man die inführung von $l_1 \ldots l_\nu$ an Stelle von $h_1 \ldots h_\nu$ durch Ueberstreichen ı, so verlangt also das Mayer'sche Kriterium, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{2} \overline{V}_4 = \sum_{k=1}^{\nu} H_k'^2 + 2 \sum_{k=1}^{\nu} H_k' \overset{(k)}{\overline{f}_2} + \bar{g}_4$$

sitiv sei, für alle Werthesysteme $h_1' \ldots h_n'$, welche die ν Gleichungen

$$\frac{1}{4} \frac{\partial \overline{V}_4}{\partial h_i'} = \alpha_{1i} (H_1' + \overset{(1)}{\overline{f}_2}) + \cdots + \alpha_{\nu i} (H_\nu' + \overset{(\nu)}{\overline{f}_2}) = 0$$
$$(i = 1, 2 \ldots \nu)$$

füllen.

Da aber der Voraussetzung zufolge $\sum \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{\nu\nu} \gtrless 0$ ist, so

können diese Gleichungen nur dadurch erfüllt werden, dass $H_k' + \overset{(k)}{f_2} = 0$ ist für $k = 1, 2 \ldots \nu$; damit wird aber

$$\frac{1}{2}\,\bar{V}_4 = g_4(l_1 \ldots l_\nu, h_{\nu+1} \ldots h_n) - \sum_{k=1}^{\nu} \overset{(k)}{f_2}(l_1 \ldots l_\nu,\ h_{\nu+1} \ldots h_n)^2$$

d. h. genau jene biquadratische Form der Veränderlichen $h_{\nu+1} \ldots h_n$, welche im Satze VII auftritt.

Graz am 27. December 1897.

stimmung aller ternären und quaternären Collineationsuppen, welche mit symmetrischen und alternirenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind.

Von

H. Maschke in Chicago.

Das in der Ueberschrift bezeichnete Problem soll nach folgender thode in systematischer Weise gelöst werden. Nehmen wir an, wir en im Besitz einer Reihe von Collineationen $E_1, E_2, \ldots E_r$ in n riabelen, von denen wir wissen, dass sie eine endliche Gruppe $C_{k!}$ ugen, welche mit der symmetrischen Gruppe $G_{k!}$ von Vertauschungen k Buchstaben holoedrisch isomorph ist. Auch soll bekannt sein, chen Buchstabenvertauschungen die einzelnen Erzeugenden $E_1, E_2, \ldots E_r$ sprechen. Der Kürze wegen sollen auch diese Buchstabenvertauungen entsprechend mit $E_1, E_2, \ldots E_r$ bezeichnet werden. Alsn kann man mittelst Hinzunahme eines neuen $k+1^{\text{ten}}$ Buchstaben e Buchstabenvertauschung E_{r+1} angeben, welche mit den Vertauungen $E_1, E_2, \ldots E_r$ die symmetrische Vertauschungsgruppe $G_{(k+1)!}$ $k+1$ Buchstaben hervorbringt. Diese Vertauschung E_{r+1} wird e bestimmte endliche Periode besitzen, und auch die Perioden der mbinationen $E_1E_{r+1}, E_2E_{r+1}, \ldots E_rE_{r+1}$ werden leicht anzugeben a. Wir setzen nun E_{r+1} mit unbestimmten Coefficienten als Collitation in n Variabelen an und unterwerfen E_{r+1} für sich sowohl, als ch in Combination mit den bereits bekannten Collineationen den gegebenen Periodenbedingungen. Diese für die Bestimmung der Collineation E_{r+1} *nothwendigen* Bedingungen sind nun miteinander weder verträglich oder nicht. Im ersteren Falle entsteht dann die itere Frage, ob sie für den holoedrischen Isomorphismus der $C_{(k+1)!}$ der $G_{(k+1)!}$ auch *hinreichend* sind. Diese Frage, welche übrigens Problem der abstracten Gruppentheorie vorstellt, lässt sich, wie in mittelst eines Satzes von Herrn Moore auseinandergesetzt werden l, in dem Sinne entscheiden, dass sich in der That eine bestimmte

Anzahl von Operationen E für jedes k stets so wählen lässt, dass die angegebenen Periodenbedingungen für den holoedrischen Isomorphismus nothwendig und hinreichend sind. Genau das Gleiche gilt für die alternirenden Gruppen. Geht man jetzt von den niedrigsten Werthen für k aus, für welche die betreffenden Collineationsgruppen ohne Weiteres angegeben werden können, so führt das auseinandergesetzte Verfahren successive in allgemeinster Weise zu den Collineationsgruppen für höhere Werthe von k.

Ist somit theoretisch eine Methode zur Lösung unseres Problems gegeben, so wird es noch sehr fraglich bleiben, wie weit sich dieselbe rechnerisch durchführen lässt. Hier ist nun insbesondere folgendes zu beachten. Durch Einführung neuer Variabelen oder, was auf dasselbe hinausläuft, Transformation durch eine beliebige lineare Substitution im gruppentheoretischen Sinne, lässt sich jede Collineationsgruppe auf unendlich viele Weisen (linear) transformiren. Wir werden zwei Collineationsgruppen, die sich in einander transformiren lassen, als *identisch* betrachten, und als *verschieden* nur solche, die sich nicht in einander transformiren lassen. Hieraus folgt noch *nicht*, dass zwei Collineationsgruppen, welche mit ein- und derselben Buchstabenvertauschungsgruppe holoedrisch isomorph sind, im soeben genannten Sinne identisch sein müssen. Vielmehr werden wir im folgenden viele Beispiele kennen lernen, wo sich zwei derartige Gruppen nicht in einander transformiren lassen. Es wird nun darauf ankommen, unter allen identischen Collineationsgruppen in jedem Falle eine solche zu Grunde zu legen, welche in möglichst übersichtlicher Form erscheint. Dies lässt sich erreichen, wenn man die Gruppen durchgängig in die sogenannte Hermite'sche Normalform transformirt, wie in § 2 des Näheren auseinandergesetzt werden soll.

Mit den genannten Hilfsmitteln lässt sich nun unser Problem in der That mit einem relativ geringen Aufwand von Rechnung vollständig erledigen. Als besonders bemerkenswerth sei noch erwähnt — man ist es sonst in der Mathematik anders gewohnt — dass die zur Bestimmung der $C_{k!}$ und $C_{\frac{1}{2}k!}$ erforderlichen Rechnungen im allgemeinen um so einfacher werden, je grösser k ist.

Eine Zusammenstellung der Resultate für die ternären Gruppen findet sich in § 7. Hier giebt es für $k = 4, 5, 6$ immer nur je eine $C_{\frac{1}{2}k!}$ und $C_{k!}$. Die erst in neuerer Zeit entdeckte $C_{\frac{1}{2}6!}$ erscheint hier in einer besonders einfachen und übersichtlichen Gestalt (43).

Für quaternäre Gruppen sind die Resultate am Schluss der Arbeit zusammengestellt. Die Anzahl der von einander verschiedenen Gruppen ist hier wesentlich grösser. In Uebereinstimmung mit den Resul-

r Untersuchungen von Herrn Wiman*) ergiebt sich, dass keine ren $C_{\frac{1}{2}k!}$ für $k > 7$, und keine $C_{k!}$ für $k > 6$ existiren können.

§ 1.

Auseinandersetzung der Methode.

kommen hier zunächst in Betracht zwei Sätze der abstracten theorie, welche Herr Moore in seiner Arbeit**) „Concerning ract groups of order $k!$ und $\frac{1}{2}k!$ holoedrically isomorphic with metric and the alternating substitution-groups on k letters" reme A und B entwickelt hat.

orem A: Die abstracte Gruppe, welche definirt ist durch die > 1) erzeugenden Operationen

$$B_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots k-1),$$

denen die Relationen bestehen:

$$B_\lambda^2 = 1 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots k-1),$$
$$(B_\lambda B_{\lambda+1})^3 = 1 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots k-1),$$
$$(B_\lambda B_\mu)^2 = 1 \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots k-3 \\ \mu = \lambda+2, \lambda+3, \ldots k-1 \end{pmatrix},$$

der Ordnung $k!$ und ist holoedrisch isomorph mit der symmetrischen Vertauschungsgruppe von k Buchstaben.

orem B: Die abstracte Gruppe, welche definirt ist durch die > 2) erzeugenden Operationen

$$E_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots k-2),$$

denen die Relationen bestehen:

$$E_1^3 = 1, \; E_\lambda^2 = 1 \quad (\lambda = 2, 3, \ldots k-2),$$
$$(E_\lambda E_{\lambda+1})^3 = 1 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots k-3),$$
$$(E_\lambda E_\mu)^2 = 1 \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots k-4 \\ \mu = \lambda+2, \lambda+3, \ldots k-2 \end{pmatrix},$$

der Ordnung $\frac{1}{2}k!$ und holoedrisch isomorph mit der alternirenauschungsgruppe von k Buchstaben.

knüpfe zunächst an das Theorem B an. Nimmt man in der envertauschungsgruppe $E_1 = (123) = (12)(13)$, $E_2 = (12)(34)$,)(45), ... $E_\lambda = (12)(\lambda+1, \lambda+2)$, ... $E_{k-2} = (12)(k-1, k)$, man, dass hierfür die Bedingungen des Theorems B erfüllt ese E's erzeugen also zunächst die $G_{\frac{1}{2}k!}$. Hat man $k-2$

. Wiman „Note über die Vertauschungsgruppe von acht Dingen" und er die symmetrischen und alternirenden Vertauschungsgruppen von '. Göttinger Nachrichten, 1897, Heft 1 und 2.

. H. Moore, Proceedings of the London Math. Soc., vol. XXVIII, No. 597.

Collineationen E, welche denselben Bedingungen genügen, so erzeugen diese also eine der $G_{\frac{1}{2}k!}$ holoedrisch isomorphe $C_{\frac{1}{2}k!}$. Man geht jetzt zur $C_{\frac{1}{2}(k+1)!}$ über, indem man, wenn möglich, eine weitere Collineation E_{k-1} bestimmt, welche im Verein mit den bereits vorhandenen E's wiederum den Bedingungen des Moore'schen Satzes (für $k+1$ statt k) genügt.

Die Handlichkeit des Moore'schen Theorems gerade für die vorliegende Untersuchung besteht nun darin, dass bei einer weiteren Ausdehnung von $C_{\frac{1}{2}k!}$ auf $C_{\frac{1}{2}(k+1)!}$ immer nur *eine* (die letzte) Erzeugende neu zu bestimmen ist, und dass das mit Hinzunahme des neuen E erhaltene System der E_i alsdann wiederum als Grundlage zur Erweiterung auf $C_{\frac{1}{2}(k+2)!}$ mittelst einer einzigen neuen Collineation E dient.

Wir haben demnach zur Bestimmung der „*alternirenden Collineationsgruppen*" — dieser Ausdruck, sowie der entsprechende „*symmetrische Collineationsgruppen*" möge im folgenden statt des längeren „Collineationsgruppen, welche alternirenden (resp. symmetrischen) Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind" angewandt werden — folgendes einfache Verfahren zu befolgen: Man gehe aus von einer Collineation E_1, welche die Periode 3 besitzt — diese liefert mit ihren Potenzen die $G_{\frac{1}{2}3!}$ — und bestimme eine neue Collineation E_2 von der Periode 2, so dass $(E_1E_2)^3 = 1$. Dann erzeugt E_1 und E_2 die alternirende $C_{\frac{1}{2}4!}$ (Tetraedergruppe). Nun bestimme man E_3 von der Periode 2 so, dass $(E_1E_3)^2 = 1$, $(E_2E_3)^3 = 1$; alsdann erzeugen E_1, E_2, E_3 die alternirende $C_{\frac{1}{2}5!}$ (Ikosaedergruppe). Bestimmt man ferner E_4 von der Periode 2 so, dass $(E_1E_4)^2 = 1$, $(E_2E_4)^2 = 1$, $(E_3E_4)^3 = 1$, so erzeugen E_1, E_2, E_3, E_4 die alternirende $C_{\frac{1}{2}6!}$, etc.

Was die symmetrischen Gruppen anbetrifft, so gelangt man zu denselben, statt sie mittelst des Theorems A abzuleiten, in einfacher Weise von den alternirenden Gruppen aus. Wenn nämlich eine alternirende $C_{\frac{1}{2}k!}$ bereits bekannt ist mit $E_1, E_2, \ldots E_{k-2}$ als erzeugenden Collineationen, so erhält man hieraus die symmetrischen $C_{k!}$ durch Hinzufügung einer weiteren Collineation F von der Periode 2, welche den Bedingungen $(E_1F)^2 = (E_2F)^2 = \cdots = (E_{k-2}F)^2 = 1$ genügt. Um dieses zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, dass aus den $E_1, E_2, \ldots E_{k-2}$, F sich $k-1$ Collineationen $B_1, \ldots B_{k-1}$ ableiten lassen, welche den Bedingungen des Theorems A genügen, und welche so beschaffen sind, dass sich aus ihnen rückwärts die

$$E_1, E_2, \ldots E_{k-2}, F$$

ableiten lassen. Ich setze:

$$F = B_1, \; E_1 F = B_2, \; E_2 F = B_3, \; \ldots \; E_{k-2} F = B_{k-1},$$

so sind zunächst unmittelbar $E_1, E_2, \ldots E_{k-2}, F$ aus $B_1, B_2, \ldots B_{k-1}$ ableitbar. Die Bedingungen (1) sind laut Annahme erfüllt, und die Richtigkeit von (2) und (3) lässt sich leicht beweisen.

In der Buchstabenvertauschungsgruppe kann man z. B. $F = (12)$ nehmen, während wie vorher

$$E_1 = (123), \; E_2 = (12)(34), \ldots E_{k-2} = (12)(k-1, k).$$

Alsdann wird

$$B_1 = (12), \; D_2 = (23), \ldots B_\lambda = (\lambda, \lambda+1), \ldots B_{k-1} = (k-1, k).$$

§ 2.

Die Hermite'sche Normalform.

Die Substitutionen einer jeden linearen Substitutionsgruppe G in n Variabelen x_i von endlicher Ordnung lassen, wie Herr Moore bewiesen hat*) eine positive Hermite'sche Form

$$(7) \qquad \sum_{i,k} \alpha_{ik} x_i \bar{x}_k \quad (\alpha_{ki} = \bar{\alpha}_{ik}; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ungeändert, und durch Transformation der Gruppe kann stets erreicht werden, dass (7) die einfache Form

$$(8) \qquad x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \cdots + x_n \bar{x}_n$$

annimmt. Hierbei soll, wie auch sonst üblich, durch eine mit einem horizontalen Strich versehene Grösse ihr conjugirter Werth bezeichnet werden. Die specielle Form (8) wollen wir die Hermite'sche Normalform nennen, und von einer Gruppe, für welche diese Normalform ungeändert bleibt, wollen wir der Kürze wegen sagen, sie sei auf die Hermite'sche Normalform reducirt.

Andererseits lässt sich nun G stets so transformiren, dass irgend eine beliebig aus G herausgegriffene Substitution S in die kanonische Form

$$(9) \qquad x_1' = \lambda_1 x_1, \; x_2' = \lambda_2 x_2, \ldots x_i' = \lambda_i x_i, \ldots x_n' = \lambda_n x_n$$

übergeht, wobei die Coefficienten λ_i nicht nothwendig von einander verschieden zu sein brauchen**). Bei der so transformirten Gruppe

---

*) E. H. Moore, A Universal Invariant for Finite Groups of Linear Substitutions: with Application in the Theory of the Canonical Form of a Linear Substitution of Finite Period. Math. Ann. Bd. 50, p. 213.

**) Vgl. H. Maschke, Die Reduction linearer homogener Substitutionen von endlicher Periode auf ihre kanonische Form. Math. Ann. Bd. 50, p. 220.

wird eine positive Hermite'sche Form $H' = \Sigma \alpha_{ik} z_i \bar{z}_k$ invariant bleiben. Da insbesondere auch S (9) die Form H' in sich selber überführen muss, so folgt sofort, dass alle diejenigen Coefficienten $\alpha_{r,s}$ verschwinden müssen, für welche $\lambda_r \neq \lambda_s$. Sei andererseits $\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \ldots \lambda_{m_t}$ eine Gruppe von untereinander gleichen Coefficienten, so wird sich durch lineare Transformation der Variabelen $z_{m_1}, z_{m_2}, \ldots z_{m_t}$ derjenige Theil von H' welcher nur diese Variabelen enthält, also

$$\Sigma \alpha_{ik} z_i \bar{z}_k \quad (i, k = m_1, m_2, \ldots m_t)$$

in die Normalform $a(z_{m_1}\bar{z}_{m_1} + \cdots + z_{m_t}\bar{z}_{m_t})$ überführen lassen, wenn wir die neuen Variabelen wiederum mit z bezeichnen, während gleichzeitig die Substitution S (9) ungeändert bleibt. In dieser Weise sieht man, dass man, *ohne S zu ändern*, die Gruppe G so transformiren kann, dass die bei ihr invariant bleibende Hermite'sche Form in $\Sigma \beta_{ii} z_i \bar{z}_i$ übergeht. Endlich kann man durch Multiplication der Variabelen mit geeigneten Factoren bewirken, dass alle Coefficienten $\beta_{ii} = 1$ werden. Da auch hierdurch S nicht beeinflusst wird, so ist hiermit der für die spätere Anwendung fundamentale Satz*) bewiesen:

Man kann jede lineare Substitutions- (oder auch Collineations-) gruppe G von endlicher Ordnung stets so transformiren, dass

1) *eine beliebig aus G herausgegriffene Substitution S in der kanonischen Form,*

2) *die Gruppe selbst in der Hermite'schen Normalform erscheint.*

Liegt eine lineare Gruppe G in der Hermite'schen Normalform vor, so lässt sich ein auf die Coefficienten der einzelnen Substitutionen bezüglicher wichtiger Satz beweisen. Sei die folgende Substitution S in G enthalten

$$z_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{10}$$

so folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik} \bar{z}_k \right) = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z}_i,$$

eine Gleichung welche identisch für alle Werthe von z erfüllt sein muss. Hieraus ergiebt sich ein System von n^2 in den n^2 Grössen a_{ik} und $\bar{a}_{ik}$ linearen Gleichungen. Bezeichnet man die Determinante der z in S mit Δ — dieselbe wird stets als von Null verschieden

*) Die hiermit bewiesene Möglichkeit der genannten doppelten Normalisirung einer beliebigen endlichen linearen Substitutionsgruppe ist auch an sich interessant. Herr Moore machte mich darauf aufmerksam, dass dieselbe auch ohne Weiteres aus der Art und Weise folgt, in welcher er in seiner oben genannten Arbeit die Reduction auf die kanonische Form bewerkstelligt.

vorausgesetzt — und die Unterdeterminanten der Coefficienten a_{ik} mit A_{ik} so folgt

$$\Delta \,.\, \bar{a}_{ik} = A_{ik} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n).$$

Ist $\Delta = 1$, so haben wir

$$A_{ik} = \bar{a}_{ik}, \quad a_{ik} = \bar{A}_{ik} \tag{11}$$

und somit den Satz: *Ist eine endliche Gruppe linearer Substitutionen mit den Substitutionsdeterminanten $+1$ auf die Hermite'sche Normalform reducirt, so ist jeder Coefficient gleich dem conjugirten Werth seiner zugehörigen Unterdeterminante.*

§ 3.

Ternäre Collineationen von der Periode 2 und 3.

Eine ternäre Collineation A ist durch die Formel gegeben

$$\varrho z_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Da es auf den Werth des Proportionalitätsfactors ϱ nicht weiter ankommt, kann man die Determinante der Coefficienten stets $= 1$ setzen, also

$$|a_{ik}| = 1. \tag{13}$$

Die lineare Substitution, welche man aus (12) für $\varrho = 1$ erhält, soll durch A_s bezeichnet werden

$$A_s : z_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, 3). \tag{14}$$

In gleicher Weise soll auch später z. B. $E_{i,s}$ die aus der Collineation E_i für $\varrho = 1$ hervorgehende Substitution bezeichnen.

Reducirt man A auf die kanonische Form

$$\varrho z_1' = \lambda_1 z_1, \quad \varrho z_2' = \lambda_2 z_2, \quad \varrho z_3' = \lambda_3 z_3, \tag{15}$$

so sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Da A, wie wir es annehmen, von endlicher Periode ist, so sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Einheitswurzeln. Aus (16) folgt

$$a_1 + a_2 + a_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \tag{17}$$

und ferner in Verbindung mit (13)

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \tag{18}$$

Soll nun die Collineation A die Periode 2 haben, so folgen aus (15) und (18) für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in irgend welcher Ordnung die folgenden Werthe

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = -1, -1, +1 \quad \text{oder} \quad -\varepsilon, -\varepsilon, +\varepsilon,$$

wo ε eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet. Hieraus ergiebt sich für die Summe der Diagonalcoefficienten von A, die fortan mit D*) bezeichnet werden soll in Folge von (17)

(19) entweder $D = -1$,

(20) oder $D = -\varepsilon$.

Im Falle (19) ist nun $A_s^2 \equiv 1$, d. h. der Identität gleich, während im Falle (20) erst $A_s^6 \equiv 1$, und A_s^2 jede der Variabelen mit einer imaginären dritten Einheitswurzel multiplicirt, was durch $A_s^2 \equiv \varepsilon$ angedeutet werden soll. Wir haben demnach zwei Typen ternärer Collineationen der Periode 2 zu unterscheiden:

$$\text{Typus I: } A_s^2 \equiv 1, \quad D = -1;$$
$$\text{Typus II: } A_s^2 \equiv \varepsilon, \quad D = -\varepsilon.$$

Bilden wir nun A_s^{-1}, so ergiebt sich

$$x_i' = \sum_{k=1}^{3} A_{ki} x_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Für den Typus I ist nun $A_s^{-1} = A_s$, folglich $A_{ki} = a_{ik}$, für den Typus II ist $A_s^{-1} = A_s^5 = \varepsilon A_s$, folglich $A_{ki} = \varepsilon a_{ik}$. Nimmt man A in der Hermite'schen Normalform an, so ist nach (11) $A_{ki} = \bar{a}_{ki}$, also muss sein für den Typus I $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$, für den Typus II $a_{ki} = \varepsilon \bar{a}_{ik}$; insbesondere auch $a_{ii} = \bar{a}_{ii}$, d. h. a_{ii} reell, resp. $a_{ii} = \varepsilon \bar{a}_{ii}$, d. h. a_{ii} gleich einer mit ε multiplicirten reellen Grösse. Der letztere Fall lässt sich durch Multiplication sämmtlicher Coefficienten mit ε auf den ersten reduciren, ist also als Collineation mit ihm identisch. Hiermit ergiebt sich folgender Satz:

Die Coefficienten einer jeden ternären Substitution von der Determinante 1 *und der Collineationsperiode* 2, *welche an einer endlichen auf die Hermite'sche Normalform reducirten Collineationsgruppe Theil nimmt, sind durch die folgende Matrix gegeben* (Typus I):

$$\begin{vmatrix} a, & w, & \bar{v} \\ \bar{w}, & b, & u \\ v, & \bar{u}, & c \end{vmatrix}, \tag{21}$$

(22) $(a, b, c$ reell; $a + b + c = -1)$,

*) Herr Valentiner (De endelige Transformations-Gruppers Theori, Kopenhagen 1889) operirt viel mit dieser Grösse. Sie ist eine, und zwar die einfachste, Invariante der Collineation.

oder durch dieselbe Matrix, worin jedoch jeder Coefficient mit einer und derselben imaginären dritten Einheitswurzel multiplicirt erscheint (Typus II), was durch

$$\varepsilon \cdot \begin{vmatrix} a, & w, & \bar{v} \\ \bar{w}, & b, & u \\ v, & \bar{u}, & c \end{vmatrix}$$

angedeutet sein möge.

Zwischen diesen Coefficienten besteht nun ausserdem noch eine Reihe von Relationen, welche erhalten werden, wenn man die Elemente einer Reihe mit den Unterdeterminanten derselben oder einer anderen Reihe multiplicirt. Dies giebt mit Berücksichtigung von (11) und (13)

$$\begin{aligned} a^2 + v\bar{v} + w\bar{w} &= 1, & (a+b)\bar{w} + uv &= 0, \\ b^2 + ww + u\bar{u} &= 1, & (b+c)\bar{u} + vw &= 0, \\ c^2 + u\bar{u} + v\bar{v} &= 1, & (c+a)\bar{v} + wu &= 0, \end{aligned}$$

woraus man leicht die folgenden Gleichungen ableitet

$$\begin{gathered} uvw = (1+a)(1+b)(1+c), \\ u\bar{u} = (1+b)(1+c),\ v\bar{v} = (1+c)(1+a),\ w\bar{w} = (1+a)(1+b). \end{gathered} \tag{23}$$

Es ist häufig von Wichtigkeit, einige der nicht in der Diagonalreihe stehenden Coefficienten reell annehmen zu können. Dies kann in vielen Fällen durch folgende Transformation erreicht werden, die auch für quaternäre Collineationen des öfteren angewandt werden soll. Man ersetze allgemein

$$x_i \text{ durch } p_i x_i \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{24}$$

wo die p_i complexe Grössen vom absoluten Betrage 1 sein sollen (also $p_i \bar{p}_i = 1$). Eine derartige Transformation soll kurz *p-Transformation* genannt werden. Bei derselben bleibt die Hermite'sche Normalform (8) invariant, (10) dagegen geht über in

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{p_i} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{25}$$

Man sieht nun ohne Weiteres, dass sich $p_k : p_i$ so wählen lässt, dass der neue Coefficient $\frac{p_k}{p_i} a_{ik}$ reell, und, wenn man will, auch positiv wird. Ist, wie in (21) $a_{ki} = \overline{a_{ik}}$, so bleibt diese Relation auch zwischen den transformirten Coefficienten $\frac{p_k}{p_i} a_{ik}$ und $\frac{p_i}{p_k} a_{ki}$ bestehen, während die Diagonalterme überhaupt nicht geändert werden.

Was nun die Collineationen von der Periode 3 anbetrifft, so ergeben sich für die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen folgende Möglichkeiten

(26) $$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2; \; D = 0,$$

oder

(27) $$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \eta, \eta, \eta^7; \; D = \eta(2+\eta^6),$$

wo η eine eigentliche neunte Einheitswurzel darstellt. Weitere Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten erhält man aus der Vergleichung der Coefficienten von A_s^2 mit denen von A_s^{-1}, wo wiederum $A_{kl} = \bar{a}_{kl}$ nach (11). Es wäre zwecklos, diese Bestimmung hier allgemein durchführen zu wollen; sie führt in den auftretenden Fällen rasch zum Ziel.

§ 4.

Die ternäre $C_{\frac{1}{2}41}$ (Tetraedergruppe).

Jede ternäre Collineation von der Periode 3 lässt sich, wie soeben gezeigt, auf eine der beiden Formen

(28) $$E_1 : \varrho s_1' = s_1, \quad \varrho s_2' = \varepsilon s_2, \quad \varrho s_3' = \varepsilon^2 s_3,$$

oder

(29) $$E_1' : \varrho s_1' = \eta s_1, \quad \varrho s_2' = \eta s_2, \quad \varrho s_3' = \eta^7 s_3$$

transformiren. Zugleich erzeugt E_1 mit ihren Potenzen, sowie E_1' je eine $C_{\frac{1}{2}31}$. Diese beiden Gruppen sind in dem oben definirten Sinne von einander verschieden, denn *zwei Collineationen S und T in n Variabelen sind dann und nur dann in einander transformirbar, wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von S, gleich denen von T, sind, multiplicirt mit einem und demselben Factor, der nur eine n^{te} Einheitswurzel sein kann.* Wir haben hiermit ein erstes Beispiel vor uns für den Fall, dass zwei Collineationsgruppen einer und derselben Vertauschungsgruppe $\left(G_{\frac{1}{2}31}\right)$ holoedrisch isomorph sind, ohne in einander linear transformirbar zu sein. Aehnliche Beispiele treten bei den binären Gruppen noch nicht auf.

Gemäss der in § 1 auseinandergesetzten Methode erhält man jetzt alle möglichen verschiedenen Tetraedergruppen $C_{\frac{1}{2}41}$, wenn man Collineationen E_2 bestimmt, welche den Bedingungen

(30) $$E_2^2 = 1, \quad (E_1 E_2)^3 = 1,$$

und E_2', welche den Bedingungen

(31) $$E_2'^2 = 1, \quad (E_1' E_2')^3 = 1$$

genügen. Ich zeige zunächst, dass die Bedingungen (31) nicht erfüllt werden können. E_1' (29) nämlich ist eine perspectivische Collineation, aber auch E_2' ist perspectivisch, da E_2' als Collineation von der Periode 2 zu Wurzeln der charakteristischen Gleichung $-1, -1, +1$

hat. Sei nun A der bei E_1', B der bei E_2' mit allen hindurchgehenden Geraden invariant bleibende Punkt. Alsdann muss die Verbindungsgerade von A und B (im Falle, wo A und B zusammenfallen, jede Gerade durch A) bei $E_1'E_2'$ invariant bleiben. Wählen wir diese Gerade als $z_1 = 0$, so ist in $E_{1,s}'$: $z_1' = \varepsilon z_1$ und in $E_{2,s}'$: $z_1' = -z_1$, wobei die Determinanten von $E_{1,s}'$ und $E_{2,s}'$ $+1$ sind. Bildet man jetzt $(E_{1,s}' D_{2,s}')^3$ so erhält man zunächst $z_1' = -\varepsilon z_1$, und da $(E_1'E_2')^3 \equiv 1$ sein soll, so folgt $z_2' = -\varepsilon z_2$, $z_3' = -\varepsilon z_3$. Hier ist aber die Substitutionsdeterminante -1, was einen Widerspruch liefert. Also ist (31) auszuschliessen, d. h. *E_1 darf nicht in der Form* (29) *vorausgesetzt werden.*

In der ferneren Bestimmung alternirender Collineationsgruppen treten Collineationen von der Periode 3 nur auf als $(E_\lambda E_{\lambda+1})$ (5). Dieser Collineation entspricht in der Buchstabenvertauschungsgruppe die cyklische Vertauschung $(\lambda+1, \lambda+3, \lambda+2)$, und da diese durch Substitutionen der Gruppen auf $E_1 = (123)$ transformirbar ist, so muss auch die Collineation $(E_\lambda E_{\lambda+1})$ auf E_1 transformirbar sein. *Folglich kann auch bei keiner der in der weiteren Untersuchung auftretenden Collineationen der Periode* 3 *der Fall* (27) *eintreten; wir können also überall die Bedingungen* (26) *voraussetzen.*

Wir bestimmen nun, nachdem wir E_1 in der Form (28) angenommen haben, E_2 gemäss den Gleichungen (30). Wir setzen zunächst für E_2 die Matrix der Coefficienten (21) an, wo ausserdem die Bedingungen (22) und (23) erfüllt sein müssen. Für E_1E_2 erhalten wir alsdann die Matrix

$$E_1E_2 \equiv \begin{vmatrix} a, & w, & \bar{v} \\ \varepsilon\bar{w}, & \varepsilon b, & \varepsilon u \\ \varepsilon^2 v, & \varepsilon^2\bar{u}, & \varepsilon^2 c \end{vmatrix}.$$

Da hier die Periode 3 sein soll, so folgt aus (26)

$$a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c = 0,$$

was in Verbindung mit (22) ergiebt:

$$a = b = c = -\frac{1}{3}.$$

Durch p-Transformation (24) kann man, ohne E_1 zu ändern, in E_2 v und w reell und positiv machen. Also folgt aus (23) $u = v = w = \frac{2}{3}$. Hiermit ist

$$E_2 \equiv \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} -1, & 2, & 2 \\ 2, & -1, & 2 \\ 2, & 2, & -1 \end{vmatrix}$$

eindeutig bestimmt.

Wir verificiren nun leicht, dass $E_1 E_2$ in der That die Periode 3 besitzt. Also erhält man als *einzige* ternäre Tetraedergruppe die folgende

(32)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$
$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{3}(-z_1+2z_2+2z_3)$
$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{3}(2z_1-z_2+2z_3)$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{3}(2z_1+2z_2-z_3)$,

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Transformirt man diese Gruppe durch Einführung der neuen Variabeln

(33)
$$\begin{aligned} \sqrt{3}\, x_1 &= z_1 + z_2 + z_3, \\ \sqrt{3}\, x_2 &= z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3, \\ \sqrt{3}\, x_3 &= z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3, \end{aligned}$$

so erhält man die einfachere Form

(34)

	E_1	E_2
$\varrho x_1' =$	x_2	
$\varrho x_2' =$	x_3	$-x_2$
$\varrho x_3' =$	x_1	$-x_3$.

Auch auf diese Form lässt sich demnach jede ternäre Tetraedergruppe transformiren.

§ 5.

Die ternäre $C_{\frac{1}{2}51}$ (Ikosaedergruppe).

Wir gelangen zur Ikosaedergruppe, wenn wir zu den in § 4 gewonnenen Collineationen E_1 und E_2 (32) eine Collineation E_3 hinzufügen, welche den Bedingungen $E_3^2 = 1$, $(E_1 E_3)^2 = 1$, $(E_2 E_3)^3 = 1$ genügt. Wir setzen also E_3 in der Form (21) an. Die Bedingung $(E_1 E_3)^2 = 1$ ergiebt:
entweder

$$b = c = 0, \quad a = -1,$$

woraus sofort nach (23)

$$v = w = 0, \quad u\bar{u} = 1$$

folgt, also

(35) $$E_3 : \varrho z_1' = -z_1, \quad \varrho z_2' = u z_3, \quad \varrho z_3' = \bar{u} z_2,$$

ler

$$a = c = 0, \quad b = -1,$$

oraus sich ergiebt

$$E_3' : \varrho z_1' = \bar{v} z_3, \quad \varrho z_2' = -z_2, \quad \varrho z_3' = v z_1$$

er endlich, für $a = b = 0$, $c = -1$,

$$E_3'' : \varrho z_1' = w z_2, \quad \varrho z_2' = \bar{w} z_1, \quad \varrho z_3' = -z_3.$$

ese drei Fälle sind aber nicht wesentlich von einander verschieden. ırch eine cyklische Vertauschung der Variabelen z_1, z_2, z_3 (d. i. eine eare Transformation der Gruppe) gehen nämlich E_1 und E_2 in sich bst, E_3 aber in E_3' resp. E_3'' über. Also genügt es, wenn wir für die in (35) so bezeichnete Collineation wählen. Es muss nun noch Bedingung $(E_2 E_3)^3 = 1$ genügt werden. Man erhält für $E_2 E_3$ Diagonalsumme

$$D = \frac{1}{3}(1 + 2u + 2\bar{u}),$$

l da dieselbe Null sein muss, so folgt $u + \bar{u} = -\frac{1}{2}$. Andererts ist $u\bar{u} = 1$ also

$$u = \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{15}).$$

n überzeugt sich nunmehr — am einfachsten durch die am Ende § 3 angegebene Methode: $A^2 = A^{-1}$ — dass $E_2 E_3$ in der That a der Periode 3 ist. Welcher der beiden Werthe von u in (36) nommen wird, ist gleichgültig. In der That sind die mit E_3 und , wo in E_3 der eine, in E_3' der andere Werth von u genommen rd, gebildeten Ikosaedergruppen durch die Vertauschung $(z_2 z_3)$ auf ander transformirbar. Hierdurch geht nämlich E_3 in E_3' über, E_2 ibt ungeändert und E_1 geht zwar in E_1^2 über, doch kann E_1^2 ensogut als E_1 als erste erzeugende Collineation genommen werden.

Demnach erhält man als *einzige* ternäre Ikosaedergruppe die folgende

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$
$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{3}(-z_1 + 2z_2 + 2z_3)$	$-z_1$
$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{3}(2z_1 - z_2 + 2z_3)$	$\lambda_1 z_3$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{3}(2z_1 + 2z_2 - z_3)$	$\lambda_2 z_2$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{15}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}(-1 - i\sqrt{15}).$$

Durch die Transformation (33) geht diese Gruppe über in

(39)

	E_1	E_2	E_3
$\varrho x_1' =$	x_2	x_1	$\frac{1}{2}(-x_1+\mu_2 x_2+\mu_1 x_2)$
$\varrho x_2' =$	x_3	$-x_2$	$\frac{1}{2}(\mu_2 x_1+\mu_1 x_2- x_3)$
$\varrho x_3' =$	x_1	$-x_3$	$\frac{1}{2}(\mu_1 x_1- x_2+\mu_2 x_3)$

wo

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5}). \tag{40}$$

Die Gruppe erscheint hier in reeller Form, und da sie gleichzeitig auf die Hermite'sche Normalform reducirt ist, so sind ihre Substitutionen *orthogonal*.

§ 6.

Die ternäre $C_{\frac{1}{2}61}$. Unmöglichkeit einer $C_{\frac{1}{2}71}$.

Um ternäre $C_{\frac{1}{2}61}$ zu finden, haben wir E_4 so zu bestimmen, dass

$$E_4^2 = (E_1 E_4)^2 = (E_2 E_4)^2 = 1; \quad (E_3 E_4)^3 = 1 \tag{41}$$

wird, wo E_1, E_2, E_3 in (37) gegeben sind. Nun ist bereits in § 4 gezeigt, dass jede Collineation E_4, welche den beiden ersten Bedingungen (41) genügt, von der Form sein muss

$$\varrho z'_\alpha = -z_\alpha, \quad \varrho z'_\beta = \omega z_\gamma, \quad \varrho z'_\gamma = \omega z_\beta, \tag{42}$$

wo α, β, γ in irgend einer Reihenfolge mit 1, 2, 3 übereinstimmt und $\omega\bar{\omega} = 1$ ist. Bildet man nun in $E_2 E_4$ die Diagonalsumme, welche wegen $(E_2 E_4)^2 = 1$ entweder -1 oder $-\varepsilon$, $-\varepsilon^2$ sein muss, so findet man für alle Werthe von α, β, γ

$$D = \tfrac{1}{3}(1+2\omega+2\bar{\omega}),$$

und da dies als reelle Grösse nur $= -1$ sein kann, so folgt $\omega+\bar{\omega} = -2$ also wegen $\omega\bar{\omega} = 1$, $\omega = \bar{\omega} = -1$.

Untersucht man endlich $E_3 E_4$, so sieht man sofort, dass der Fall $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ auszuschliessen ist, da hier $E_3 E_4$ überhaupt keine endliche Periode ergiebt. Dagegen liefert sowohl

$$\varrho z_2' = -z_2, \quad \varrho z_2' = -z_1, \quad \varrho z_3' = -z_3,$$

als auch

$$\varrho z_1' = -z_3, \quad \varrho z_2' = -z_2, \quad \varrho z_3' = -z_1$$

mit E_3 combinirt, die Periode 3. Welche dieser beiden Collineationen

als E_4 genommen wird, ist gleichgültig, da die aus E_1, E_2, E_3, E_4 beiden Werthen von E_4 gebildeten Gruppen durch die Vertauschung $z_2 z_3$) in einander transformirbar sind.

Wir erhalten demnach als *einzige* ternäre $C_{\frac{1}{2}\,61}$ *) die aus den folgenden Erzeugenden gebildete Gruppe

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$	$E_4 = (12)(56)$
$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{3}(-z_1+2z_2+2z_3)$	$-z_1$	$-z_2$
$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{3}(2z_1-z_2+2z_3)$	$\lambda_1 z_3$	$-z_1$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{3}(2z_1+2z_2-z_3)$	$\lambda_2 z_2$	$-z_3$

,

wo λ_1, λ_2 in (38) gegeben sind.

Transformirt man durch (33), so gehen E_1, E_2, E_3 in die in (39) gegebene Form über, während an Stelle von E_4 folgende Collineation tritt:

$$E_4 : \varrho z_1' = -z_1, \quad \varrho z_2' = -\varepsilon z_3, \quad \varrho z_3' = -\varepsilon^2 z_2.$$

Versuchen wir nun, durch Hinzufügung einer E_5 zur $C_{\frac{1}{2}\,71}$ zu gelangen, so scheitert dies an dem Umstande, dass jede Collineation E, die den Bedingungen $E^2 = (E_1 E)^2 = (E_2 E)^2 = 1$ unterworfen ist, von der Form

$$\varrho z_\alpha' = -z_\alpha, \quad \varrho z_\beta' = -z_\gamma, \quad \varrho z_\gamma' = -z_\beta$$

sein muss, wie soeben gezeigt. Jede derartige Collineation, also auch die zu bestimmende E_5, liefert aber, wie wir ebenfalls gesehen haben, mit E_3 combinirt entweder überhaupt keine endliche Periode, oder die Periode 3, in welch letzterem Falle wir zur E_4 gelangten. Da $(E_3 E_5)^2 = 1$ sein soll, so ist die Bestimmung einer unseren Bedingungen genügenden E_5 ausgeschlossen. Ternäre Collineationsgruppen, welche einer ternirenden Buchstabenvertauschungsgruppe $G_{\frac{1}{2}\,k;}$ holoedrisch isomorph sind, existiren daher für $k > 6$ nicht.

---

*) Betreffs dieser Gruppe cf. H. Valentiner, De endelige Transformationsgruppers-Theori. Kopenhagen 1889, pag. 192—198, und A. Wiman, Eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen. Math. Ann. Bd. 47. Eine von der Wiman'schen Abhandlung unabhängige Darstellung der Gruppe ist von Mr. Brown ausgearbeitet worden, und wird demnächst als Dissertation der Chicagoer Universität erscheinen.

§ 7.

Die ternären symmetrischen Gruppen. Schlussbemerkung über ternäre Gruppen.

Gemäss den Erörterungen des § 1 haben wir zur Bestimmung von symmetrischen ternären $C_{3!}$ eine Collineation F zu finden, welche den Bedingungen $F^2 = (E_1 F)^2 = 1$ genügt. Hier könnte nun E_1 in der bisher ausgeschlossenen Form E_1' (29) vorausgesetzt werden. Allein der in § 4 für die Unmöglichkeit der Relationen $E_2'^2 = 1$, $(E_1' E_2')^3 = 1$ gegebene Beweis zeigt ebenfalls die Unmöglichkeit der Relationen $F^2 = 1$, $(E_1' F)^2 = 1$, wie man sich leicht überzeugt. Also können wir auch hier E_1 in der Form (28) voraussetzen. Den Bedingungen $F^2 = 1$, $(E_1 F)^2 = 1$ wird nun, wie bereits bewiesen, in allgemeinster Weise genügt, wenn man für F die in (42) angegebene Collineation nimmt. In dieser Form ist E_4 (43) enthalten. Die Collineationen E_1 und E_4 erzeugen demnach eine $C_{3!}$. Führt man $-\omega s_\varrho$ für s_ϱ in (42) als neue Variabele ein und wendet eine geeignete Vertauschung von s_1, s_2, s_3 an, so zeigt sich, dass jede $C_{3!}$ sich auf die aus E_1 und E_4 erzeugte Gruppe transformiren lässt.

In gleicher Weise erzeugen E_1, E_2, F in allgemeinster Weise ein $C_{4!}$ (Octaeder), wenn man für F die in (43) angegebene Collineation nimmt. Auch diese Gruppe lässt sich unmittelbar (durch geeignete Vertauschung der s) auf die aus E_1, E_3, E_4 erzeugte transformiren.

Aus denselben Gründen endlich, die in § 6 entscheidend waren für die Nichtexistenz einer $C_{\frac{1}{2}7!}$ folgt, dass eine ternäre $C_{5!}$ unmöglich ist. Die ternären symmetrischen Collineationsgruppen führen also über die schon im binären Falle existirende Octaedergruppe nicht hinaus.

Folgendes ist demnach das Resultat der vorangegangenen Untersuchung über ternäre Gruppen.

Jede ternäre Collineationsgruppe $C_{\frac{1}{2}k!}$, $C_{k!}$ *welche einer alternirenden oder symmetrischen Buchstabenvertauschungsgruppe von* k *Buchstaben* ($k > 2$) *holoedrisch isomorph ist, lässt sich auf eine der folgenden Collineationsgruppen linear transformiren:*

Zwei $C_{\frac{1}{2}3!}$ erzeugt aus E_1 resp. E_1' (29);

Eine $C_{\frac{1}{2}4!}$ (Tetraeder) „ „ E_1, E_2, (32) oder (34);

Eine $C_{\frac{1}{2}5!}$ (Ikosaeder) „ „ E_1, E_2, E_3 (37) oder (39);

Eine $C_{\frac{1}{2}6!}$ „ „ E_1, E_2, E_3, E_4, (43);

Eine C_{31} erzeugt aus E_1, E_4;
Eine C_{41} (Octaeder) „ „ E_1, E_2, E_4,

wo die Collineationen E_1, E_2, E_3, E_4 in (43) gegeben sind.

§ 8.

Quaternäre Collineationen von der Periode 2 und 3.

Eine quaternäre Collineation A ist durch die Formel gegeben

$$\varrho z_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Wie in § 3, dem wir uns überhaupt in der Bezeichnungsweise anschliessen, nehmen wir auch hier die Determinante $|a_{ik}| = 1$ an, und bezeichnen die Substitution

$$z_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

mit A_s. Nennen wir die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ so ergiebt sich die Diagonalsumme

$$D = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$

und

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 1.$$

Soll jetzt A die Periode 2 besitzen, so erhalten wir folgende Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = \quad 1, \quad 1, -1, -1; \quad D = 0: \quad \text{Typus Ia},\\
14)\quad &\text{„ „ „ „} = \pm i, \pm i, \mp i, \mp i; \quad D = 0: \quad \text{„ Ib},\\
&\text{„ „ „ „} = \quad \omega, \quad \omega, \quad \omega, -\omega; \quad D = 2\omega: \quad \text{„ II},
\end{aligned}$$

wo ω eine eigentliche achte Einheitswurzel bedeutet.

Für den Typus Ia ist

$$A_s^2 \equiv 1.$$

Setzen wir nun wiederum unsere Gruppen in der Hermite'schen Normalform, also die Existenz der Gleichungen (11) voraus, so folgt ganz wie in § 3 aus $A_s^{-1} = A_s$

$$15)\qquad a_{kl} = \bar{a}_{lk},$$

also a_{ii} reell.

Für den Typus Ib ist

$$A_s^4 \equiv 1, \quad A_s^2 \equiv -1, \quad \text{also} \quad A_s^{-1} = A_s^3 \equiv -A_s.$$

hieraus folgt

$$16)\qquad a_{kl} = -\bar{a}_{lk},$$

also a_{ii} rein imaginär.

Für den Typus II ist

$$A_s^3 \equiv 1,\quad A_s^4 \equiv -1,\quad A_s^2 \equiv \pm i,\quad \text{also}\quad A_s^{-1} = A_s^7 \equiv \pm i A_s,$$

woraus folgt

$$a_{ki} = \pm i a_{ki},$$

also a_{ii} gleich einer mit ω multiplicirten reellen Grösse.

Der Typus Ia ist somit durch folgende Matrix gegeben

$$(47)\qquad \begin{vmatrix} a, & u, & v, & w \\ \bar{u}, & b, & r, & s \\ \bar{v}, & \bar{r}, & c, & t \\ \bar{w}, & \bar{s}, & \bar{t}, & d \end{vmatrix},$$

wo

$$(48)\qquad a, b, c, d \text{ reell},\quad a+b+c+d=0.$$

Ferner bestehen wegen $A_{ik} = \bar{a}_{ik}$

(49) 4 Gleichungen, deren erste lautet $a^2 + u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} = 1$,

(50) 6 „ „ „ „ $(a+b)u + v\bar{r} + w\bar{s} = 0.$

Den Typus Ib erhält man aus Ia, wenn man in der Matrix (47) jeden Coefficienten mit $\pm i$ multiplicirt, während (48), (49), (50) bestehen bleiben.

Den Typus II endlich erhält man durch Multiplication sämmtlicher Coefficienten der Matrix (47) mit ω. An Stelle von (48) ist dabei zu setzen

$$a, b, c, d \text{ reell},\quad a+b+c+d = \pm 2.$$

Was ferner Collineationen von der Periode 3 anbetrifft, so werden hier die verschiedenen Typen in folgender Tabelle zusammengestellt.

(51)

Typus	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$	D	A_s^3	A_s^2
Ia	$1, 1, \varepsilon, \varepsilon^2$	$+1$	$+1$	A_s^{-1}
Ib	$-1, -1, -\varepsilon, -\varepsilon^2$	-1	-1	$-A_s^{-1}$
Ic	$\pm i, \pm i, \pm i\varepsilon, \pm i\varepsilon^2$	$\pm i$	$\pm i$	$\pm i A_s^{-1}$
IIa	$\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^2$	-2	$+1$	A_s^{-1}
IIb	$-\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon^2, -\varepsilon^2$	$+2$	-1	$-A_s^{-1}$
IIc	$\pm i\varepsilon, \pm i\varepsilon, \pm i\varepsilon^2, \pm i\varepsilon^2$	$\pm 2i$	$\pm i$	$\pm i A_s^{-1}$
IIIa	$1, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon$	$3\varepsilon+1$	$+1$	A_s^{-1}
IIIb	$-1, -\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon$	$-(3\varepsilon+1)$	-1	$-A_s^{-1}$
IIIc	$\pm i, \pm i\varepsilon, \pm i\varepsilon, \pm i\varepsilon$	$\pm i(3\varepsilon+1)$	$\pm i$	$\pm i A_s^{-1}$

Hierin sind in der zweiten Collonne die verschiedenen Möglichkeiten

die Werthe der Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A gend welcher Reihenfolge, in der dritten Colonne die Diagonal- nen gegeben. Die in der vierten Colonne befindlichen Zahlen n die Factoren an, womit die Substitution A_s^3 jede der vier abelen s multiplicirt. In der letzten Colonne bedeutet z. B. die len Typus Ic bezügliche Grösse $\pm i A_s^{-1}$, dass die Coefficienten A_s^2 gleich den mit $\pm i$ multiplicirten Coefficienten von A_s^{-1} sind. e letzte Colonne ist insbesondere zur Herstellung von Relationen chen den Coefficienten von A von Wichtigkeit. Man berechne i die Coefficienten von A_s^2 direct (durch Zusammensetzung von mit A_s), diejenigen von A_s^{-1} dagegen als $A_{ki} = \bar{a}_{ki}$.

Durch das Vorangehende ist zugleich die Bestimmung sämmtlicher erledigt. Es giebt 3 verschiedene quaternäre $C_{\frac{1}{2}81}$, hergestellt h die Potenzen von:

$$E_1: \begin{cases} \varrho z_1' = z_1, \\ \varrho z_2' = z_2, \\ \varrho z_3' = \varepsilon z_3, \\ \varrho z_4' = \varepsilon^2 z_4, \end{cases} \quad E_1': \begin{cases} \varrho z_1' = \varepsilon z_1, \\ \varrho z_2' = \varepsilon z_2, \\ \varrho z_3' = \varepsilon^2 z_3, \\ \varrho z_4' = \varepsilon^2 z_4, \end{cases} \quad E_1'': \begin{cases} \varrho z_1' = z_1, \\ \varrho z_2' = \varepsilon z_2, \\ \varrho z_3' = \varepsilon z_3, \\ \varrho z_4' = \varepsilon z_4. \end{cases}$$

§ 9.

Die quaternären $C_{\frac{1}{2}41}$ (Tetraedergruppen).

Wir erweitern (52) zur Tetraedergruppe durch Bestimmung von neationen E_2, welche mit E_1 resp. E_1', E_1'' combinirt, die Periode 2 ben.

Ich zeige zunächst, dass eine Collineation S, deren kanonische E_1'' (52) ist, also vom Typus III (51), an keiner Tetraedergruppe nehmen kann. Eine derartige Collineation S lässt einen bestimmten t P mit sämmtlichen durch ihn gehenden Ebenen invariant. Sei T eine Collineation der Periode 2 und zwar zunächst vom Typus I wobei man noch den Fall Ib auf Ia durch Division der Coef- ten von T mit i reduciren kann. Alsdann lässt T zwei sich nicht idende Geraden L_1 und L_2 mit allen hindurchgehenden Ebenen iant. Wählen wir nun die Ebenen PL_1 und PL_2 als $z_1 = 0$ $z_2 = 0$, (falls P etwa auf L_1 liegen sollte, nehmen wir für PL_1 d eine Ebene durch L_1) so ist in der Substitution

$$S_s : z_1' = \varepsilon z_1, \; z_2' = \varepsilon z_2,$$

in

$$T_s : z_1' = z_1, \; z_2' = -z_2,$$

in

$$S_s T_s : z_1' = \varepsilon z_1,\ z_2' = -\varepsilon z_2;$$

mithin kann ST nicht die Collineationsperiode 3 besitzen.

Aber auch die Collineationsperiode 2 ist ausgeschlossen, denn wäre $(ST)^2 = 1$, so müsste, da in $(S_s T_s)^2 : z_1' = \varepsilon^2 z_1,\ z_2' = \varepsilon^2 z_2$ ist, auch $z_3' = \varepsilon^2 z_3,\ z_4' = \varepsilon^2 z_4$ sein, und alsdann wäre die Substitutionsdeterminante von Eins verschieden.

Falls nun T vom Typus II (44) sein sollte, so lässt T ebenfalls einen Punkt mit sämmtlichen hindurchgehenden Ebenen invariant. Sei dies der Punkt Q. Wählt man alsdann irgend eine durch P und Q gehende Ebene als $z_1 = 0$, so ist in $S_s : z_1' = \varepsilon z_1$ und in $T_s : z_1' = \omega z_1$; also in $S_s T_s : z_1' = \varepsilon\omega z_1$. Hieraus folgt, dass ST weder von der Periode 3, noch auch von der Periode 2 sein kann.

Eine Collineation der Periode 3 vom Typus III (51) kann daher nicht an einer Tetraedergruppe theilnehmen, und auch nicht an einer symmetrischen C_{31}. Da ferner alle in der weiteren Untersuchung vorkommenden Collineationen der Periode 3 (durch Collineationen derselben Gruppe) in einander transformirbar sind — die entsprechenden Buchstabenvertauschungen sind alle von der Form (ikl) — so folgt, *dass Collineationen, deren kanonische Form E_1''* (52) *ist, also Collineationen vom Typus III* (51), *überhaupt von der weiteren Untersuchung ausgeschlossen werden können.*

Aehnliches gilt nun aber auch von Collineationen T von der Periode 2, falls sie vom Typus II (44) sind. Nimmt man als S zunächst E_1 in (52) und wählt die durch den invarianten Punkt von T und die invariante Gerade von S gelegte Ebene als $z_1 = 0$, so ist in $S_s : z_1' = z_1$ und in $T_s : z_1' = \omega z_1$. Hier sieht man wiederum, dass ST nicht von der Collineationsperiode 3 sein kann, während die Möglichkeit der Periode 2 nicht ausgeschlossen ist. Nimmt man endlich E_1' in (52) für S, so folgt in ähnlicher Weise, wie soeben, dass ST weder die Periode 3 noch die Periode 2 besitzen kann. *Demzufolge können in der weiteren Untersuchung, soweit alternirende Gruppen in Betracht kommen, Collineationen der Periode 2 vom Typus II* (44) *ausgeschlossen werden, während bei der Bestimmung der symmetrischen Gruppen auch der Fall in Betracht zu ziehen ist, dass F vom Typus II ist.*

Bei der Bestimmung der Tetraedergruppen, und deren Erweiterung zu höheren $C_{\frac{1}{2}kl}$ hat man, wie bewiesen, entweder von E_1 oder von E_1' (52) auszugehen. Je nachdem man das eine oder das andere thut, folgt alsdann, wie oben, dass auch sämmtliche in der Untersuchung auftretende Collineationen der Periode 3, da sie durch Collineationen der Gruppe auf E_1 resp. E_1' transformirbar sind, entweder alle wie E_1 vom Typus I (51) oder alle wie E_1' vom Typus II (51) sein müssen.

Wir gehen nunmehr zur wirklichen Aufstellung der Tetraeder-
ıppen auf, und beginnen mit

$$E_1: \begin{aligned} \varrho x_1' &= x_1, \\ \varrho x_2' &= x_2, \\ \varrho x_3' &= \varepsilon x_3, \\ \varrho x_4' &= \varepsilon^2 x_4, \end{aligned} \qquad E_2 \equiv \begin{vmatrix} a, & u, & v, & w \\ \bar{u}, & b, & r, & s \\ \bar{v}, & \bar{r}, & c, & t \\ \bar{w}, & \bar{s}, & \bar{t}, & d \end{vmatrix},$$

bei die Bedingungen (48), (49), (50) zu erfüllen sind. Wir haben
n die weitere Bedingung einzuführen, dass $(E_1 E_2)^3 = 1$. Da $E_1 E_2$
n Typus I (51) sein muss, so folgt für die Diagonalsumme von
E_2 entweder

a) $$a + b + \varepsilon c + \varepsilon^2 d = \pm 1,$$

er

b) $$a + b + \varepsilon c + \varepsilon^2 d = \pm i.$$

ir nehmen zuerst den Fall (53). Hier kann, eventuell durch Zeichen-
chsel sämmtlicher Coefficienten in E_2 stets erreicht werden, dass
s obere Zeichen gilt. Wir haben demnach

5) $$a + b + \varepsilon c + \varepsilon^2 d = 1,$$

d da ausserdem (48) $a + b + c + d = 0$, so folgt

6) $$a + b = \frac{2}{3}, \quad c = d = -\frac{1}{3}.$$

us (55) folgt ferner, dass nunmehr $E_1 E_2$ vom Typus Ia (51) ist.
ırch Vergleichung des ersten Coefficienten in $(E_1 E_2)^2$ mit dem in
$_1 E_2)^{-1}$ ergiebt sich alsdann

7) $$\begin{cases} a^2 + u\bar{u} + \varepsilon v\bar{v} + \varepsilon^2 w\bar{w} = a, & \text{und aus (49)} \\ a^2 + u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} = 1. \end{cases}$$

ırch p-Transformation (24) kann man erreichen, dass v und r reell
rden. Ferner transformire man E_1 und E_2 durch die Einführung
r neuen Variabelen

8) $$\begin{aligned} y_1 &= \lambda x_1 + \mu x_2, \\ y_2 &= \mu x_1 - \lambda x_2, \end{aligned}$$

λ und μ reelle, der Bedingung $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ genügende Grössen
ıd. Diese Transformation lässt die Hermite'sche Normalform un-
ändert, lässt E_1 ungeändert, und bewirkt, dass bei E_2, der Coef-
ient von y_3 in y_1' lautet $\lambda v + \mu r$. Da nun v und r reell sind,
sst sich λ und μ so bestimmen, dass $\lambda v + \mu r = 0$ wird. Schreibt
an nun wieder x_1 und x_2 statt y_1 und y_2, so ist nunmehr in E_2 $v = 0$.

Jetzt folgt aus (57), da a reell ist, zunächst $w = 0$, dann $a = 1$,
$= 0$. Aus (56) kommt $b = -\frac{1}{3}$. Nun sind $u = v = w = 0$, also

lässt sich r und s durch p-Transformation reell und positiv machen. Die Gleichungen (49) und (50) bestimmen sodann eindeutig $r = s = t = \frac{2}{3}$. Die so bestimmte E_2 liefert nun in der That mit E_1 combinirt die Periode 3, also haben wir die folgende Tetraedergruppe:

Tetraeder I.

(59)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$
$\varrho z_1' =$	z_1	z_1
$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{3}(-z_2+2z_3+2z_4)$
$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{3}(2z_2-z_3+2z_4)$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{3}(2z_2+2z_3-z_4)$.

Durch die Transformation

(60)

$$\begin{aligned} 2x_1 &= z_1 + \sqrt{3}z_2, \\ 2x_2 &= z_1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-z_2+2z_3+2z_4), \\ 2x_3 &= z_1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-z_2+2\varepsilon z_3+2\varepsilon^2 z_4), \\ 2x_4 &= z_1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-z_2+2\varepsilon^2 z_3+2\varepsilon z_4) \end{aligned}$$

geht diese Tetraedergruppe I über in die einfache Gestalt

(61)

	E_1	E_2
$\varrho x_1' =$	x_1	x_2
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1
$\varrho x_3' =$	x_4	x_4
$\varrho x_4' =$	x_2	x_3 .

Wir behandeln nun den Fall (54). Hier können wir wiederum wie im vorigen Falle ohne Einschränkung der Allgemeinheit das obere Zeichen wählen, und erhalten sodann aus

(62) $$a + b + \varepsilon c + \varepsilon^2 d = i,$$

und

$$a + b + c + d = 0,$$

(63) $$a + b = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad d = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

) folgt, dass $E_1 E_2$ vom Typus Ic (51) ist. Demnach ergiebt sich

$$a^2 + u\bar{u} + \varepsilon v\bar{v} + \varepsilon^2 w\bar{w} = \pm ia.$$

zufolge (63) a und b verschiedenes Vorzeichen haben, kann ventuelle Vertauschung von a und b das Vorzeichen von i in ter Weise gewählt werden, also

$$a^2 + u\bar{u} + \varepsilon v\bar{v} + \varepsilon^2 w\bar{w} = -ia.$$

ı wie im vorigen Falle kann man durch die Transformation :h vorausgegangener p-Transformation wiederum $v = 0$ machen, ın nachträglich durch p-Transformation w und r reell und Nunmehr folgt aus

$$a^2 + u\bar{u} + \quad w^2 = 1,$$

$$a^2 + u\bar{u} + \varepsilon^2 w^2 = -ia,$$

$$a^2 + u\bar{u} = \frac{1}{3}, \quad w = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad u = 0.$$

te der 4 Gleichungen (49) lautet

$$d^2 + w\bar{w} + s\bar{s} + t\bar{t} = 1,$$

ţt $s = t = 0$, und nunmehr aus den übrigen Gleichungen (49) $\frac{2}{3}$. Hiermit sind alle Coefficienten bestimmt, und man über- ch, dass in der That $E_1 E_2$ die Periode 3 besitzt. Demnach wir

Tetraeder II.

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$
$\varrho x_1' =$	x_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\quad x_1 + \sqrt{2}x_4)$
$\varrho x_2' =$	x_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-x_2 + \sqrt{2}x_3)$
$\varrho x_3' =$	εx_3	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}x_2 + \quad x_3)$
$\varrho x_4' =$	$\varepsilon^2 x_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}x_1 - \quad x_4)$

rch die Transformation

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2),$$

$$x_2 = \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) + \quad x_3 + \quad x_4\right],$$

$$x_4 = \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) + \varepsilon x_3 + \varepsilon^2 x_4\right],$$

$$x_4 = \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) + \varepsilon^2 x_3 + \varepsilon x_4\right],$$

geht diese Tetraedergruppe II über in

(66)

	E_1	E_2
$\varrho x_1' =$	x_1	$-x_2$
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1
$\varrho x_3' =$	x_4	$-x_4$
$\varrho x_4' =$	x_2	x_3

.

Das Tetraeder II kann nicht in I (59) transformirt werden. Dies folgt am einfachsten daraus, dass die Tetraedergruppe I eine Ebene invariant lässt, nämlich die Ebene $s_1 = 0$, oder $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, für die Tetraedergruppe II dagegen keine invariante Ebene existirt, wie sofort aus den Formeln (66) folgt.

Zur Bestimmung weiterer Tetraedergruppen legen wir jetzt als E_2 die in (52) mit E_1' bezeichnete Collineation zu Grunde. In gleicher Weise wie in den Fällen I und II lässt sich auch hier in E_2, welche wir wiederum in der Form (47) mit den Relationen (48), (49), (50) anzunehmen haben, der Coefficient $v = 0$ machen. Für die Diagonalsumme D von $E_1 E_2$ erhalten wir sodann

$$\varepsilon(a+b) + \varepsilon^2(c+d) = D,$$

also

$$\varepsilon^2(a+b) + \varepsilon(c+d) = \bar{D},$$

und da

$$(a+b) + (c+d) = 0,$$

so folgt, $D + \bar{D} = 0$, d. h. D ist rein imaginär. Nun muss aber $E_1 E_2$ vom Typus II sein, also folgt $D = \pm 2i$, und insbesondere dass $E_1 E_2$ vom Typus IIc ist. Durch Multiplication der Coefficienten von E_2 mit ± 1 kann stets $D = +2i$ bewirkt werden. Dann ergiebt sich

$$a + b = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad c + d = -\frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{67}$$

Vergleichen wir nun die ersten Glieder in $(E_1 E_2)^2$ und $(E_1 E_2)^{-1}$, so folgt nach (51)

$$a^2 + u\bar{u} + \varepsilon(v\bar{v} + w\bar{w}) = \pm ia. \tag{68}$$

Da $v = 0$, und durch p-Transformation w (und r) reell und positiv gemacht werden kann, so haben wir

$$a^2 + u\bar{u} + w^2 = 1,$$
$$a^2 + u\bar{u} + \varepsilon w^2 = \pm ia,$$

und hieraus

$$a^2 + u\bar{u} = \tfrac{1}{3}, \quad w = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad u = 0$$

e aber $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, so würde aus (67) $b = \sqrt{3}$ folgen, also $b > 1$, wegen der Gleichungen (49) unmöglich ist. Also muss in (68) obere Vorzeichen gelten, und es folgt $a = b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Aus den chungen (50) und (49) folgt sofort $s = t = 0$, $c = d = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Die so bestimmte Collineation E_2 genügt nun in der That Bedingung $(E_1 E_2)^3 = 1$, also erhält man folgende Tetraedergruppe

Tetraeder III.

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$
$\varrho z_1' =$	εz_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4)$
$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_2 + \sqrt{2} z_3)$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 - z_3)$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4)$

h die Transformation

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_3),$$
$$x_2 = \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_3) + z_2 + z_4\right],$$
$$x_3 = \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_3) + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_4\right],$$
$$x_4 = \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_3) + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_4\right]$$

dieselbe über in folgende reelle Form

	E_1	E_2
$\varrho x_1' =$	$\frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$	$-x_2$
$\varrho x_2' =$	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 + x_4)$	x_1
$\varrho x_3' =$	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$	$-x_4$
$\varrho x_4' =$	$\frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 + x_4)$	x_3

Selbstverständlich ist diese Gruppe III (wegen der Form von E_1) weder auf I noch auf II transformirbar. Da nun weitere Tetraedergruppen nicht mehr möglich sind, so folgt, dass jede quaternäre Tetraedergruppe entweder auf I (59) oder auf II (64) oder auf III (69) transformirbar ist.

§ 10.

Die quaternären $C_{\frac{1}{2}51}$ (Ikosaedergruppen).

Wir gehen von dem Tetraeder I (59) aus, nehmen $E_3 = (12)(45)$ in der Form (47) mit den Relationen (48), (49), (50) an, und bilden $E_1 E_3$. Wäre $E_1 E_3$ vom Typus Ib (44) so würden nach (46) alle Coefficienten verschwinden. Also muss $E_1 E_3$ vom Typus Ia sein, mithin folgt nach (45) $c = d = 0$; $v = w = r = s = 0$. Also erhalten wir für die Coefficienten von E_3 die Matrix

$$(72) \qquad \begin{vmatrix} a, & u, & 0, & 0 \\ \bar{u}, & -a, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & t \\ 0, & 0, & \bar{t}, & 0 \end{vmatrix},$$

mit den Relationen

$$(73) \qquad a^2 + u\bar{u} = 1, \quad t\bar{t} = 1.$$

Bilden wir nun $E_2 E_3$ so ergiebt sich die Diagonalsumme

$$D = \tfrac{1}{8}(4a + 2t + 2\bar{t}),$$

und da dieselbe reell ist, ausserdem $E_2 E_3$ mit E_1 von demselben Typus also I sein muss, so folgt $D = \pm 1$. Also ist $E_2 E_3$ speciell vom Typus Ia. Durch Multiplication der Coefficienten von E_3 mit ± 1 kann man stets $D = +1$ erreichen, also

$$(74) \qquad \tfrac{1}{8}(4a + 2t + 2\bar{t}) = 1.$$

Durch Vergleichung der ersten Coefficienten in $(E_2 E_3)^2$ und $(E_2 E_3)^{-1}$ folgt

$$3a^2 - u\bar{u} = 3a,$$

woraus nach (73) sich ergiebt $4a^2 - 3a - 1 = 0$, also entweder

$$(75) \qquad a = 1,$$

oder

$$(76) \qquad a = -\tfrac{1}{4}.$$

Im Fall (75) folgt ferner $u = 0$, und aus (74) $t + \bar{t} = -\frac{1}{2}$, mithin in Hinsicht auf (73)

$$t = \tfrac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{15}).$$

Welcher der beiden Werthe für t genommen wird, ist gleichgültig, da man durch Vertauschung von z_3 mit z_4 beide Fälle auf einander transformiren kann. Also erhalten wir als erste quaternäre $C_{\frac{1}{2}51}$

Ikosaeder I.

(77)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$
$\varrho z_1' =$	z_1	z_1	z_1
$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{3}(-z_2+2z_3+2z_4)$	$-z_2$
$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{3}(2z_2-z_3+2z_4)$	$\lambda_1 z_4$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{3}(2z_2+2z_3-z_4)$	$\lambda_2 z_3$

,

wo

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{4}(-1+i\sqrt{15}), \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{4}(-1-i\sqrt{15}).$$

Durch die Transformation (60) geht die Gruppe über in die reelle Form

(78)

	E_1	E_2	E_3
$\varrho x_1' =$	x_1	x_2	$\frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3+x_4)$
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	$\frac{1}{2}(x_1-\mu_1 x_3-\mu_2 x_4)$
$\varrho x_3' =$	x_4	x_4	$\frac{1}{2}(x_1-\mu_1 x_2-\mu_2 x_3)$
$\varrho x_4' =$	x_2	x_3	$\frac{1}{2}(x_1-\mu_2 x_2-\mu_1 x_4)$

,

wo

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}-1-\sqrt{5}),$$

während sie durch die Transformation

(79)
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(z_2+z_3+z_4),$$
$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(z_2+\varepsilon z_3+\varepsilon^2 z_4),$$
$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(z_2+\varepsilon^2 z_3+\varepsilon z_4),$$

ebenfalls in eine reelle Form übergeht, die mit der aus der ternären Ikosaedergruppe (39) durch Hinzufügung einer vierten Veriabelen ($\varrho x_4' = x_4$) abgeleiteten übereinstimmt.

Im Falle (76) folgt $u\bar{u} = \frac{15}{16}$, $t = 1$. Man kann nun eine p-Transformation so bestimmen, dass E_1 und E_2 ungeändert bleiben, während in E_3 u reell und positiv wird. Dadurch wird $u = \frac{1}{4}\sqrt{15}$, und da nun in der That $(E_2E_3)^3 = 1$, so erhält man folgende zweite quaternäre $C_{\frac{1}{2}51}$

Ikosaedergruppe II.

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$
$\varrho z_1' =$	z_1	z_1	$\frac{1}{4}(-z_1 + \sqrt{15}z_2)$
$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{8}(-z_2 + 2z_3 + 2z_4)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{15}z_1 + z_2)$
$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{8}(2z_2 - z_3 + 2z_4)$	z_4
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{8}(2z_2 + 2z_3 - z_4)$	z_3

(80)

Durch die Transformation (60) geht diese Gruppe über in

	E_1	E_2	E_3
$\varrho x_1' =$	x_1	x_2	$\frac{1}{2}(x_1 + ix_2 + ix_3 + ix_4)$
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	$\frac{1}{2}(-ix_1 + x_2 - x_3 - x_4)$
$\varrho x_3' =$	x_4	x_4	$\frac{1}{2}(-ix_1 - x_2 - x_3 + x_4)$
$\varrho x_4' =$	x_2	x_3	$\frac{1}{2}(-ix_1 - x_2 + x_3 - x_4)$

(81)

und durch (79) in folgende reelle Form

	E_1	E_2	E_3
$\varrho x_1' =$	x_1	x_1	$\frac{1}{4}(-x_1 + \sqrt{5}x_2 + \sqrt{5}x_3 + \sqrt{5}x_4)$
$\varrho x_2' =$	x_3	x_2	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4)$
$\varrho x_3' =$	x_4	$-x_3$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4)$
$\varrho x_4' =$	x_2	$-x_4$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4)$

(82)

Dass die Ikosaedergruppen I und II nicht auf einander transformirbar

l, folgt aus dem Umstande dass I eine Ebene ($z_1 = 0$) invariant t, während bei II keine invariante Ebene vorhanden ist.

Um weitere Ikosaedergruppen zu bestimmen, gehen wir jetzt von i Tetraeder II (64) aus. Die erweiternde Collineation $E_3 = (12)(45)$ nen wir sofort in der Form (72) annehmen. Für $E_2 E_3$ erhalten alsdann $D = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Da dies eine reelle Grösse ist, kann sie nur l sein, und durch Multiplication der Coefficienten von E_3 mit ± 1 n man $D = +1$ machen, also

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

ch p-Transformation kann u wiederum reell und positiv gemacht len, somit folgt aus (73) und (83) $u = \frac{1}{2}$. Um endlich t zu bemen, vergleichen wir die ersten Coefficienten in $(E_2 E_3)^2$ und $E_3)^{-1}$, wobei wir berücksichtigen, dass wegen $D = 1$, $E_2 E_3$ vom us Ia ist. Wir erhalten

$$a^2 - u^2 + 2ut = a\sqrt{3}, \quad \text{also} \quad t = 1.$$

rmit ist E_3 eindeutig bestimmt, welches nun in der That, wie man überzeugt, den Periodenbedingungen genügt. Man erhält demnach

Ikosaeder III.

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$
$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{3} z_1 + z_2)$
$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-z_2 + \sqrt{2} z_3)$	$\frac{1}{2}(z_1 - \sqrt{3} z_2)$
$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 + z_3)$	z_4
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4)$	z_3

ch die Transformation (65) erhält man hieraus

	E_1	E_2	E_3
$\varrho x_1' =$	x_1	$-x_2$	$\frac{1}{2}(x_1 - i x_2 - i x_3 - i x_4)$
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	$\frac{1}{2}(i x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$
$\varrho x_3' =$	x_4	$-x_4$	$\frac{1}{2}(i x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$
$\varrho x_4' =$	x_2	x_3	$\frac{1}{2}(i x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$

Dass die Ikosaedergruppo III nicht auf I oder II transformirbar ist, folgt daraus, dass einerseits in den Ikosaedergruppen I und II die Tetraedergruppe I, in der Ikosaedergruppe III dagegen die von I *verschiedene* Tetraedergruppe II enthalten ist, während andererseits alle in der Ikosaedergruppe enthaltenen Tetraedergruppen gleichberechtigt, also in einander transformirbar sind.

Wir gehen endlich von dem Tetraeder III (69) aus. Wir nehmen E_3 in der allgemeinen Form (47) hinzu. Bilden wir $E_1 E_3$, so zeigt sich sofort, dass wegen (46) $E_1 E_3$ nicht vom Typus I b (44) sein kann. Also muss $E_1 E_3$ vom Typus I a sein, und dies ergiebt wegen (45)

$$a = b = c = d = 0, \quad u = t = 0.$$

Wir erhalten also für E_3 die Matrix

$$(86) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & v & w \\ 0 & 0 & r & s \\ \bar{v} & \bar{r} & 0 & 0 \\ \bar{w} & \bar{s} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Bedingungen (49) und (50) lauten jetzt

$$(87) \qquad \begin{aligned} v\bar{v} + w\bar{w} &= 1, \\ r\bar{r} + s\bar{s} &= 1, \quad v\bar{r} + w\bar{s} = 0, \\ v\bar{v} + r\bar{r} &= 1, \quad v\bar{w} + r\bar{s} = 0. \\ w\bar{w} + s\bar{s} &= 1, \end{aligned}$$

Ich behaupte nun, dass man durch lineare Transformation $v = 0$ machen kann. Die anzuwendende Transformation lautet

$$(88) \qquad \begin{aligned} y_1 &= p x_1 + q x_2, \quad y_3 = \bar{p} x_3 - \bar{q} x_4, \\ y_2 &= -\bar{q} x_1 + \bar{p} x_2, \quad y_4 = q x_3 + p x_4, \end{aligned}$$

wo die Coefficienten p und q der Bedingung $p\bar{p} + q\bar{q} = 1$ genügen sollen. Bei dieser Transformation bleibt zunächst die Hermite'sche Normalform ungeändert, E_1 und E_2 (69) gehen in sich selbst über, während E_3 (86) folgende Form annimmt

$$(89) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & v' & w' \\ 0 & 0 & r' & s' \\ \bar{v}' & \bar{r}' & 0 & 0 \\ \bar{w}' & \bar{s}' & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Hierin ist

$$v' = p^2 v + pq(r - w) - q^2 s.$$

Bestimmt man nun das Verhältniss $\frac{p}{q} = \zeta$ aus der Gleichung $v' = 0$, so lässt sich stets der Bedingung

$$p\bar{p} + q\bar{q} = q\bar{q}(1 + \zeta\bar{\zeta}) = 1$$

passende Wahl von q genügen. Lassen wir nun in der trans-
en Form für E_3 (89) die Accente fort, so können wir also $v = 0$
ien. Aus (87) folgt sodann $s = 0$, $w\bar{w} = r\bar{r} = 1$.
ir haben nun noch der Bedingung $(E_2E_3)^3 = 1$ zu genügen.
iebt sich

$$E_2E_3 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \bar{w}\sqrt{2}, & 0, & 0, & w \\ 0, & \bar{r}\sqrt{2}, & r, & 0 \\ 0, & -\bar{r}, & r\sqrt{2}, & 0 \\ -\bar{w}, & 0, & 0, & w\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

ist $D = \sqrt{\frac{2}{3}}(w+\bar{w}+r+\bar{r})$, also reell, also folgt $D = \pm 2$.
Vorzeichenänderung der Coefficienten in E_3 kann $D = 2$ bewirkt
. Also ist

$$w + \bar{w} + r + \bar{r} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

e zur vollständigen Bestimmung von w und r noch fehlende
ıng ergiebt sich am einfachsten durch Vergleichung der Coeffi-
a_{14} in $(E_2E_3)^2$ und $(E_2E_3)^{-1}$. Wegen $D = +2$ ist hierbei
vom Typus IIb (51). Diese Gleichung lautet

$$\frac{1}{3}\sqrt{2}w(w+\bar{w}) = \frac{1}{\sqrt{3}}w,$$

sich in Verbindung mit $w\bar{w} = 1$ ergiebt

$$w = \sqrt{\frac{3}{8}} \pm i\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

0) erhält man $r + \bar{r} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ und hieraus folgt in Verbindung
$= 1$ entweder $r = w$, oder $r = \bar{w}$. Somit können wir für E_3
er nehmen

$$\varrho z_1' = wz_4, \quad \varrho z_2' = \bar{w}z_3, \quad \varrho z_3' = wz_2, \quad \varrho z_4' = \bar{w}z_4,$$

$$\varrho z_1' = wz_4, \quad \varrho z_2' = wz_3, \quad \varrho z_3' = \bar{w}z_2, \quad \varrho z_4' = \bar{w}z_4.$$

Collineationen erfüllen in der That die E_3 auferlegten Periodenungen. Welcher der beiden Werthe von w übrigens in (91)
t wird, ist gleichgültig, da durch die Vertauschung $(z_1z_2)(z_3z_4)$
E_2 ungeändert bleiben, während in (92) und (93) w mit $\bar{w}$
cht wird. Somit erhalten wir folgende zwei Ikosaedergruppen:

Ikosaeder IV.

(94)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$
$\varrho z_1' =$	εz_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4)$	$\nu_1 z_4$
$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_2 + \sqrt{2} z_3)$	$\nu_1 z_3$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 - z_3)$	$\nu_2 z_2$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4)$	$\nu_2 z_1$

Ikosaeder V.

(95)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$
$\varrho z_1' =$	εz_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4)$	$\nu_1 z_4$
$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_2 + \sqrt{2} z_3)$	$\nu_2 z_3$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 - z_3)$	$\nu_1 z_2$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4)$	$\nu_2 z_1$

Hierin ist (für beide Gruppen)

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{3}{8}} + i\sqrt{\frac{5}{8}}, \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{3}{8}} - i\sqrt{\frac{5}{8}}. \tag{96}$$

Durch die Transformation (70) geht für die Ikosaedergruppe IV E_3 über in

$$\varrho x_1' = \tfrac{1}{2}(-x_2 - \mu_2 x_3 - \mu_1 x_4),$$

$$\varrho x_2' = \tfrac{1}{2}(x_1 - \mu_1 x_3 + \mu_2 x_4),$$

$$\varrho x_3' = \tfrac{1}{2}(\mu_2 x_1 + \mu_1 x_2 - x_4),$$

$$\varrho x_4' = \tfrac{1}{2}(\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 + x_3),$$

wo

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}),$$

während für die Ikosaedergruppe V E_3 übergeht in

$$\varrho x_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2v_1x_2+v_1x_3+v_1x_4),$$

$$\varrho x_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2v_2x_1+v_1x_3-v_1x_4),$$

$$\varrho x_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}[-v_2x_1-v_2x_2+(v_1-v_2)x_3-(\ v_1+v_2)x_4],$$

$$\varrho x_4' = \frac{1}{\sqrt{6}}[-v_2x_1+v_2x_2+(v_1+v_2)x_3+(-v_1+v_2)x_4].$$

und E_2 werden dabei übereinstimmend für beide Gruppen in die (71) gegebene Form transformirt. Die transformirte Ikosaedergruppe IV erscheint somit in reeller Form.

Dass die Gruppen IV und V nicht in einander transformirbar sind, kann folgendermassen bewiesen werden. Man bilde für beide Gruppen die Collineation $(E_3E_2E_1) = (12345)$. Für die Diagonalsumme derselben ergiebt sich im Falle der Grupe IV

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(v_1\varepsilon+v_2\varepsilon^2) = -(1+\sqrt{5}) = \tau^2+\tau^3+\tau^2+\tau^3\left(\tau = e^{\frac{2\pi i}{5}}\right),$$

im Falle der Gruppe V dagegen

$$D' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(v_1+v_2)(\varepsilon+\varepsilon^2) = -1 = \tau+\tau^2+\tau^3+\tau^4.$$

Daher sind die beiden Invarianten D und D' wesentlich (d. h. nicht blos um einen Factor ± 1, $\pm i$) von einander verschieden, und da unter der Ikosaedergruppe alle Operationen der Periode 5 unter einander gleichberechtigt sind, so ist lineare Transformation von IV in V unmöglich.

Auf eine der fünf hiermit aufgezählten, von einander verschiedenen, und nicht in einander transformirbaren, Ikosaedergruppen muss sich demnach jede vorliegende, quaternäre Ikosaedergruppe transformiren lassen.

§ 11.

Die quaternären $C_{\frac{1}{2}61}$.

Wir behandeln zunächst die beiden Ikosaeder I (77) und II (80) gleichzeitig. Zu der in beiden aus E_1 und E_2 erzeugten Tetraedergruppe I (59) muss, um die Ikosaeder I und II zur quaternären $C_{\frac{1}{2}61}$ erweitern, eine weitere Collineation X so bestimmt werden, dass nächst

$$X^2 = 1, \quad (E_1X)^2 = 1, \quad (E_2X)^2 = 1.$$

Aber die allgemeinste, den ersten beiden dieser Gleichungen genügende Collineation ist durch die Matrix (72) gegeben. Von dieser

of type I.

Form muss demnach X sein. Bildet man jetzt $E_2 X$, so folgt aus der Bedingung $(E_2 X)^2 = 1$ sofort eindeutig $u = 0$, $t = -a$. Demnach erhalten wir für X folgende Collineation

(98) $X: \varrho z_1' = z_1, \quad \varrho z_2' = -z_2, \quad \varrho z_3' = -z_4, \quad \varrho z_4' = -z_3.$

Setzen wir nun dieses X mit den in den Ikosaedergruppen I und II enthaltenen Collineationen E_3 zusammen, so ergeben sich für $E_3 X$ die resp. Diagonalsummen $D = \frac{5}{2}$ und $D = -\frac{5}{2}$. Also kann $E_1 X$ weder von der Periode 3 noch von der Periode 2 sein. Hieraus folgt:

1) Die Ikosaeder I und II lassen sich nicht zur alternirenden $C_{\frac{1}{2}\,61}$ erweitern;

2) Das Tetraeder I (59) wird durch die Collineation X (98) zur C_{41} (Octaedergruppe) erweitert, und zwar ist X die einzige Collineation vom Typus I (44) welche eine derartige Erweiterung leistet.

3) Die Ikosaeder I und II lassen sich durch keine Collineation vom Typus I zur symmetrischen C_{51} erweitern.

Zur Erweiterung des Ikosaeders III (84) bestimmt sich zunächst $E_4 = X$ wiederum durch die Bedingungen $X^2 = 1$ und $(E_1 X)^2 = 1$ in der Form (72). Aus $(E_2 X)^2 = 1$ ergiebt sich sofort eindeutig $a = 0$, $t = -\bar{u}$. Die allgemeinste den Bedingungen (97) genügende Collineation ist also diese

(99) $X: \varrho z_1' = u z_2, \quad \varrho z_2' = \bar{u} z_1, \quad \varrho z_3' = -\bar{u} z_4, \quad \varrho z_4' = -u z_3, \quad (u\bar{u} = 1).$

Bildet man nun $E_3 X$ so erhält man $D = -\frac{1}{2}(u + \bar{u})$, was als reelle Grösse nur ± 1 sein kann. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann das obere Zeichen gewählt werden, und somit ergiebt sich $u = 1$. Mit diesem Werthe von u ist nun in der That $(E_3 X)^3 = 1$; also erhalten wir folgende $C_{\frac{1}{2}\,61}$

$C_{\frac{1}{2}\,61}$ I.

(100)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$	$E_4 = (12)(56)$
$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{3} z_1 + z_2)$	z_2
$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-z_2 + \sqrt{2} z_3)$	$\frac{1}{2}(z_1 - \sqrt{3} z_2)$	z_1
$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 + z_3)$	z_4	$-z_4$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4)$	z_3	$-z_3$

Die Gruppe geht durch die Transformation (65) in die in (125) durch E_1, E_2, E_3, E_4 gegebene einfache Form über.

Um weiter $C_{\frac{1}{2}6!}$ zu erhalten, behandeln wir zunächst die beiden Ikosaedergruppen IV (94) und V (95) gleichzeitig. Soll X den Bedingungen (97) genügen, wo nunmehr E_1 und E_2 in der Tetraedergruppe III (84) gegeben sind, so folgt zunächst, wie in § 10, dass X von der Form (86) sein muss. Bildet man $E_2 X$, so zeigt sich sofort, dass dies vom Typus Ib (44) sein muss. Also muss w und r rein imaginär, und $s = -\bar{v}$ sein; demnach ergiebt sich

$$101) \qquad X \equiv \begin{vmatrix} 0, & 0, & v, & i\alpha \\ 0, & 0, & i\beta, & -\bar{v} \\ \bar{v}, & -i\beta, & 0, & 0 \\ -i\alpha & -v, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Hierin sind α und β reell, und ausserdem ist

$$102) \qquad (\alpha+\beta)v = 0,$$

$$103) \qquad v\bar{v} + \alpha^2 = v\bar{v} + \beta^2 = 1.$$

Entnehmen wir jetzt E_3 der Ikosaedergruppe IV (94) so ergiebt sich für $E_3 X$ die Diagonalsumme

$$D = i(\alpha+\beta)(v_2 - v_1).$$

Wäre nun $\alpha + \beta \neq 0$, so folgt aus (102) $v = 0$, und aus (103) $\alpha = \beta = \pm 1$, also $D = \pm 2i(v_2 - v_1) = \pm\sqrt{10}$. Mithin kann in diesem Falle die Periode von $E_3 X$ weder 3 noch auch 2 sein. Wäre doch $\alpha + \beta = 0$, so würde $D = 0$ sein, also kann $E_3 X$ sicher nicht die Periode 3 haben. Aber auch die Periode 2 ist unmöglich, denn für diesen Fall müssten die Diagonalterme in $E_3 X$ entweder reell oder imaginär sein. Dies ist nur möglich, wenn $\alpha = \beta = 0$. Alsdann folgt $v \neq 0$, und nun zeigt die Betrachtung der an symmetrischen Plätzen in der Matrix für $E_3 X$ stehenden Terme vv_2 und $-\bar{v}v_2$, welche mit gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen conjugirte Grössen sein sollen, dass die Periode 2 unmöglich ist. Hieraus folgt:

Das Ikosaeder IV (94) *lässt sich nicht zur alternirenden* $C_{\frac{1}{2}6!}$ *erweitern; es lässt sich auch nicht durch eine Collineation vom Typus I* 4) *zur symmetrischen* C_{51} *erweitern.*

Entnehmen wir nun E_3 der Ikosaedergruppe V (95) so ergiebt sich für $E_3 X$

$$D = i(\alpha-\beta)(v_2 - v_1) = (\alpha-\beta)\sqrt{\tfrac{5}{2}}.$$

soll die Periode 3 sein, so folgt $D = \pm 2$, und da wir nach Belieben das Zeichen wählen dürfen, können wir setzen

Nun muss $v \neq 0$ sein, weil sonst die aus (103) folgenden Werthe $\alpha, \beta = \pm 1$ die Gleichung (104) nicht befriedigen können. Also folgt aus (102) $\alpha + \beta = 0$ mithin

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad \beta = -\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Durch die p-Transformation $p_1 = p_4 = p$, $p_2 = p_3 = q$ bleibt die Ikosaedergruppe V ungeändert, während $\frac{p}{q}$ so bestimmt werden kann, dass in X der Coefficient v reell und positiv wird. Dadurch folgt aus (103) $v = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Hiermit ist X bestimmt, und man überzeugt sich, dass nunmehr in der That $E_3 X$ die Periode 3 besitzt. Also kann X als E_4 genommen werden und man erhält somit die folgende Gruppe

$$C_{\frac{1}{2}\,61} \text{ II.}$$

(105)

	$E_1=(123)$	$E_2=(12)(34)$	$E_3=(12)(45)$	$E_4=(12)(56)$
$\varrho z_1' =$	εz_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4)$	$v_1 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3} z_3 + i\sqrt{2} z_4)$
$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_2 + \sqrt{2} z_3)$	$v_2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2} z_3 - \sqrt{3} z_4)$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 - z_3)$	$v_1 z_2$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3} z_1 + i\sqrt{2} z_2)$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4)$	$v_2 z_1$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2} z_1 - \sqrt{3} z_2)$

Obwohl in der hiermit erhaltenen $C_{\frac{1}{2}\,61}$ II die zu Grunde gelegte Collineation E_1 vom Typus II (51), die in der $C_{\frac{1}{2}\,61}$ I (100) zu Grunde gelegte E_1 dagegen vom Typus I (51), und diese beiden Typen nicht in einander transformirbar sind, lässt sich doch beweisen, dass die Gruppe I in II transformirt werden kann. Bildet man nämlich, von E_1, E_2, E_3, E_4 in I (100) ausgehend, die folgenden Collineationen

(106)
$$\begin{aligned} F_1 &= E_1 E_4 E_3 = (123)(456), \\ F_2 &= (E_2 E_1^2 E_2) E_3 (E_2 E_1 E_2) = (14)(25), \\ F_3 &= E_1 E_4 E_1^2 = (13)(56), \\ F_4 &= E_3 = (12)(45), \end{aligned}$$

so überzeugt man sich leicht durch Zuhülfenahme der entsprechenden

Buchstabenvertauschungen, dass diese Collineationen $F_1, \ldots F_4$ den Bedingungen des Moore'schen Theorems B genügen. Andererseits ist aber in F_1, welches von der Periode 3 ist, die Diagonalsumme $D = 2$, folglich F_1 vom Typus II, d. h. auf E_1 in (105) transformirbar. Da man nun, wie soeben bewiesen, nur auf die Gruppe II (105) als einzige $C_{\frac{1}{2}\,61}$ gelangt, wenn man von E_1 (105) ausgeht, so muss die aus F_1, F_2, F_3, F_4 erzeugte Gruppe, d. i. die Gruppe I (100) auf die Gruppe II (105) transformirbar sein.

Jede vorliegende quaternäre $C_{\frac{1}{2}\,61}$ ist daher sowohl auf I (100) *als auch auf II* (105) *transformirbar.*

Was die Litteratur über die quaternäre $C_{\frac{1}{2}\,61}$ anbetrifft, so tritt diese Gruppe auf als Untergruppe in den in § 12 und § 13 behandelten $C_{\frac{1}{2}\,71}$ und C_{61}, sodann aber auch als Untergruppe der Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln*). Sie ist daselbst (l. c. pag. 499 resp. 421) gegeben durch folgende zwei Erzeugenden $S=(123)$ und $T=(23456)$:

$$S \equiv \frac{1+i}{2}\begin{vmatrix} -i & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad T \equiv \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & i & -i \\ 1 & 1 & i & i \\ -1 & 1 & -i & i \\ 1 & 1 & -i & i \end{vmatrix},$$

§ 12.

Die quaternäre $C_{\frac{1}{2}\,71}$. Unmöglichkeit quaternärer $C_{\frac{1}{2}\,81}$.

Wir gehen zunächst von der $C_{\frac{1}{2}\,61}$ I (100) aus. Hier haben wir eine Collineation X zu bestimmen, welche den Bedingungen

(107) $X^2 = 1$, $(E_1 X)^2 = 1$, $(E_2 X)^2 = 1$, $(E_3 X)^2 = 1$, $(E_4 X)^3 = 1$

genügt. Aber die allgemeinste Form, welche X haben muss, wenn es den ersten drei dieser Bedingungen genügen soll, ist bereits in (99) aufgestellt. Soll nun auch $(E_3 X)^2 = 1$ sein, so folgt sofort $u + \bar{u} = 0$, also wegen $u\bar{u} = 1$, $u = i$. Hiermit ist X bereits eindeutig bestimmt. Nehmen wir noch den Factor i in den Proportionalitätsfactor ϱ auf, so ist

(108) $X: \varrho z_1' = z_2, \quad \varrho z_2' = -z_1, \quad \varrho z_3' = z_4, \quad \varrho z_4' = -z_3.$

*) H. Maschke, Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln. Math. Ann. Bd. 30; Nachrichten der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Nr. 14. 1887.

Hiermit genügt X den vier ersten der Bedingungen (107); dagegen ergiebt sich $(E_4 X)^2 = 1$. Demnach lässt sich $C_{\frac{1}{2}\,61}$ I nicht zu einer $C_{\frac{1}{2}\,71}$ erweitern, wohl aber durch Hinzunahme von (108) zu einer symmetrischen C_{61} (vgl. § 13).

Um endlich die $C_{\frac{1}{2}\,61}$ II zu einer $C_{\frac{1}{2}\,71}$ zu erweitern, haben wir wiederum X den Bedingungen (107) gemäss zu bestimmen, wo jetzt die $E_1, \ldots E_4$ den Formeln (105) zu entnehmen sind. Die allgemeinste den ersten drei der Bedingungen (107) genügende Collineation X ist bereits in (101) mit Berücksichtigung von (102) und (103) bestimmt. Bildet man $E_3 X$, so folgt zunächst $\alpha = \beta$ wegen $D = 0$, und ferner $\alpha = 0$, $\beta = 0$, da jeder der Diagonalterme entweder reell oder rein imaginär sein muss. Die Bedingung $(E_3 X)^2 = 1$ ist jetzt erfüllt und wir haben

$$X: \varrho z_1' = v z_3, \quad \varrho z_2' = -\bar{v} z_4, \quad \varrho z_3' = \bar{v} z_1, \quad \varrho z_4' = -v z_2, \qquad (v\bar{v} = 1). \tag{109}$$

Bilden wir nun $E_4 X$ so ergiebt sich $D = 2\sqrt{\frac{3}{5}}(v+\bar{v})$, und da dies reell ist, so folgt $D = \pm 2$. Wählen wir, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann, das obere Zeichen, so folgt

$$v = \sqrt{\frac{5}{12}} \pm i\sqrt{\frac{7}{12}}.$$

Mit diesem Werthe von v verificiren wir, dass in der That $(E_4 X)^3 = 1$ ist. Demnach erhalten wir, indem wir nun $X = E_5$ nehmen, folgende quaternäre

$$C_{\frac{1}{2}\,71}.$$

(110)

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
$\varrho z_1' =$	εz_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4)$	$\nu_1 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3} z_3 + i\sqrt{2} z_4)$	$\varrho_1 z_3$
$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_2 + \sqrt{2} z_3)$	$\nu_2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2} z_3 - \sqrt{3} z_4)$	$-\varrho_2 z_4$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 - z_3)$	$\nu_1 z_2$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3} z_1 + i\sqrt{2} z_2)$	$\varrho_2 z_1$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4)$	$\nu_2 z_1$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2} z_1 - \sqrt{3} z_2)$	$-\varrho_1 z_2$

$E_1 = (123)$, $E_2 = (12)(34)$, $E_3 = (12)(45)$, $E_4 = (12)(56)$, $E_5 = (12)(67)$,

wo $\varrho_1 = \sqrt{\frac{5}{12}} + i\sqrt{\frac{7}{12}}$, $\varrho_2 = \sqrt{\frac{5}{12}} - i\sqrt{\frac{7}{12}}$, und ν_1, ν_2 in (96) ge-

n sind. Ob ϱ_1 oder ϱ_2 für v genommen wird, ist gleichgültig; ı die Transformation $y_1 = -z_3$, $y_2 = -z_4$, $y_3 = z_1$, $y_4 = z_2$ n nämlich E_2, E_3, E_4 in sich über, E_1 in E_1^2, welches indessen E_1 genommen werden kann, während in E_5 ϱ_1 und ϱ_2 mit ıder vertauscht werden.

Herr Klein hat aus der Liniengeometrie die Existenz einer qua- ren $C_{\frac{1}{2}7;}$ gefolgert, und diese Gruppe durch zwei Erzeugende ıd T', worin S eine Collineation, T' dagegen eine dualistische sformation bedeutet, in der Weise definirt, dass verabredet wird, diejenigen Operationen beizubehalten, an denen T' eine gerade hl von Malen betheiligt ist*). In der isomorphen Buchstaben- uschungsgruppe (d. i. bei Klein die Vertauschungsgruppe der ähligen Liniencoordinaten $x_0, x_1, \ldots x_6$) ist $S = (0123456)$ und = (34) (l. c. pag. 519). Berechnet man hieraus, oder besser direct lst der Klein'schen Methode, die Collineation $W = (356)$, welche, man aus den Buchstabenvertauschungen sieht mit S zusammen lternirende $C_{\frac{1}{2}7;}$ erzeugt, so findet man folgende

$C_{\frac{1}{2}7;}$ **)

	S	W
$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{\sqrt{-7}}(\alpha^2 z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$
$\varrho z_2' =$	γz_2	$\frac{1}{\sqrt{-7}}(z_1 - \alpha z_2 - \beta z_3 - \alpha z_4)$
$\varrho z_3' =$	$\gamma^4 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{-7}}(z_1 - \alpha z_2 - \alpha z_3 - \beta z_4)$
$\varrho z_4' =$	$\gamma^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{-7}}(z_1 - \beta z_2 - \alpha z_3 - \alpha z_4)$,

$S = (0123456)$, $W = (356)$,

$\gamma = e^{\frac{2\pi i}{7}}$, $\alpha = \gamma + \gamma^2 + \gamma^4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-7}$,

$\beta = \gamma^6 + \gamma^5 + \gamma^3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-7}$,

*) F. Klein, Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und ten Grades. Math. Annalen, Bd. 28.

**) Diese Formeln wurden von mir dem internationalen Mathematiker- ess zu Chicago, 1893 vorgelegt. Die in meiner Arbeit „The Invariants of up of 2.168 Linear Quaternary Substitutions", Math. Papers read at the at. Math. Congress at Chicago 1893, New York, Macmillan and Co. 1896, , zu Grunde gelegten Substitutionen S, T, Q können, mit geringfügiger lerung der obigen Gruppe entnommen werden, und zwar ist $T = (356)(421)$, 12)(36).

Da es, wie bewiesen, nur eine $C_{\frac{1}{2}7!}$ giebt, so muss die soeben definirte Gruppe auf die Gruppe (110) transformirbar sein.

Um jetzt die vorliegende $C_{\frac{1}{2}7!}$ zu erweitern, müsste zunächst das in (109) gegebene X so bestimmt werden, dass $(E_4 X)^2 = 1$. Hieraus würde folgen $v + \bar{v} = 0$, also $v = i$. Die so erhaltene Collineation X ergiebt aber mit E_5 combinirt eine Collineation $E_5 X$, für welche $D = 2i(\varrho_2 - \varrho_1)$ ist. Demnach kann die Periode von $E_5 X$ weder 3 noch 2 sein. *Die Existenz einer quaternären* $C_{\frac{1}{2}8!}$ *ist somit ausgeschlossen.*

§ 13.

Die quaternären symmetrischen Gruppen.

Nach dem Vorhergehenden ist es nun leicht, die symmetrischen Gruppen herzustellen. Was zunächst die $C_{3!}$ anbetrifft, so haben wir mit E_1 und E_1' (52) je eine Collineation F zu combiniren, so dass $F^2 = 1$, $(E_1 F)^2 = 1$, resp. $(E_1' F)^2 = 1$ wird. Nach den in § 9 über die Collineationen der Periode 2, welche vom Typus II (44) sind, gemachten Bemerkungen, kann man für F hier eine derartige Collineation ansetzen, falls man für E_1 die in (52) so bezeichnete Collineation nimmt. Die so erhaltene Gruppe lässt sich leicht auf folgende Form transformiren.

$C_{3!}$ I

$$(111)\quad \begin{aligned} E_1 &= (123): \varrho z_1' = z_1, \quad \varrho z_2' = z_2, \quad \varrho z_3' = \varepsilon z_3, \quad \varrho z_4' = \varepsilon^2 z_4, \\ F &= (12) : \varrho z_1' = \omega z_1, \quad \varrho z_2' = \omega z_2, \quad \varrho z_3' = \omega z_4, \quad \varrho z_4' = \omega z_3, \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Eine weitere $C_{3!}$ ergiebt sich, wenn man für F die in (72) angegebene Form nimmt. Durch Transformation erhält man

$C_{3!}$ II

$$(112)\quad \begin{aligned} E_1 &= (123): \varrho z_1' = z_1, \quad \varrho z_2' = \quad z_2, \quad \varrho z_3' = \varepsilon z_3, \quad \varrho z_4' = \varepsilon^2 z_4, \\ F &= (12) : \varrho z_1' = z_1, \quad \varrho z_2' = -z_2, \quad \varrho z_3' = \quad z_4, \quad \varrho z_4' = \quad z_3, \end{aligned}$$

Die Collineation E_1' (52) endlich wird in allgemeinster Weise erweitert, wenn man F in der Form (86) ansetzt. Man transformirt leicht auf folgende Form

$C_{3!}$ III

$$(113)\quad \begin{aligned} E_1 &= (123): \varrho z_1' = \varepsilon z_1, \quad \varrho z_2' = \varepsilon z_2, \quad \varrho z_3' = \varepsilon^2 z_3, \quad \varrho z_4' = \varepsilon^2 z_4, \\ F &= (12) : \varrho z_1' = \quad z_4, \quad \varrho z_4' = \quad z_3, \quad \varrho z_3' = \quad z_2, \quad \varrho z_4' = \quad z_1. \end{aligned}$$

Aus den Tetraedergruppen I, II, III ergeben sich nach unserer allgemeinen Methode die Octaedergruppen.

Das Tetraeder I (59) wird, wie in § 11 gezeigt, durch die dort angegebene Collineation (98) und durch keine andere vom Typus I zum Octaeder erweitert. Somit ergiebt sich

Octaeder I

(114)

	$E_1=(123)$	$E_2=(12)(34)$	$F=(12)$
$\varrho z_1' =$	z_1	z_1	z_1
$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{3}(-z_2+2z_3+2z_4)$	$-z_2$
$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{3}(2z_2-z_3+2z_4)$	$-z_4$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{3}(2z_2+2z_3-z_4)$	$-z_3$

.

Diese Gruppe geht durch die Transformation (60) in folgende über

(115)

	E_1	E_2	F
$\varrho x_1' =$	x_1	x_2	$\frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3+x_4)$
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	$\frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3-x_4)$
$\varrho x_3' =$	x_4	x_4	$\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3-x_4)$
$\varrho x_4' =$	x_2	x_3	$\frac{1}{2}(x_1+x_2-x_3+x_4)$

.

Dasselbe Tetraeder kann aber auch vermittelst einer Collineation der Periode 2 vom Typus II erweitert werden. Man findet leicht, dass sich diese Collineation eindeutig bestimmt, und mit der in (111) mit F F bezeichneten identisch ausfällt. Demnach erhält man folgendes

Octaeder II

(116) $E_1=(123),\quad E_2=(12)(34),\quad F=(12),$

wo E_1, E_2 in (114), F in (111) gegeben ist. Durch die Transformation der (60) geht die Gruppe in folgende einfache Form über

	E_1	E_2	F
$\varrho x_1' =$	x_1	x_2	ωx_1
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	ωx_2
$\varrho x_3' =$	x_4	x_4	ωx_4
$\varrho x_4' =$	x_2	x_3	ωx_3

.

Da im Octaeder I keine Collineationen vom Typus II vorhande
lässt sich II nicht auf I transformiren.

Gehen wir nun vom Tetraeder II (64) aus, so ist in § 11
dass die allgemeinste Collineation F von der Periode 2 und vom
welche mit E_1 und E_2 combinirt, die Periode 2 ergiebt, von de
(99) sein muss. Durch geeignete p-Transformation lässt sich
reell und positiv machen, so dass F die in (100) mit E_4 beze
Form annimmt. Wir haben demnach folgendes

Octaeder III

$$(117) \qquad E_1 = (123), \quad E_2 = (12)(34), \quad F = (12) = E_4,$$

wo E_1, E_2, E_4 in (100) resp. (125) gegeben sind.

Eine Erweiterung des Tetraeders II durch eine Collineati
Typus II (44) erweist sich, wie eine leichte Rechnung zeigt,
möglich.

Um endlich das Tetraeder III zum Octaeder zu erweitern
wir mit E_1 und E_2 (69) eine Collineation F zu verbinden, wel
nächst von der Form (86) sein muss. Wie mittelst (88) gezei
sich bewirken, dass E_1 und E_2 ungeändert bleiben, in (86)
$v = 0$ wird. Andererseits muss F in Folge der zur Forme
führenden Erörterungen von der Form (101) sein. Also kön
für F (101) mit $v = 0$ ansetzen. Für die Grössen α und β
sich die zwei Möglichkeiten $\alpha = \beta = 1$, oder $\alpha = 1$, β
Mithin erhalten wir zwei neue Octaeder, nämlich:

Octaeder IV

$$(118) \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & E_1 = (123) & E_2 = (12)(34) & F = (12) \\ \hline \varrho z_1' = & \varepsilon z_1 & \frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4) & z_4 \\ \varrho z_2' = & \varepsilon z_2 & \frac{1}{\sqrt{3}}(z_2 + \sqrt{2} z_3) & -z_3 \\ \varrho z_3' = & \varepsilon^2 z_3 & \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 - z_3) & z_2 \\ \varrho z_4' = & \varepsilon^2 z_4 & \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4) & -z_1 \\ \hline \end{array}.$$

und Octaeder V

$$(119) \qquad E_1 = (123), \quad E_2 = (12)(34), \quad F' = (12),$$

wo E_1 und E_2 in (118) gegeben sind, während für F':

$$\varrho z_1' = z_4, \quad \varrho z_2' = z_3, \quad \varrho z_3' = -z_2, \quad \varrho z_4' = -z_1$$

ımen ist. Dass diese Octaeder wesentlich von einander ver-
ın sind, folgt, wenn man die Diagonalsummen der Collinea-
E_2E_1F und E_2E_1F' bildet, welche der Buchstabenvertauschung
entsprechen. Man erhält im ersten Falle $D = 0$, im zweiten
$-2i\sqrt{2}$.

ɔn der im Tetraeder III enthaltenen Collineation E_1 ist bekannt,
e mit einer Collineation vom Typus II combinirt nicht die Periode 2
n kann. Also lassen sich keine weiteren Octaedergruppen ableiten.
ir kommen nun zu den symmetrischen C_{51}. Wie in § 11 gezeigt,
sich die Ikosaeder I und II durch eine Collineation vom Typus I
zur C_{51} erweitern. Was nun Collineationen vom Typus II an-
, so ist soeben bewiesen worden, dass die einzige derartige
ation, welche das in beiden Ikosaedergruppen enthaltene Tetra-
zum Octaeder erweitert, durch F in (111) gegeben ist. Combinirt
un dieses F mit der im Ikosaeder I enthaltenen Collineation E_3
ɔ zeigt sich sofort, dass E_3F nicht von der Periode 2 ist. Da-
liefert E_3F, wenn man E_3 aus dem Ikosaeder II (80) entnimmt,
riode 2. Somit ergiebt sich folgende

C_{51} I

$$E_1 = (123), \quad E_2 = (12)(34), \quad E_3 = (12)(45), \quad F = (12),$$

, E_2, E_3 aus (80), F aus (111) zu entnehmen ist. Durch die
ɔrmation (60) erhält man die Gruppe in folgender Form

	E_1	E_2	E_3	F
$\varrho x_1' =$	x_1	x_2	$\frac{1}{2}(x_1+ix_2+ix_3+ix_4)$	ωx_1
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	$\frac{1}{2}(-ix_1+x_2-x_3-x_4)$	ωx_2
$\sigma x_3' =$	x_4	x_4	$\frac{1}{2}(-ix_1-x_2-x_3+x_4)$	ωx_4
$\sigma x_4' =$	x_2	x_3	$\frac{1}{2}(-ix_1-x_2+x_3-x_4)$	ωx_3

.

ɜ die Tetraeder II und III, wie bereits gezeigt, durch eine Colli-
ɪ vom Typus II nicht erweitert werden können, so kommen für
weiterung der Ikosaeder III, IV, V nur Collineationen vom
I in Betracht.

ie Erweiterung des Ikosaeders III führt eindeutig, wie im Anfang
12 bewiesen, zur Collineation (108). Wir haben demnach

C_{51} II

(122) $E_1 = (123)$, $E_2 = (12)(34)$, $E_3 = (12)(45)$, $F = (12)$,

wo E_1, E_2, E_3 aus (84), F aus (108) zu entnehmen sind.

In § 11 ist bewiesen worden, dass das Ikosaeder IV durch Hinzunahme einer Collineation vom Typus I nicht zur C_{51} erweitert werden kann.

Was endlich die Erweiterung des Ikosaeders V anbetrifft, so ist in § 12 gezeigt, dass die allgemeinste Collineation der Periode 2 welche mit E_1, E_2, E_3 (95) combinirt wiederum die Periode 2 ergiebt, von der Form (109) sein muss. Hier lässt sich durch p-Transformation noch $v = 1$ machen, und man erhält folgende

C_{51} III

(123) $E_1 = (123)$, $E_2 = (12)(34)$, $E_3 = (12)(45)$, $F = (12)$,

wo E_1, E_2, E_3 aus (95) und F aus (118) zu entnehmen sind.

Wir kommen endlich zu den symmetrischen C_{61}. Wie im Anfange von § 12 gezeigt wurde, lässt sich die $C_{\frac{1}{2}61}$ I eindeutig durch Hinzunahme von (108) zur C_{61} erweitern. Wir erhalten demnach folgende:

C_{61} I

	$E_1=(123)$	$E_2=(12)(34)$	$E_3=(12)(45)$	$E_4=(12)(56)$	$F=(12$
$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1+\sqrt{2}z_4)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{3}z_1+z_2)$	z_2	z_3
(124) $\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-z_2+\sqrt{2}z_3)$	$\frac{1}{2}(z_1-\sqrt{3}z_2)$	z_1	$-z_4$
$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}z_2+z_3)$	z_4	$-z_4$	z_2
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}z_1-z_4)$	z_3	$-z_3$	$-z_1$

Diese Gruppe geht durch die Tranformation (65) in folgende Form über

	E_1	E_2	E_3	E_4	F
$\varrho x_1' =$	x_1	$-x_2$	$\frac{1}{2}(x_1-ix_2-ix_3-ix_4)$	$-x_1$	$\frac{1}{\sqrt{-3}}(x_2+x_3+x_4)$
(125) $\varrho x_2' =$	x_3	x_1	$\frac{1}{2}(ix_1+x_2-x_3-x_4)$	x_2	$\frac{1}{\sqrt{-3}}(x_1+x_3-x_4)$
$\varrho x_3' =$	x_4	$-x_4$	$\frac{1}{2}(ix_1-x_2-x_3+x_4)$	x_4	$\frac{1}{\sqrt{-3}}(x_1+x_2-x_3)$
$\varrho x_4' =$	x_2	x_3	$\frac{1}{2}(ix_1-x_2+x_3-x_4)$	x_3	$\frac{1}{\sqrt{-3}}(x_1-x_2+x_4)$

Auch die $C_{\frac{1}{2}\,61}$ II (105) lässt sich auf eine C_{61} erweitern, und zwar wiederum nur auf eine Weise. Bestimmt man zu dem Zwecke in der für X in (109) gegebenen Form v so, dass $E_4 X$ die Periode 2 liefert, so erhält man $v + \bar{v} = 0$, also $v = i$. Indem wir dann noch den Factor i in den Proportionalitätsfactor ϱ mit aufnehmen, ergiebt sich für X, das wir nunmehr für F nehmen können

(126) $F: \varrho z_1' = z_3, \quad \varrho z_2' = z_4, \quad \varrho z_3' = -z_1, \quad \varrho z_4' = -z_2,$

und somit erhalten wir

$$C_{61} \text{ II}$$

(127) $E_1 = (123), E_2 = (12)(34), E_3 = (12)(45), E_4 = (12)(56), F = (12)$

wo E_1, E_2, E_3, E_4 in (105), F in (126) gegeben ist.

Die so erhaltene C_{61} II bildet indessen keine neue Gruppe, sondern lässt sich aus der C_{61} I (124) durch Transformation erhalten. Der Beweis hierfür kann analog wieder für die Transformirbarkeit der $C_{\frac{1}{2}\,61}$ I in die $C_{\frac{1}{2}\,61}$ II geführt werden, wenn man zu den Relationen (106) noch hinzunimmt

$$G = (15)(24)(36).$$

Dieses G liefert in der That mit F_1, F_2, F_3, F_4 combinirt je die Periode 2, und spielt also in Bezug auf $F_1, \ldots F_4$ dieselbe Rolle, wie F in Bezug auf E_1, E_2, E_3, E_4.

Herr Klein hat in der bereits genannten Arbeit über Gleichungen sechsten und siebenten Grades auch eine quaternäre C_{61} aufgestellt, und zwar in vollständiger Form*). Die Klein'sche Gruppe muss sich demnach auf jede der beiden Gruppen C_{61} I und C_{61} II transformiren lassen.

Weitere symmetrische quaternäre Collineationsgruppen können nicht existiren. In der That ist eine Erweiterung der $C_{\frac{1}{2}\,71}$ auf C_{71} nach den Schlussbemerkungen des § 12 unmöglich.

§ 14.

Resultate für quaternäre Gruppen.

Das Resultat der vorausgegangenen Untersuchung über quaternäre Gruppen lässt sich demnach in folgendem Satz zusammenfassen:

Jede quaternäre Collineationsgruppe $C_{\frac{1}{2}\,k1}$, C_{k1}, *welche einer alternirenden oder symmetrischen Buchstabenvertauschungsgruppe von* k *Buchstaben* ($k > 2$) *holoedrisch isomorph ist, lässt sich auf eine der folgenden Collineationsgruppen linear transformiren:*

*) l. c. pag. 519, Formel (40) und (41).

Drei $C_{\frac{1}{2}\,81}$ durch ihre Erzeugenden definirt in (52),

Drei $C_{\frac{1}{2}\,41}$ (Tetraeder) „ „ „ „ „ (59), (64), (69),

Fünf $C_{\frac{1}{2}\,51}$ (Ikosaeder) „ „ „ „ „ (77), (80), (84), (94), (95),

Eine $C_{\frac{1}{2}\,61}$ „ „ „ „ „ (100) oder (105),

Eine $C_{\frac{1}{2}\,71}$ „ „ „ „ „ (110),

Drei C_{31} „ „ „ „ „ (111), (112), (113),

Fünf C_{41} (Oktaeder) „ „ „ „ „ (114), (116), (117), (118),

Drei C_{51} „ „ „ „ „ (120), (122), (123),

Eine C_{61} „ „ „ „ „ (124) oder (127).

Die 25 hier aufgezählten quaternären Collineationsgruppen sind sämmtlich von einander wesentlich verschieden, d. h. es lassen sich keine zwei von ihnen in einander linear transformiren.

University of Chicago, November 1897.

Über Darstellung von reellen Functionen mit unendlich dicht liegenden Nullstellen durch unendliche Producte, deren Factoren ganze analytische Functionen sind.

Von

T. Brodén in Lund.

In Bezug auf eindeutige reelle Functionen mit überalldichten Nullstellen ist es eine nahe liegende Frage, ob und wie solche Functionen durch unendliche Producte mit ganzen Factoren in der Art darstellbar seien, dass für jede Stelle x_i, welche zu einer gegebenen überalldichten und abzählbaren x-Menge M gehört, wenigstens ein Factor und somit das ganze Product verschwindet.

Jede solche Darstellungsweise würde als ein Seitenstück zu den bekannten Methoden für Singularitätencondensation von Hankel und Cantor betrachtet werden können. Ihrer Natur nach sind diese Methoden wenigstens nicht unmittelbar für Condensation von Nullstellen anwendbar — über eine mögliche indirecte Anwendung siehe unten § 5.

Im Folgenden werden gewisse besonders einfach gebildete Producte der erwähnten Art aufgestellt, und die entsprechenden Functionenverhältnisse untersucht. Es gilt bei diesen Producten, dass für jede x-Stelle *alle* Factoren u_n von einem gewissen n an verschwinden. Aber es mag hervorgehoben werden, dass man ohne grössere Schwierigkeit (durch veränderte Bestimmung der mit K_n bezeichneten Grössen) die Sache so modificiren kann, dass jeder Werth x_i nur *einen* Factor zum Verschwinden bringt. Die Functionenverhältnisse ändern sich dabei im wesentlichen nicht, aber die Untersuchung derselben wird einiger einfach.

Die im § 3 betrachteten Functionen sind „punktirt unstetig" mit einer *abzählbaren* Menge von Unstetigkeitsstellen. Der Verfasser hat früher (s. unten § 5) gezeigt, dass alle solche Functionen (falls sie eindeutig und endlich sind, was hier der Fall ist) als Grenzfälle für *ganze rationale* Ausdrücke aufgefasst werden können. Aus der gegenwärtigen Untersuchung folgt, dass es auch punktirt unstetige Func-

tionen mit *nicht-abzählbaren* Unstetigkeiten giebt, für welche dasselbe gilt (und zwar Functionen, welche in jedem Intervalle Zeichenänderungen aufweisen). Denn die Functionen im § 4 haben nicht-abzählbare Unstetigkeiten, und andererseits folgt aus der gegenwärtigen Productdarstellung die Möglichkeit von Annäherung durch ganze rationale Functionen (vergl. § 5).

Es sei übrigens bemerkt, dass unsere jetzige Frage in nahem Zusammenhange steht mit der Frage nach Darstellung von *stetigen und derivirbaren Functionen mit Maxima und Minima in jedem Intervalle:* wenn eine solche Function im strengsten Sinne derivirbar sein soll, so muss die *Derivirte* — wie die jetzigen Functionen $f(x)$ — überall bestimmt und endlich sein und in jedem Intervalle Nullstellen haben (sowie auch in jedem Intervalle das Vorzeichen ändern). Vgl. übrigens § 4. — Dass derartige unendlich oft oscillirende Functionen existiren, ist durch Beispiele dargethan worden (s. Köpcke, Math. Ann. XXXIV), aber eine systematische Theorie für dieselben ist noch nicht dargestellt.

Die folgende Darstellung wird durch einige einfache Hülfssätze über irrationale Zahlen eingeleitet. Es sei bemerkt, dass diese Sätze sich verallgemeinern lassen, indem man die Annahme aufhebt, dass die Grössen k_n ganze Zahlen sein sollen (vgl. oben), sowie auch dass man gewisse verwandte Sätze aufstellen kann*).

In Bezug auf die Terminologie sei folgendes festgestellt:

Die Stellen, an denen eine Function $f(x)$ nicht verschwindet, mögen kurz *Nicht-Nullstellen* heissen.

Wenn eine unendliche Menge von x-Werthen nicht nur überalldicht und nicht-abzählbar ist, sondern überdies die Eigenschaft hat, dass sogar jedem beliebig kleinen Intervalle ein nicht-abzählbarer Theil der Menge zukommt, so heisse die Menge kurz *überall nicht-abzählbar.*

§ 1.

Hülfssätze über Vielfache von irrationalen Zahlen.

Wenn eine reelle, positive oder negative aber nicht ganze Zahl zwischen den ganzen Zahlen N und $N+1$ liegt, setze man

$$x - N = \alpha(x), \quad N + 1 - x = \beta(x) \tag{1}$$

*) Einen solchen Satz findet man als Hülfssatz in einer bekannten Arbeit von Cantor, über trigonometrische Reihen (Math. Ann. IV, p. 139; Acta Math. II, p. 329).

d bezeichne mit $R(x)$ die kleinste der beiden positiven Grössen $\alpha(x)$ d $\beta(x)$, wenn sie verschieden sind; für $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ sei auch $R = \frac{1}{2}$*).

Es sei ferner

$$k_1, k_2, k_3, \ldots k_n, \ldots$$

e unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen, welche je ≥ 2 sind. r können dann folgende Sätze ausgesprochen:

Satz 1. *Wenn für die Zahlen k_n keine endliche obere Grenze stirt, so giebt es eine überall nicht-abzählbare Menge von irrationalen Werthen, für welche*

$$\lim_{n=\infty} R\left\{x \cdot \prod_{i=1}^{n} k_i\right\} = 0$$

. *Wenn aber die k_n unter einer endlichen Grenze bleiben, lässt sich* : *Bedingung* (3) *nicht erfüllen* (obgleich es selbstverständlich für ewisse rationale x gilt, dass von einem gewissen n an $x \cdot \prod_{i=1}^{n} k_i$ eine anze Zahl wird).

Beweis. Wenn A eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so ist fenbar immer

$$R(A.x) = R\{A.\alpha(x)\},$$

wie auch

$$\alpha(A.x) = \alpha\{A.\alpha(x)\}, \quad \beta(A.x) = \beta\{A.\alpha(x)\}.$$

im Beweise des fraglichen Satzes ist es also hinreichend, das x-Inter- ll $0 \ldots 1$ zu betrachten, wo $x = \alpha(x)$ ist.

In diesem Intervalle lässt sich jede irrationale Zahl, ganz unab- ngig von der näheren Beschaffenheit der Reihe (2), in der Form

$$x = \frac{\varepsilon_1}{k_1} + \frac{\varepsilon_2}{k_1 k_2} + \frac{\varepsilon_3}{k_1 k_2 k_3} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{k_1 k_2 \ldots k_n} + \cdots \text{ in inf.}$$

rstellen, wo ε_n immer gleich einer ganzen positiven Zahl $< k_n$ oder eich Null ist (aber nicht alle $\varepsilon_n = 0$ von einem gewissen n an). ngekehrt giebt jede Reihe der Form (6), mit solchen ε-Werthen, ie Zahl > 0 und ≤ 1, welche doch unter Umständen auch rational n kann. Es dürfte überflüssig sein, den leicht gefundenen Beweis erfür näher durchzuführen.

Andererseits lässt sich jede Reihe (6) auch in der Form

$$x = 1 - \frac{\eta_1}{k_1} - \frac{\eta_2}{k_1 k_2} - \frac{\eta_3}{k_1 k_2 k_3} - \cdots - \frac{\eta_n}{k_1 k_2 \ldots k_n} - \cdots \text{ in inf.}$$

*) Es ist also $R(x)$ gleich dem *numerischen* Werthe der Riemann'schen össe (x), mit der Ausnahme, dass für $\alpha(x) = \beta(x) = \frac{1}{2}$ auch $R(x) = \frac{1}{2}$ ist, hrend $(x) = 0$.

schreiben, wo $\eta_n = k_n - 1 - \varepsilon_n$. Wenn von einem gewissen n an alle $\varepsilon_n = k_n - 1$ sind, werden alle $\eta_n = 0$, und somit x rational. Und $\varepsilon_n = 0$ giebt $\eta_n = k_n - 1$. Für irrationale x müssen offenbar die η ganz dieselben Bedingungen erfüllen, wie die ε.

Man setze

$$(8)\quad \begin{cases} k_1 \cdot k_2 \cdots k_n = K_n, \\ \alpha(K_n x) = \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{k_{n+1}} + \dfrac{\varepsilon_{n+2}}{k_{n+1}k_{n+2}} + \dfrac{\varepsilon_{n+3}}{k_{n+1}k_{n+2}k_{n+3}} + \cdots = \alpha_n, \\ \beta(K_n x) = \dfrac{\eta_{n+1}}{k_{n+1}} + \dfrac{\eta_{n+2}}{k_{n+1}k_{n+2}} + \dfrac{\eta_{n+3}}{k_{n+1}k_{n+2}k_{n+3}} + \cdots = \beta_n. \end{cases}$$

Es ist

$$(9)\qquad \alpha_n > \frac{\varepsilon_{n+1}}{k_{n+1}}, \qquad \beta_n > \frac{\eta_{n+1}}{k_{n+1}},$$

und hieraus folgt, bei Berücksichtigung der Relationen $\alpha_n + \beta_n = 1$ und $\varepsilon_n + \eta_n = k_n - 1$,

$$(10)\qquad \alpha_n < \frac{1+\varepsilon_{n+1}}{k_{n+1}}, \qquad \beta_n < \frac{1+\eta_{n+1}}{k_{n+1}}.$$

Wir nehmen nun zuerst an, dass

1) $\lim k_n = \infty$ ist. Wenn man dann die Stelle x so wählt, dass die Zahlen ε_n unter einer endlichen Grenze bleiben, so wird nach (10) $\lim \alpha_n = 0$; folglich ist die Bedingung (3) erfüllt (und selbstverständlich ist jeder x-Werth der fraglichen Art irrational, da es für rationale x gilt, dass α_n entweder für alle n eine von Null verschiedene untere Grenze hat, oder von einem gewissen n an wegfällt, indem $K_n x$ eine ganze Zahl wird). Und die Menge aller solcher x-Werthe ist in der That überall nicht-abzählbar. Es sei nämlich $a \ldots b$ eine beliebige Theilstrecke, und s eine Stelle zwischen a und b, welche einer gewissen unendlichen Reihe der Form (6) entspricht. Für hinreichend grosses n ist die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe gleich einer gewissen rationalen Zahl zwischen a und s. Man wähle einen solchen n-Werth, und r sei die entsprechende rationale Zahl. Wenn man nachher die Reihe, welche s entspricht, in der Art modificirt, dass $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ unverändert bleiben, aber das System

$$\varepsilon_{n+i} \ (i = 1, 2, \ldots \infty)$$

sich so ändert, dass kein Glied vergrössert, aber eine endliche oder unendliche Menge vermindert wird, so giebt die Reihe (6) statt s eine neue Zahl x, welche nothwendig zwischen r und s liegt. Und wenn man die fernere Bestimmung einführt, dass die neuen ε unterhalb einer endlichen Grenze bleiben sollen (was selbstverständlich immer eintrifft, wenn es schon für die ursprünglichen in der s-Reihe ein-

lenden ε gilt), so ist x eine Zahl mit der Eigenschaft $\lim \alpha_n = 0$. er die in der angegebenen Weise bestimmten Modificationen der eihe bilden in ihrer Gesammtheit eine nicht-abzählbare Menge von glichkeiten: eine solche Menge wird in der That schon erhalten, ın man nur diejenigen Fälle berücksichtigt, bei denen in der x-Reihe ıe anderen Werthe von ε_{n+i} als Nullen und Einsen vorkommen; von r möglichen ε_{n+i}-Reihe dieser Art ausgehend, erhält man andere, n man die Nullen unberührt lässt, aber die Einsen nach irgend cher Regel theilweise durch Nullen ersetzt (nur so dass die Einsen der Reihe niemals ganz aufhören); die Mächtigkeit der hiermit ebenen Menge von Möglichkeiten ist dieselbe wie diejenige der ammtheit aller Reihen, deren Glieder Nullen oder Einsen sind, mit z beliebiger Vertheilung (nur mit der soeben erwähnten Beschränkung), diese Mächtigkeit ist bekanntlich nicht die erste. Hiermit ist also riesen, dass in jedem Intervalle eine nicht-abzählbare Menge von Verthen vorkommt, welche die Bedingung (3) erfüllen.

Wir sind zu diesem Schlusse gekommen, in dem wir zeigten, dass x, in deren entsprechender Reihe (6) die Grössen ε unter einer lichen Grenze bleiben, der Gleichung (3) genügen und andererseits überall nicht-abzählbare Menge bilden. Es war hierbei nicht nöthig untersuchen, ob es auch andere x als diese mit derselben Eigenaft gäbe. Dies wird eine fernere Frage. Und es ist leicht zu en, dass sie zu bejahen ist. Erstens wird nach (10) $\lim \beta_n = 0$, t $\lim \alpha_n = 0$, wenn die Zahlen $\eta_n = k_n - \varepsilon_n - 1$ unter einer enden Grenze bleiben, und dies findet aus ganz ähnlichem Grunde, oben, in jedem Intervalle für eine nicht-abzählbare x-Menge statt. ıitens kann $\lim \alpha_n$ bez. $\lim \beta_n$ gleich Null werden, ohne dass ε_n η_n eine endliche obere Grenze hat. Es ist hinreichend — sowie Anbetracht der Ungleichheiten (9) auch nothwendig — dass der tient $\varepsilon_n : k_n$ bez. $\eta_n : k_n$ den bestimmten Grenzwerth Null hat. ttens liegt auch die Möglichkeit vor, dass (3) erfüllt ist, ohne $\lim \alpha_n$ oder $\lim \beta_n$ den bestimmten Werth Null hat, indem α_n β_n beim unendlichen Zuwachs von n abwechselnd unendlich klein den. Nach (9) und (10) tritt dies Verhältniss ein, wenn $\varepsilon_n : k$ (und olge der Relation $\eta_n = k_n - \varepsilon_n - 1$ also auch $\eta_n : k_n$) für unendlich sse n abwechselnd unendlich klein und unendlich wenig von 1 schieden ist.

2) Wenn k_n nur für *gewisse* unendliche n unendlich gross wird, r für andere unter einer endlichen Grenze bleibt, so gestaltet sich Beweisführung auf ähnliche Weise, wenn auch nicht ganz so ein-ı. Da dieser Fall für das Folgende keine besondere Bedeutung hat, en wir den vollständigen Beweis aus.

3) Wenn k_n unter einer endlichen Grenze bleibt, $k_n \leq M - 1$, so

folgt aus (9), dass $\alpha_n > \frac{1}{M}$ bezw. $\beta_n > \frac{1}{M}$ ist, wenn $\varepsilon_{n+1} > 0$, bez. $\eta_{n+1} > 0$ ist. Zufolge der Relation $\eta_n + \varepsilon_n = k_n - 1$ ist aber immer entweder $\varepsilon_{n+1} > 0$ oder $\eta_{n+1} > 0$, und somit immer $\alpha_n > \frac{1}{M}$ oder $\beta_n > \frac{1}{M}$, weshalb die Bedingung (3) sich nicht erfüllen lässt.

Satz 2. *Im Falle* $\lim k_n = \infty$ *giebt es eine überall nicht-abzählbare x-Menge mit der Eigenschaft, dass von einem gewissen n an*

$$R(x \,.\, K_n) < \frac{c}{k_{n+1}} \tag{11}$$

ist, wo c eine beliebige positive Constante $\geqq 2$ *bedeutet.*

Beweis. Aus dem Beweise des ersten Theiles des vorigen Satzes geht unmittelbar hervor, dass in jedem Intervalle eine nicht-abzählbare Menge von x-Werthen vorkommt, für welche von einem gewissen n an entweder $\varepsilon_{n+1} \leqq c - 1$ oder $\eta_{n+1} \leqq c - 1$ ist, d. h. nach (10) entweder $\alpha_n < \frac{c}{k_{n+1}}$ oder $\beta_n < \frac{c}{k_{n+1}}$. — Dasselbe gilt übrigens offenbar auch, wenn die Zahlen k_n eine endliche obere Grenze haben, aber es ist in diesem Falle von keiner Bedeutung für das folgende.

Satz 3. *Es giebt immer eine überall nicht-abzählbare Menge von x-Werthen, für welche die Gleichung* (3) *nicht gilt.*

Beweis. Bei endlich-bleibenden k_n ist der Satz richtig, da überhaupt keine irrationalen x-Werthe der Bedingung (3) genügen. Für $\lim k_n = \infty$ sieht man ganz wie beim Beweise des ersten Satzes ein, dass in jedem Intervalle eine nicht-abzählbare x-Menge sich bestimmen lässt, für welche (3) nicht gilt, nämlich solche, bei deren ε-Reihe wenigstens für gewisse unendlich grosse n der Quotient $\varepsilon_n : k_n$ weder unendlich nahe an Null noch unendlich nahe an 1 kommt.

Satz 4. Die consecutiven ganzen Zahlen, zwischen denen $K_n x$ liegt, seien A_n und $A_n + 1 = B_n$. Dann gilt folgendes:

Wenn wenigstens von einem gewissen n an

$$k_n \equiv 1 \pmod{p} \tag{12}$$

ist, so giebt es eine überall nicht-abzählbare x-Menge, für welche von einem gewissen (für verschiedene x verschiedenen) *n an*

$$A_n \equiv 1 \pmod{p}, \quad \alpha_n < \frac{c}{k_{n+1}}, \tag{13}$$

und eine andere derartige Menge, bei welcher von einem gewissen n an

$$B_n \equiv 1 \pmod{p}, \quad \beta_n < \frac{c}{k_{n+1}} \tag{14}$$

ist, wo c eine beliebige positive Grösse $\geqq p + 2$ *bedeutet.*

Beweis. Ein jeder irrationaler x-Werth lässt sich in der Form $N +$ eine Reihe der Form (6) darstellen (N ganz, $\gtreqless 0$). Man nehme eine beliebige ganze positive Zahl m, nur so gross, dass (12) gültig ist, sobald $n \geqq m$. Den Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{m-1}$ gebe man bestimmte aber beliebige Werthe (nur unter den für die ε geltenden Beschränkungen). Dann ist

$$k_m A_{m-1} \equiv \varrho \pmod{p},$$

wo ϱ eine bestimmte ganze Zahl > 0 aber $\leqq p$ bedeutet. Nachher setze man $\varepsilon_m = p + 1 - \varrho$ ($< k_m$, da $k_m \equiv 1$ und > 1). Dann wird

$$A_m = k_m A_{m-1} + \varepsilon_m \equiv 1 \pmod{p}.$$

Wenn man ferner für alle $n > m$ die ε_n so wählt, dass $\varepsilon_n \equiv 0 \pmod{p}$, $< c - 1$ [was zufolge der Annahme $c \geqq p + 2$ möglich ist, ohne dass man immer $\varepsilon_n = 0$ setzen muss], so werden die Bedingungen (13) für $n \geq m$ erfüllt. Wenn nämlich die Congruenz $A_n \equiv 1 \pmod{p}$ für einen gewissen n-Werth stattfindet, so gilt sie auch für $n + 1$, da $A_{n+1} = k_{n+1} A_n + \varepsilon_{n+1}$ ist, $\varepsilon_{n+1} \equiv 0 \pmod{p}$, und $k_{n+1} \cdot A_n \equiv 1$, weil $A_n \equiv 1$, $k_{n+1} \equiv 1$; aber nach (15) gilt die fragliche Congruenz für $n = m$; sie gilt also auch immer für $n > m$. Ferner folgt die Ungleichheit in (13), in Betracht von (10), aus der Annahme $\varepsilon_n < c - 1$.

Wir sehen also, dass es überhaupt Stellen mit der Eigenschaft (13) giebt; dass dieselben eine überall nicht-abzählbare Menge bilden, lässt sich auf analoge Weise wie oben in ähnlichen Fällen zeigen.

Dasselbe ergiebt sich in ganz derselben Weise in Bezug auf die Bedingungen (14).

§ 2.

Die Function xe^{x-1}.

Für das folgende ist die Function

$$\varphi(x) = x e^{x-1} \tag{17}$$

von wesentlicher Bedeutung, weshalb wir einige einfache Bemerkungen über dieselbe voraussenden.

Es ist

$$\varphi(x) \gtreqless 0 \text{ für } x \gtreqless 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1. \tag{18}$$

Ferner hat man

$$\varphi'(x) = (x+1)e^{x-1}, \tag{19}$$

und somit eine Minimumstelle für $x = -1$, mit

$$\varphi(-1) = -\frac{1}{e^2}. \tag{20}$$

Von $x = -1$ aus nimmt die Function nach beiden Seiten unaufhörlich

zu, woraus, da $\varphi(-\infty) = 0$ ist, folgt, dass $\varphi(x)$ einen beliebigen positiven Werth nur einmal annimmt — namentlich den Werth $+1$ nur für $x = 1$.

Es ist also,

$$\text{für } x < 0, \quad |\varphi(x)| \leqq \frac{1}{e^2} < 1. \tag{21}$$

Weiterhin nehme man eine beliebige Reihe von x-Werthen

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots,$$

wo für alle n $|x_n| \leq 1$ ist, und betrachte das unendliche Product

$$\prod_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n). \tag{22}$$

Wenn irgend ein $x_n = 0$ ist, und demzufolge auch $\varphi(x_n) = 0$, so verschwindet selbstverständlich das ganze Product. Dasselbe trifft ein, sobald die Grössen x_n unterhalb einer Grenze bleiben, welche < 1 ist:

$$\prod_{1}^{\infty} \varphi(x_n) = 0 \quad \text{für} \quad x_n < g < 1. \tag{23}$$

Denn es bleibt dann immer auch $|\varphi(x_n)| < g_1 < 1$, wo $g_1 = \varphi(g)$, wenn $\varphi(g) > \frac{1}{e^2}$, andernfalls $g_1 = \frac{1}{e^2} + \delta$ (δ bel. kl. pos. Grösse). Das Verschwinden des Productes findet in der That noch statt, wenn $\lim x_n$ unbestimmt ist mit 1 als oberer Unbestimmtheitsgrenze. Zufolge dieser Unbestimmtheit kann man nämlich aus (22) eine unendliche Menge von Factoren herausgreifen, welche numerisch unterhalb einer Grenze < 1 bleiben, und daher ein verschwindendes Product geben; und das Product der übrigen Factoren muss nach der Annahme $|x_n| \leq 1$, woraus $|\varphi(x_n)| < 1$ folgt, zwischen endlichen Grenzen bleiben, weshalb das ganze Product (22) verschwindet. Es bleibt übrig, den Fall

$$\lim x_n = 1$$

zu untersuchen. Man setze

$$x_n = 1 - \delta_n$$

und somit

$$\varphi(x_n) = (1-\delta_n)e^{-\delta_n} = 1 - \frac{2}{1}\delta_n + \frac{3}{\underline{|2}}\delta_n^2 - \frac{4}{\underline{|3}}\delta_n^3 + \cdots = 1 - \Delta_n, \tag{24}$$

wo offenbar $\lim \Delta_n = 0$ ist. Bekanntlich convergirt dann das Product (22) gegen Null oder gegen einen bestimmten von Null verschiedenen Werth (vorausgesetzt dass kein einzelnes $\varphi(x_n)$ d. h. x_n verschwindet) je nachdem die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \Delta_n \tag{25}$$

ergirt oder convergirt. Für hinreichend grosse n ist (abgesehen
1 Falle $\delta_n = \Delta_n = 0$)

$$2\delta_n - \tfrac{3}{2}\delta_n^2 < \Delta_n < 2\delta_n.$$

Hieraus folgt, dass (25) convergirt, sobald

$$\sum \delta_n$$

rergirt, und divergirt, sobald

$$\sum \delta_n \left(1 - \tfrac{3}{4}\delta_n\right)$$

rgent ist. Aber die Reihen (27) und (28) convergiren oder divergiren
ıer gleichzeitig, denn es ist für hinreichend grosse n

$$\tfrac{1}{4}\delta_n < \delta_n\left(1 - \tfrac{3}{4}\delta_n\right) < \delta_n.$$

convergirt oder divergirt somit auch die Reihe (25) immer mit (27);
l dem zufolge ist das Product (22) gleich Null oder hat einen be-
ımten endlichen von Null verschiedenen Werth, je nachdem die
ihe (27) divergirt oder convergirt.

Für $\lim x_n = 1$ verhält sich also das Product (22) immer wie
s Product $\prod x_n$.

§ 3.

**jedem Intervalle verschwindende Functionen deren Nicht-Nullstellen
ine abzählbare, überalldichte Menge bilden, und welche in jedem
Intervalle abwechselnde Vorzeichen haben.**

1. Man nehme eine beliebige unendliche Reihe ganzer, positiver, *gerader* Zahlen ≥ 3

$$k_1, k_2, k_3, \ldots k_n \ldots$$

d man setze, wie oben, $k_1 \cdot k_2 \ldots k_n = K_n$, $K_0 = 1$. Die in der
ıleitung erwähnte abzählbare Menge M von gegebenen Nullstellen sei

$$M \equiv \left\{\frac{2m-1}{4K_n}\right\} \qquad \begin{matrix} n = 0, 1, 2 \cdots i \cdots \\ m = \cdots -i \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots i \cdots. \end{matrix}$$

Man bilde den Ausdruck

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi(\cos 2\pi K_n x) = \prod_{1}^{\infty} u_n(x), \quad [\varphi(t) = te^{t-1}].$$

Für jede M-Stelle ist $f(x) = 0$, da offenbar von einem gewissen an alle Factoren $u_n(x)$ verschwinden. Wir werden das Verhalten

von $f(x)$ für andere x untersuchen, zunächst (in diesem Paragraphen) unter der Annahme, dass die Zahlen k_n unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, also

$$3 \leqq k_n < g \text{ (endl. Grösse).} \tag{32}$$

2. Für alle rationalen x der Form

$$x = \frac{A}{K_i}, \tag{33}$$

wo A eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet (welche also mit K_i gemeinsame Factoren haben kann) gilt, dass von einem gewissen n-Werth $\leqq i$ an die Grösse $K_n x$ eine ganze Zahl wird, und demzufolge in (31) alle Factoren $u_n(x) = 1$. Zufolge der Annahme, dass alle k_n ungerade sein sollen, kann andererseits für kein vorangehendes n die Grösse $2\pi K_n x$ gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ werden, d. h. $u_n(x)$ nicht gleich Null. Folglich erhält $f(x)$ für jeden x-Werth der Form (33) einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Werth. Die fraglichen x-Werthe sind (als rational) abzählbar, aber bilden eine überalldichte Menge, da der Nenner in (33) keine endliche obere Grenze hat, und der Zähler ganz beliebig ist. [Die Menge der Zahlen (33) ist übrigens offenbar dieselbe, wie die Menge aller Zahlen, welche sich in der Form (6) mit einer endlichen Gliederanzahl darstellen lassen.]

Für alle x, welche der Classe (33) nicht angehören, wird dagegen $K_n x$ niemals eine ganze Zahl, und somit $u_n(x)$ niemals gleich 1. Nach § 1, Satz 1 kann auch nicht $\lim R(K_n x) = 1$ sein, da die k_n eine endliche obere Grenze haben; es hat also auch niemals $\cos(2\pi K_n x)$ den bestimmten Grenzwerth 1; folglich verschwindet nach § 2 das Product (31) für alle x-Werthe, welche nicht zur Menge (33) gehören. Die Function $f(x)$ hat also eine abzählbare, überalldichte Menge von Nicht-Nullstellen, aber eine überall nicht-abzählbare Menge von Nullstellen. Unter diesen giebt es eine abzählbare, überalldichte Menge (die gegebene Menge M), für welche es gilt, dass von einem gewissen n an jeder Factor $u_n(x)$ verschwindet; offenbar kann dagegen an anderen Nullstellen niemals ein einzelner Factor $u_n(x)$ verschwinden.

3. Es gilt ferner, dass $f(x)$ in jedem Intervalle sowohl *positive* als auch *negative* Werthe annimmt. Es sei nämlich $x_1 \ldots x_2$ ein beliebiges Intervall, $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 = 2d$, $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x_0$. Man nehme i so gross, dass

$$\frac{1}{K_i} < d \tag{34}$$

wird; unter dieser Voraussetzung lässt sich A so bestimmen, dass der

x-Werth (33) zwischen x_1 und x_2 fällt; man bezeichne einen solchen x-Werth mit ξ. Es sei m ($\leqq i$) der kleinste n-Werth, für den $K_n\xi$ eine ganze Zahl ist, und $A:K_i$ sei $= B:K_m$. Es bedeute ferner Δ den kleinsten numerischen Werth, um welchen eine der $m-1$ Grössen

$$2\pi K_1\xi,\ 2\pi K_2\xi,\ \ldots\ 2\pi K_{m-1}\xi$$

von einem ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ abweicht [da ξ zur Classe (33) gehört, kann niemals $\Delta = 0$ sein]. Man nehme eine ganze positive Zahl ϱ so gross, dass

$$(35)\qquad 2\pi\cdot\frac{1}{k_{m+1}\cdot k_{m+2}\cdots k_{m+\varrho-1}} < \Delta,$$

und somit auch

$$(36)\qquad \frac{2\pi K_n\xi}{B}\cdot\frac{1}{k_{m+1}\cdot k_{m+2}\cdots k_{m+\varrho-1}}\cdot\frac{L}{k_{m+\varrho}} < \Delta,\quad n = 1, 2\ldots m$$

ist, wenn $0 < L < k_{m+\varrho}$ (es ist zu bemerken, dass $\xi:B > 0$ ist, $K_n\xi:B < 1$ für $n < m$, $= 1$ für $n = m$).

Man setze nun

$$(37)\qquad \eta = \xi + \frac{\xi}{B}\cdot\frac{1}{k_{m+1}\cdot k_{m+2}\cdots k_{m+\varrho-1}}\cdot\frac{L}{k_{m+\varrho}} = \xi + \xi_1.$$

Zufolge (36) hat dann für $n = 1, 2, \ldots m-1$, und offenbar auch für $n = m$, $\cos(2\pi K_n\eta)$ dasselbe Vorzeichen wie $\cos(2\pi K_n\xi)$, weil die positive Grösse $2\pi K_n\xi_1$ kleiner ist als der numerische Unterschied zwischen $2\pi K_n\xi$ und der am meisten benachbarten Zahl der Form $(2p+1)\frac{\pi}{2}$. Andererseits ist für $\sigma = 1, 2, \ldots \varrho-1$

$$(38)\qquad K_{m+\sigma}\eta = K_{m+\sigma}\xi + \frac{1}{k_{m+\sigma+1}\cdots k_{m+\varrho-1}}\cdot\frac{L}{k_{m+\varrho}} = K_{m+\sigma}\xi + \Theta.$$

$K_{m+\sigma}\xi$ ist immer eine ganze Zahl, aber $K_{m+\sigma}\eta$ wird zum ersten Male ganz, sobald σ den Werth ϱ erreicht (man bemerke die Annahme $L < k_{m+\varrho}$). Ferner ist, da alle $k_n \geqq 3$ sind, für $\sigma \leqq \varrho-3$ die Grösse $\Theta < \frac{1}{4}$, und dasselbe gilt auch für $\sigma = \varrho-2$, wenn $\frac{L}{k_{m+\varrho}} < \frac{3}{4}$ ist. Man wähle die Zahl L so, dass

$$(39)\qquad \frac{1}{4} < \frac{L}{k_{m+\varrho}} < \frac{3}{4}$$

wird, was selbstverständlich immer möglich ist, da $k_{m+\varrho} > 2$. Dies vorausgesetzt, gilt folgendes: wie gesagt, haben die beiden Grössen $\cos(2\pi K_n\xi)$ und $\cos(2\pi K_n\eta)$ für $n \leqq m$ immer dasselbe Vorzeichen; für $m < n < m+\varrho-1$ gilt dasselbe, da $\cos(2\pi K_n\xi) = 1$ ist, und nach (38) $\cos(2\pi K_n\eta) = \cos(2\pi\Theta)$, was ebenfalls eine positive Grösse

ist, da $\Theta < \frac{1}{4}$; für $n = m + \varrho - 1$ haben dagegen die Grössen $\cos(2\pi K_n \xi)$ und $\cos(2\pi K_n \eta)$ verschiedene Zeichen, weil jene gleich 1 ist, diese aber negativ, für $n \geqq m + \varrho$ sind beide Grössen gleich 1. Also ergiebt sich, dass das Product (31) für ξ und η verschiedene Vorzeichen haben muss. Andererseits gehört η wie ξ zur Classe (33); denn da dies für ξ gilt, so gilt es nach (37) auch für ξ_1, und somit für $\xi + \xi_1$, (die Summe zweier Zahlen der fraglichen Art ist offenbar immer eine Zahl derselben Art). Endlich liegt η, wie ξ, zwischen x_1 und x_2, wenn man ϱ hinreichend gross nimmt; dann wird nämlich $\xi_1 < d$, und also, da $x_1 < \xi < x_0$ ist, und $x_0 - x_1 = x_2 - x_0 = d$, mit Sicherheit $x_1 < \eta < x_2$. Wir haben also vollständig bewiesen, dass in jedem beliebigen Intervalle die Function (31) sowohl positive als negative Werthe annimmt (für x-Werthe, welche zur Classe (33) gehören).

4. Wie verhält sich an verschiedenen Stellen die fragliche Function in Bezug auf *Stetigkeit* oder *Unstetigkeit?* An den Nicht-Nullstellen ist $f(x)$ selbstverständlich unstetig, da in einer beliebig kleinen Umgebung Nullstellen vorkommen. Aber an den Nullstellen findet in der That Stetigkeit statt. Dies lässt sich auf folgende Weise einsehen. Es sei x eine beliebige Nullstelle, und σ eine beliebig kleine positive Grösse. Da das unendliche Product (31) verschwindet, lässt sich ein n-Werth so bestimmen, dass

$$\left| \prod_1^n u_i(x) \right| < \frac{\sigma}{2} \tag{40}$$

wird. Man betrachte eine Nicht-Nullstelle $x + \delta$ ($\delta \gtrless 0$). Wenn x zu der Classe von Nullstellen gehört, für welche kein Factor $u_n(x)$ verschwindet, hat man

$$\prod_1^n u_i(x+\delta) = \prod_1^n u_i(x) \cdot \prod_1^n \frac{u_i(x+\delta)}{u_i(x)}. \tag{41}$$

Es bedeute $M(\delta)$ den absoluten Werth des numerisch grössten unter den n Quotienten

$$\frac{u_i(x+\delta)}{u_i(x)}.$$

$M(\delta)$ ist (bei festem n) eine Function von δ, welche für unendlich kleines δ unendlich nahe an 1 kommt. Es muss daher möglich sein, ein positives ε so zu bestimmen, dass

$$\text{für } -\varepsilon < \delta < \varepsilon, \quad M(\delta) < \sqrt[n]{2} \tag{42}$$

l, und also nach (40) und (41)

$$\left|\prod_1^n u_i(x+\delta)\right| < \sigma.$$

Ferner im Producte (31) für alle x kein Factor numerisch grösser l ist, so folgt aus (43), dass auch

$$\left|\prod_1^\infty u_n(x+\delta)\right| < \sigma$$

l. Wenn dagegen verschwindende Factoren $u_n(x)$ vorkommen, so (s. oben) von einem gewissen n an in der That alle $u_n(x) = 0$. ı nehme oberhalb dieser Grenze einen beliebigen n-Werth $= i$, und imme nachher ε so, dass für $|\delta| < \varepsilon$

$$|u_i(x+\delta)| - |u_i(x)| = |u_i(x+\delta)| < \sigma$$

l, was immer möglich ist, da $\lim_{\delta=0} [u_n(x+\delta) - u_n(x)]$ immer un- ıngig von n verschwindet. Dann wird (da kein Factor numerisch > 1)

$$\left|\prod_1^\infty u_n(x+\delta)\right| \leqq |u_i(x+\delta)| < \sigma.$$

mit ist bewiesen, dass jede Nullstelle Stetigkeitsstelle ist, obgleich ıder Umgebung derselben Nicht-Nullstellen vorkommen. Die Func- $f(x)$ ist „punktirt unstetig" mit einer abzählbaren aber überall- ten Menge von Unstetigkeitsstellen. Jede eindeutige, endlich ıende Function mit dieser Eigenschaft ist nach einem vom Verf. ıiner früheren Arbeit benutzten Sprachgebrauche eine eindeutige, iche *limitäre* Function (mit den Unstetigkeitsstellen als „primären" en)*).

Bei jeder Function dieser Art bilden diejenigen Stellen, an denen „Sprung"**) der Function grösser als eine beliebig kleine positive

*) Functionentheoretische Bemerkungen und Sätze, Acta Univ. Lundensis XXXIII. Es wird hier (p. 7, 8) der Begriff „limitäre Function" folgender- ın definirt: man bestimme für eine überalldichte, *abzählbare* x-Menge $\ldots x_n \ldots$ auf beliebige Weise eine Function $f(x_n)$; diese x-Werthe mögen ır heissen, alle übrigen secundär; für secundäre x definire man $f(x)$ durch lestimmung, dass $f(x) = \lim_{i=\infty} f(x_{\varrho_i})$ sein soll, wenn $\lim_{i=\infty} x_{\varrho_i} = x_i$, wobei alle ıme $x_{\varrho_1} \ldots x_{\varrho_n} \ldots$ mit $\lim x_{\varrho_i} = x$ berücksichtigt werden sollen, und $\lim f(x_{\varrho_i})$ Unbestimmtheit als eine Menge von Werthen aufzufassen ist. Hiernach be- ıt der Ausdruck „eindeutige, endliche limitäre Function" ganz dasselbe wie leutige, endliche Function mit höchstens einer abzählbaren Menge von Un- ıkeiten."

**) Die Differenz zwischen der oberen und der unteren Grenze für die Werthe eindeutigen Function in einem gewissen x-Intervalle heisst „Schwankung"

Grösse σ ist, immer eine abzählbare Menge von dem Inhalt Null. Denn jede Häufungsstelle für x-Werthe, für welche der Sprung $> \sigma$ ist, ist offenbar eine Discontinuitätsstelle; solche Häufungsstellen können somit (falls sie überhaupt vorkommen) nur eine abzählbare Menge bilden. Aber jede Menge, deren Häufungsstellen abzählbar sind, hat den Inhalt Null*). Dies gilt also im jetzt fraglichen Falle für die Stellen mit Sprunge $> \sigma$**).

Die erwähnte Eigenschaft in Bezug auf die Sprünge ist in der That nothwendige und hinreichende Bedingung für die *Integrabilität* einer Function***). Die jetzt fraglichen Functionen sind also immer *integrabel*.

5. Unter den eindeutigen endlichen Functionen mit abzählbaren Unstetigkeitsstellen kann man folgende zwei Classen unterscheiden: diejenigen, bei denen die *Stellen mit Sprüngen* $> \sigma$ immer in *endlicher Anzahl* auftreten, und diejenigen, bei denen diese Stellen für hinreichend kleine σ-Werthe *unendliche* (obgleich nicht ausgedehnte) *Mengen* bilden (bei integrirbaren Functionen mit nicht-abzählbaren Unstetigkeiten, kann dagegen aus leicht ersichtlichem Grunde nur das letztere stattfinden). Functionen der ersten Art sind ziemlich leicht zu finden†). Und es ist bemerkenswerth, dass unsere jetzigen Functionen zur *zweiten* Classe gehören, wie sich aus folgenden Betrachtungen ergiebt.

Man nehme eine beliebige Nicht-Nullstelle

$$x = \frac{A}{K_i} \tag{47}$$

und eine andere benachbarte Nicht-Nullstelle

$$\xi = \frac{A}{K_i} + \frac{1}{K_{i+p}} = x + \eta, \tag{48}$$

und führe die Bezeichnungen

$$\prod_{n=1}^{i} u_n(x) = P_i(x), \quad \prod_{n=i+1}^{\infty} u_n(x) = R_i(x)$$

ein. Für alle $n \geq i$ ist $u_n(x) = 1$, und somit $R_n(x) = 1$, und man hat also

---

der Function in diesem Intervalle. Der „Sprung" der Function an einer Stelle x ist der Grenzwerth bei verschwindendem δ für die Schwankung im Intervalle $x - \delta \ldots x + \delta$.

*) Man sehe Cantor, Acta Math. II, p. 376, Théorème VI.

**) Vgl. Functionentheoretische Bemerkungen etc. p. 27, p. 39.

***) Gewöhnlich wird die Integrabilitätsbedingung in anderer Form ausgesprochen, aber diese Form dürfte in der That die einfachste und für unmittelbare Anwendung am meisten geeignete sein. Man sehe Pasch, Math. Annalen XXX, p. 149; Funct. Bem. etc. p. 37, 38.

†) S. z. B. Funct. Bem. etc. p. 11.

$$f(x) = P_i(x) = P_{i+1}(x) = P_{i+2}(x) = \cdots,$$

nso ist

$$\begin{cases} f(\xi) = P_{i+p}(\xi) = P_{i+p+1}(\xi) = \cdots, \\ \quad = P_i(\xi) \cdot \prod_{n=i+1}^{i+p} u_n(\xi). \end{cases}$$

un i und A (und somit x) bestimmte Werthe haben, so kann
ı Nullwerthe für u_n nicht vorkommen können) p so gross
so klein) nehmen, dass für $n = 1, 2, \ldots i$

$$\sqrt[i]{1-\delta} < \left|\frac{u_n(\xi)}{u_n(x)}\right| < \sqrt[i]{1+\delta}$$

ɔ δ beliebig klein > 0 ist, und folglich

$$(1-\delta)|P_i(x)| < |P_i(\xi)| < (1+\delta)|P_i(x)|.$$

in bemerke man, dass für $n \geqq i$ die Grösse $u_n(\xi) = u_n(\eta)$ ist
x ganze Zahl ist), und somit

$$\prod_{i+1}^{i+p} u_n(\xi) = \prod_{n=i+1}^{i+p} \varphi(\cos 2\pi K_n \xi) = \prod_{\varrho=1}^{p} \varphi\left(\cos 2\pi \frac{K_{i+\varrho}}{K_{i+p}}\right).$$

ist

$$\frac{K_{i+\varrho}}{K_{i+p}} = \frac{1}{k_{i+\varrho+1} \cdot k_{i+\varrho+2} \cdots k_{i+p}} \leqq \frac{1}{3^{p-\varrho}},$$

$p - \varrho > 1$

$$\frac{2\pi K_{i+\varrho}}{K_{i+p}} \geqq \cos\frac{2\pi}{3^{p-\varrho}} > 0, \quad \varphi\left(\cos\frac{2\pi K_{i+\varrho}}{K_{i+p}}\right) \geqq \varphi\left(\cos\frac{2\pi}{3^{p-\varrho}}\right) > 0,$$

ıit

$$\left|\prod_{n=i+1}^{i+p} u_n(\xi)\right| \geqq \left|\varphi\left(\cos\frac{2\pi}{k_{i+p}}\right)\right| \cdot \prod_{n=2}^{p-1} \varphi\left(\cos\frac{2\pi}{3^n}\right).$$

folgt, dass bei unbegrenzt wachsendem p (und festem i) das

$$\prod_{i+1}^{i+p} u_n(\xi)$$

liebig nahe an Null kommen kann. Denn es ist immer

$$\left|\cos\frac{2\pi}{k_{i+p}}\right| \geqq \cos\frac{2\pi}{5}, \quad \text{also} \quad \left|\varphi\left(\cos\frac{2\pi}{k_{i+p}}\right)\right| > g > 0.$$

ıat das unendliche Product

$$\prod_{2}^{\infty} \varphi\left(\cos\frac{2\pi}{3^n}\right)$$

einen von Null verschiedenen (positiven) Werth h. Wie wir wissen (s. § 2), gilt dies, wenn die Reihe

$$\sum\left(1-\cos\frac{2\pi}{3^n}\right)$$

convergirt. Und diese Convergenz findet in der That statt; denn es ist

$$\lim_{n=\infty}\frac{1-\cos\frac{2\pi}{3^{n+1}}}{1-\cos\frac{2\pi}{3^n}}=\lim_{n=\infty}\left(\frac{\frac{2\pi}{3^{n+1}}}{\frac{2\pi}{3^n}}\right)^2=\frac{1}{9}<1. \tag{58}$$

Nach (49), (50), (52), (56), (57) wird also für $gh = G$,

$$|f(\xi)| > (1+\varepsilon)\cdot G\cdot|f(x)|, \tag{59}$$

wo $|\varepsilon|<\delta$ ist, und also für hinreichend grosse p beliebig klein, und $G>0$ und von p unabhängig. M. a. W.: für ξ-Werthe der Form (48), welche hinreichend nahe an x liegen, kommt $|f(\xi)|$ beliebig nahe an der von Null verschiedenen Grösse $G.|f(x)|$, und es kann somit der Sprung von $f(x)$ an den Stellen ξ nicht beliebig nahe an Null kommen, da der Sprung nicht kleiner als $|f(\xi)|$ sein kann, weil Nullstellen in jedem Intervalle vorkommen. Dasselbe ergiebt sich auf völlig analoge Weise für alle Stellen

$$x\pm\frac{c}{k^{i+p}}, \tag{60}$$

wo c eine gegebene ganze Zahl von beliebiger Grösse (>0) bedeutet. Aber der (von Null verschiedene) Grenzwerth bei unbegrenzt wachsendem p — und constantem c — für den Sprung an der Stelle (60) hängt von c ab, und zwar muss dieser Grenzwerth bei wachsendem c unbegrenzt abnehmen (oder wenigstens für gewisse unendlich grosse c unendlich klein werden). Man bemerke nämlich erstens, dass offenbar *alle* Nicht-Nullstellen, mit Ausnahme für eine *endliche* Anzahl (von der Form $x\pm\frac{c}{k^{i-q}}$), sich in der Form (60) darstellen lassen, weshalb in einer hinreichend kleinen Umgebung von x alle Nicht-Nullstellen die Form (60) haben; und zweitens dass in keiner Umgebung von x die Sprünge an den Nicht-Nullstellen eine von Null verschiedene untere Grenze σ haben können, weil in diesem Falle der Inhalt der Menge von Nicht-Nullstellen mit Sprunge ≥ 0 nicht gleich Null sein könnte (die Sache folgt übrigens schon daraus, dass die fragliche Function nur punktirt unstetig ist).

Das Hauptergebniss dieser Betrachtungen ist die Unendlichkeit

ler Menge derjenigen Stellen, an denen der Sprung $> \sigma$ ist, wo σ ıinreichend klein ist.

6. In Bezug auf die *Derivation* der Function $f(x)$, gilt es offenbar ın den Nicht-Nullstellen, das $f'(x)$ unendlich ist oder $\pm\infty$ nebst ɔndlichem Werthe repräsentirt (zufolge der Ueberalldichtheit der Nicht-Nullstellen). Es gilt aber für jede eindeutige endliche „limitäre" Function, bei welcher an einer überalldichten x-Menge $f'(x) + \infty$ ɔder $-\infty$ als möglichen Werth enthält, dasselbe für eine überall ıicht-abzählbare x-Menge*). Es ist also in unserem Falle auch bei ɛiner überall nicht-abzählbaren Menge von Nullstellen $+\infty$ oder $-\infty$ nöglicher Werth von $f'(x)$. Für eine andere derartige Menge ist lagegen, nach einem bekannten Satze, $f'(x)$ auf endliche Werthe beschränkt**).

7. Eine der Annahme

(61) $$M \equiv \left\{\frac{2m}{K_n}\right\}$$

entsprechende *Modification* der Functionsform (31) ist die folgende

(62) $$f(x) = \prod_1^\infty \varphi\left(\sin \tfrac{\pi}{2} K_n x\right) \qquad K_n = k_1 . k_2 \ldots k_n,$$

wo die Zahlen k_n unter einer endlichen Grenze bleiben und sämmtlich die Form $4p + 1$ $(p \geqq 1)$ haben. Auch hier wird für eine abzählbare, überalldichte x-Menge $f(x)$ von Null verschieden, nämlich für x-Werthe der Form

$$\frac{4m+1}{K_n}.$$

Die Function (62) hat die Periode 4, die Function (31) die Periode 1. m übrigen gestaltet sich alles völlig analog.

Als die einfachsten Specialfälle der Functionsarten (31) und (62) ann man die Folgenden bezeichnen:

(63) $$f(x) = \prod_1^\infty \varphi(\cos 2\pi \,.\, 3^n x],$$

(64) $$f(x) = \prod_1^\infty \varphi\left(\sin \tfrac{\pi}{2} \cdot 5^n x\right).$$

*) Es wird dies in der oben citirten Arbeit „Functionentheoretische Bemerkungen etc." p. 30—36 gezeigt.

**) S. Scheeffer, Acta Math. V, p. 283.

§ 4.

Functionen mit einer überall nicht-abzählbaren Menge von Nicht-Nullstellen und in jedem Intervalle abwechselnden Vorzeichen.

Es sei jetzt wieder $k_1, k_2 \ldots k_n \ldots$ eine Reihe von ungeraden Zahlen $\geqq 3$, aber mit der Eigenschaft

$$\lim k_n = \infty, \tag{65}$$

und man betrachte wieder die Function

$$f(x) = \prod_1^\infty \varphi(\cos 2\pi K_n x), \quad K_n = k_1 k_2 \ldots k_n. \tag{66}$$

Ganz wie im vorigen Falle gilt es, dass alle Stellen

$$\frac{A}{K_i} \tag{67}$$

Nicht-Nullstellen sind. Und diese (rationalen) Stellen bilden wie in vorigen Falle eine überalldichte (abzählbare) Menge.

Aber es giebt im jetzigen Falle überdies eine überall nicht-abzählbare Menge von irrationalen Nicht-Nullstellen. Nach § 1, Satz 2 giebt es nämlich eine überall nicht-abzählbare x-Menge mit der Eigenschaft dass für hinreichend grosse n-Werthe

$$R(K_n x) = R_n(x) < \frac{c}{k_{n+1}} \tag{68}$$

ist, wo c eine beliebige positive Grösse $\geqq 2$ bedeutet. Ferner hat man immer

$$1 - \cos 2\pi K_n x = 1 - \cos 2\pi R_n(x) < 2\pi^2 [R_n(x)]^2, \tag{69}$$

also nach (68)

$$1 - \cos 2\pi K_n x < 2\pi^2 \frac{c^2}{k_{n+1}^2}. \tag{70}$$

Da die Reihe $\sum \frac{1}{k_{n+1}^2}$ und somit auch $\sum (1 - \cos 2\pi K_n x)$ immer convergirt, hat nach § 2 das Product (66) einen bestimmten von Null verschiedenen Werth. Dies gilt also für eine überall nicht-abzählbare x-Menge, w. z. b. w.

Andererseits giebt es nach § 1, Satz 3 eine andere derartige Menge, für welche $f(x)$ verschwindet. Denn eine solche Menge bilden nach diesem Satze schon diejenigen x, für welche $\lim R_n(x)$ nicht gleich

ll ist. Und überdies kann das Product (66) verschwinden auch für $R_n(x) = 0$.

Dass in jedem Intervalle sowohl positive als negative Werthe vor- amen, kann man wörtlich wie im vorigen Falle zeigen. Zu bemerken hierbei, dass dieser Beweis sich nur auf rationale Nicht-Nullstellen eht. Es ist selbstverständlich hinreichend, die zu beweisende That- ae für diese Stellen nachzuweisen, da sie eine überalldichte Menge en. Aber man kann andererseits fragen, ob die beständige Ab- hselung der Vorzeichen auch bei den irrationalen Nicht-Nullstellen tfindet. Dass diese Frage in der That zu bejahen ist, lässt sich nlich leicht zeigen; aber wir führen diesen Beweis hier nicht aus.

„Unsere jetzige Function $f(x)$ ist, wie die vorige, punktirt un- ig", und zwar so, dass Stetigkeit an allen Nullstellen, Unstetigkeit allen Nicht-Nullstellen stattfindet. Letzteres ist selbstverständlich, l die Stetigkeit an den Nullstellen ergiebt sich wörtlich wie im rigen Falle. Die *Unstetigkeiten* bilden also jetzt eine *überall nicht- ählbare* Menge. Die Function $f(x)$ kann somit *nicht* zur „limitären" sse gehören (s. oben).

Mit der Frage nach der Integrabilität oder Nicht-Integrabilität jetzigen $f(x)$ werden wir uns gegenwärtig nicht beschäftigen, da selbe, wie es scheint, verhältnissmässig grosse Schwierigkeiten dar- tet und eine besondere Behandlung verdient. — Mit dieser Frage gt eine andere nahe zusammen, nämlich die Frage, ob es eine nction $\Phi(x)$ giebt, welche in jedem Intervalle Maxima-Minima be- t, und deren Derivirte gleich $f(x)$ ist (vgl. die Einleitung). Eine hwendige Bedingung hierfür ist bekanntlich, dass $f(x)$ *nicht* tegrabel" ist (eine *definite* Integration zulässt)*).

Zuletzt sei bemerkt, dass die Modification (62) der Darstellungs- n auch bei der jetzigen Functionsart möglich ist. Dies lässt sich der That mit Anwendung des Satzes 4, § 1 ohne Schwierigkeit hweisen, wenn man die darin vorkommende Zahl $p = 4$ setzt.

§ 5.

unctionen welche niemals das Vorzeichen ändern. — Annäherung durch rationale Functionen.

Selbstverständlich erhält man durch Quadrirung der oben be- chteten Functionen $f(x)$ andere Functionen, welche ähnliche Eigen- aften besitzen, aber *niemals negativ* werden.

Solche Functionen lassen sich indess auch auf einfachere Weise ch Producte mit ganzen Factoren darstellen. Man betrachte das duct

*) S. z. B. Dini, Fondamenti § 200.

$$(71) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi K_n x),$$

wo die Grössen K_n die Bedingungen von § 3 oder § 4 erfüllen. Wenn negative Factoren hier niemals aufhören, so wird das Product offenbar *unbestimmt*, falls es nicht verschwindet, während die numerischen Werthe der Factoren immer ein Product mit bestimmtem Werthe geben (da alle Factoren numerisch kleiner als Eins sind). Die Hinzufügung von positiven Exponentialfactoren, wodurch das Product (71) in das oben betrachtete (31) übergeht, hatte in der That den Zweck, jene Unbestimmtheit zu beseitigen: zufolge der Eigenschaften der Function xe^{x^2-1}, verschwindet das Product (31) jedesmal, wenn negative Factoren niemals aufhören. In (71) tritt dagegen (wie aus dem vorigen folgt) die Unbestimmtheit wenigstens für alle x-Werthe der Form

$$\frac{2m+1}{2.K_i}$$

ein; aber sie verschwindet bei Quadrirung: das Product

$$(72) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \cos^2(2\pi K_n x)$$

giebt eine eindeutige Function, welche überalldichte Nullstellen hat. Die näheren Eigenschaften werden denjenigen der oben betrachteten Functionen ähnlich.

Im Zusammenhange hiermit mag bemerkt werden, dass man auch mittels indirecter Anwendung von *Cantor's Condensationsverfahren* eine Art unendlicher Producte erhalten kann, welche für eine überall nicht-abzählbare x-Menge verschwinden, für eine andere derartige Menge bestimmte *positive* Werthe haben, und niemals negativ oder unbestimmt werden. In einer früheren Arbeit*) hat der Verf. gezeigt, dass wenn $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n \ldots$ eine abzählbare und im Intervalle $0 \ldots 1$ überalldichte x-Menge ist, $c_1, c_2, \ldots c_n \ldots$ eine beliebige convergente Reihe positiver Grössen, die Reihe

$$(73) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - \omega_n)^{\frac{1}{3}}$$

(um nur den einfachsten Fall zu betrachten) im Intervalle $0 \ldots 1$ eine stetige Function $f(x)$ definirt, deren Derivirte $f'(x)$ für eine überall nicht-abzählbare x-Menge positiv unendlich wird, für eine andere der-

*) Ueber das Weierstrass-Cantor'sche Condensationsverfahren, Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandlingar, Stockholm 1896, p. 583—602.

ige Menge endliche positive Werthe hat, niemals negativ oder un-
timmt wird und immer gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3} (x - \omega_n)^{-\frac{2}{3}}$$

Hieraus folgt, wenn man $\frac{1}{3} c_n = k_n$ setzt, dass die Function

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{-k_n (x-\omega_n)^{-\frac{2}{3}}}$$

oben erwähnten Eigenschaften hat — also nicht-abzählbare Mengen
wohl von Nullstellen als auch von Stellen mit positiven Functions-
then besitzt. Aber hier sind die Factoren nicht ganze Functionen;
sind als analytische Functionen sogar nicht eindeutig; und jede
elle ω_n ist für den entsprechenden Factor wesentlich singulär: bei
eller Annäherung an die Stelle $x = \omega_n$ erhält man Null als Grenze
r den reellen Functionswerth; aber bei beliebiger Annäherung mit
nem beliebigen der drei Functionswerthe erhält man im allgemeinen
ndere Grenzwerthe.

Dass man ähnliche Producte bilden kann, welche für das ganze
Gebiet dasselbe Verhalten zeigen, folgt aus der Darstellung in der
tirten Arbeit. —

Zum Schluss sei folgendes bemerkt. Die Functionsdarstellung
urch unendliche Producte ist selbstverständlich ein Specialfall von
nnäherung durch ganze analytische Functionen. Jede solche An-
herung lässt sich in Annäherungen durch *ganze rationale* Functionen
nsetzen. Wie man in der That diesen Uebergang zu bewerkstelligen
t (im allgemeinen Falle oder in unserem Specialfalle) dürfte über-
issig sein, hier näher anzugeben.

Da unsere jetzigen Functionen unstetig sind, kann von gleich-
issigen Annäherungen nicht die Rede sein. Es lässt sich aber
i unseren Productdarstellungen oder daraus entspringenden An-
herungen durch rationale Functionen

$$R_1(x),\ R_2(x) \ldots R_n(x) \ldots$$

ne Schwierigkeit zeigen, dass für beliebig kleines σ und hin-
ichend grosse n-Werthe

$$|f(x) - R_n(x)| < \sigma \tag{6}$$

ird für alle x innerhalb eines beliebigen Intervalles, wo der „Sprung"
. oben] von $f(x)$ immer $< \frac{\sigma}{2}$ ist. Dies gilt doch in der That bei
len Annäherungen mittels stetiger Functionen, und ist daher nicht
n besonderem Interesse.

An anderer Stelle*) hat der Verf. gezeigt, dass bei jeder eindeutigen und endlich-bleibenden „limitären" Function (s. oben) eine Annäherung mittels ganzer rationaler Functionen möglich ist, für welche (bei hinreichend grossem n) die Ungleichheit (76) schon in allen Intervallen gilt, wo der Sprung immer $< \sigma$ ist. Es mag dahingestellt sein, ob die jetzt fraglichen Darstellungen der im § 3 besprochenen limitären Functionen diese Bedingung erfüllen.

Lund, December 1897.

*) In der oben citirten Arbeit „Functionentheoretische Bemerkungen etc.", pag. 26—29.

leitung hinreichender Bedingungen des Maximums oder imums einfacher Integrale aus der Theorie der zweiten Variation.

Von

Adolf Kneser in Dorpat.

Um zu entscheiden, ob das Integral

$$J = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1', y_2', \ldots y_n')\, dx$$

ch eine gewisse Bestimmung der unbekannten Functionen y_ν zu einem remum, d. h. zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird, n diese Functionen beliebigen Bedingungsdifferentialgleichungen erworfen und ihre Werthe für $x = a$ und $x = b$ vorgeschrieben , hat man zu untersuchen, ob die Grösse

$$\Delta = \int_a^b \{ f(x, y_1 + \delta y_1, \cdots y_n + \delta y_n, y_1' + \delta y_1', \cdots y_n' + \delta y_n') - f(x, y_1, \cdots y_n') \}\, dx$$

hinreichend kleinen mit den festgesetzten Bedingungen verträgen Variationen δy_ν, $\delta y_\nu'$ ein constantes Vorzeichen besitzt. Entkelt man den Integranden in diesem Ausdruck nach Potenzen der iationen, und nennt das Integral der Glieder k^{ter} Dimension die Variation von J, so muss, damit J ein Extremum werde, die e Variation verschwinden, woraus sich die Differentialgleichungen Problems ergeben. Man hat, wenn diese erfüllt sind, lange hindurch als selbstverständlich angesehen, dass das Vorzeichen Grösse Δ mit dem der zweiten Variation übereinstimme, und Reihe von Forschern hat sich in siegreichem Kampf mit sen analytischen Schwierigkeiten bemüht, die zweite Variation so uformen, dass ihr Vorzeichen möglichst leicht erkennbar sei. Dabei le nach dem Vorgang von Legendre stets die unter dem Integralen stehende quadratische Form, welche die $2n$ Argumente δy_ν, $\delta y_\nu'$ ält, durch eine andere ersetzt, welche von weniger als $2n$, im emeinen n linearen Verbindungen der Variationen abhängt.

Aber gerade diese Transformation macht den Schluss vom Vorzeichen der zweiten Variation auf das der Grösse Δ anfechtbar. Die allgemeinen Untersuchungen von Scheeffer über das Extremum der Functionen von mehreren Variabeln und die von seinen Vorgängern auf diesem Gebiet gegebenen Beispiele haben nämlich auf die leicht ersichtliche, aber oft übersehene Thatsache hingewiesen, dass in einer Function von mehreren Variabeln, welche kleine Werthe haben, die Glieder höherer Dimension nur dann gegen die quadratischen sicher vernachlässigt werden können, wenn die von diesen gebildete quadratische Form nicht auf weniger Quadrate linearer Ausdrücke reducirbar ist, als die Anzahl der ursprünglichen Variablen beträgt. So hat nach der Bemerkung von Peano der Ausdruck

$$(x-y^2)(x-2y^2) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4$$

für beliebig kleine nicht verschwindende Werthe von x und y sowohl positive wie negative Werthe, obwohl das quadratische Glied beständig positiv ist. Hat man also die zweite Variation in das Integral einer Form von weniger als $2n$ linearen Verbindungen von $\delta y_\nu, \delta y'_\nu$ transformirt, so ist das Vorzeichen des Integranden in dem Ausdruck Δ durchaus zweifelhaft, noch mehr das der Grösse Δ selbst. Ein besonders helles Licht fällt auf diese Verhältnisse durch ein von Scheeffer gegebenes Beispiel*), in welchem die Grösse Δ positiv und negativ werden kann, während die zweite Variation ein festes Vorzeichen besitzt; allerdings kann letztere nicht für das ganze Integrationsintervall in die Legendre'sche Form übergeführt werden.

Wenn nun auch diese Erwägungen geeignet sind, den Credit der ganzen Theorie der zweiten Variation von Grund aus zu erschüttern, so braucht doch die gewaltige Arbeit, welche hervorragende Mathematiker an den Ausbau derselben gewandt haben, keineswegs als vergeblich und verloren zu gelten. Man kann vielmehr, wie ich auf den folgenden Blättern zu zeigen hoffe, die Theorie der zweiten Variation so ergänzen, dass sie ihren eigentlichen Beruf erfüllt und zu einer strengen Ableitung hinreichender Bedingungen des Extremums führt. Dieses Ziel dürfte für das oben formulirte allgemeine Problem der Variationsrechnung hiermit überhaupt zum ersten Male erreicht sein.

Eine angenehme Pflicht ist es mir zu erwähnen, dass ich einem während der Vollendung dieser Abhandlung geführten Briefwechsel mit Mayer mannigfache Förderung sowie einige Berichtigungen verdanke.

*) Ueber die Bedeutung der Begriffe „Maximum und Minimum" in der Variationsrechnung, Bd. XXVI dieser Annalen S. 201.

§ 1.

Ableitung einer Determinantenformel.

Es seien n und r feste Anzahlen, $n > r$, μ irgend eine Zahl der
$1, 2, \ldots 2n$, und es werde gesetzt

$$D_\mu = \begin{vmatrix} 0 & \ldots 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots b_{1\mu} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots 0 & b_{r1} & b_{r2} & \ldots b_{r\mu} \\ b_{11} & \ldots b_{r1} & a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1\mu} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1\mu} & \ldots b_{r\mu} & a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \ldots a_{\mu\mu} \end{vmatrix};$$

sei allgemein $a_{\nu\varrho} = a_{\varrho\nu}$, im Uebrigen aber die Grössen a ebenso die Grössen b willkürlich. Aus dem Laplace'schen Satze über Entwicklung einer Determinante nach Producten von Subdeterminanten folgt leicht

$$D_1 = D_2 = \cdots = D_{r-1} = 0;$$

$$D_r = (-1)^r \Big(\sum \pm b_{11}\, b_{22} \ldots b_{rr}\Big)^2.$$

man ferner, indem man der Determinante D_n eine Zeile und Colonne anfügt,

$$E_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} a_{\mu\nu} & b_{1\mu} & \ldots b_{r\mu} & a_{\mu 1} & \ldots a_{\mu n} \\ b_{1\nu} & 0 & \ldots 0 & b_{11} & \ldots b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{r\nu} & 0 & \ldots 0 & b_{r1} & \ldots b_{rn} \\ a_{1\nu} & b_{11} & \ldots b_{r1} & a_{11} & \ldots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n\nu} & b_{1n} & \ldots b_{rn} & a_{n1} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

t diese Grösse nur dann von Null verschieden, wenn

$$\mu > n, \quad \nu > n;$$

ffenbar

$$E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu},$$

at man, wenn $\nu \leqq 2n$ bleibt, $\frac{1}{2} n(n+1)$ Grössen E, welche nicht isch verschwinden. Da in $E_{\mu\nu}$ die Adjuncten der ersten Zeile μ, die der ersten Colonne von ν unabhängig sind, und $a_{\mu\nu}$ den or D_n hat, so kann man setzen

(3) $$E_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} D_n + b_{1\mu} B_{1\nu} + \cdots + b_{r\mu} B_{r\nu} + a_{\mu 1} A_{1\nu} + \cdots + a_{\mu n} A_{n\nu},$$

womit die Ausdrücke A, B definirt sind; die Formel (2) ergiebt dann

$$E_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} D_n + b_{1\nu} B_{1\mu} + \cdots + b_{r\nu} B_{r\mu} + a_{1\nu} A_{1\mu} + \cdots + a_{n\nu} A_{n\mu}.$$

Ersetzt man sodann in $E_{\mu\nu}$ die erste Zeile durch folgende

$$b_{\varrho\nu},\ 0, \ldots 0,\ b_{\varrho 1}, \ldots b_{\varrho n},$$

wobei die Anzahl der Nullen r und ϱ eine der Zahlen $1, 2, \ldots r$ ist, so werden die erste und die $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Zeile identisch; man erhält also

(4) $$b_{\varrho\nu} D_n + b_{\varrho 1} A_{1\nu} + \cdots + b_{\varrho n} A_{n\nu} = 0.$$

Nun besteht, wenn σ eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ ist, folgende Identität:

$$D_{n+\sigma} D_n^{\sigma} = \begin{vmatrix} 0 & \ldots 0 & b_{11} & \ldots b_{1n} & \ldots b_{1,n+1} & \ldots b_{1,n+\sigma} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots 0 & b_{r1} & \ldots b_{rn} & \ldots b_{r,n+1} & \ldots b_{r,n+\sigma} \\ b_{11} & \ldots b_{r1} & a_{11} & \ldots a_{1n} & \ldots a_{1,n+1} & \ldots a_{1,n+\sigma} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1n} & \ldots b_{rn} & a_{n1} & \ldots a_{nn} & \ldots a_{n,n+1} & \ldots a_{n,n+\sigma} \\ b_{1,n+1} D_n & \ldots b_{r,n+1} D_n & a_{n+1,1} D_n & \ldots a_{n+1,n} D_n & \ldots a_{n+1,n+1} D_n & \ldots a_{n+1,n+\sigma} D_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1,n+\sigma} D_n & \ldots b_{r,n+\sigma} D_n & a_{n+\sigma,1} D_n & \ldots a_{n+\sigma,n} D_n & \ldots a_{n+\sigma,n+1} D_n & \ldots a_{n+\sigma,n+\sigma} D_n \end{vmatrix}$$

In dieser Determinante multiplicire man, wenn $\tau \leqq \sigma$, die ersten r Reihen mit $B_{1,n+\tau}, B_{2,n+\tau}, \ldots B_{r,n+\tau}$, die dann folgenden n Reihen mit $A_{1,n+\tau}, A_{2,n+\tau}, \ldots A_{n,n+\tau}$, und addire sie zur $(n+r+\tau)^{\text{ten}}$ Reihe, d. h. der folgenden

$$b_{1,n+\tau} D_n, \ldots b_{r,n+\tau} D_n,\ a_{n+\tau,1} D_n, \ldots a_{n+\tau,n+\sigma} D_n.$$

Dann erhält man nach der Formel (4) an den ersten r Stellen Null, z. B. an der ersten

$$b_{1,n+\tau} D_n + b_{11} A_{1,n+\tau} + \cdots + b_{1n} A_{n,n+\tau} = 0.$$

Bei dem $(r+1)^{\text{ten}}$ Gliede erhält man mit Berücksichtigung der Formel (3)

$$a_{n+\tau,1} D_n + b_{11} B_{1,n+\tau} + \cdots + b_{r1} B_{r,n+\tau} + a_{11} A_{1,n+\tau} + \cdots + a_{n1} A_{n,n+\tau} = E_{n+\tau,1},$$

ähnlich an den folgenden Stellen

$$E_{n+\tau,2},\ E_{n+\tau,3}, \ldots E_{n+\tau,n+\sigma};$$

da nun von diesen alle Grössen verschwinden, in denen ein Index kleiner als $n+1$ ist, so ergiebt sich

$$D_{n+\sigma}D_n^{\sigma} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} & b_{1,n+1} & \dots & b_{1,n+\sigma} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{r1} & \dots & b_{rn} & b_{r,n+1} & \dots & b_{r,n+\sigma} \\ b_{11} & \dots & b_{r1} & a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,n+\sigma} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{rn} & a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \dots & a_{n,n+\sigma} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & E_{n+1,n+1} & \dots & E_{n+1,n+\sigma} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & E_{n+\sigma,n+1} & \dots & E_{n+\sigma,n+\sigma} \end{vmatrix},$$

kurz

$$D_{n+\sigma}D_n^{\sigma-1} = \sum \pm E_{n+1,n+1}E_{n+2,n+2}\dots E_{n+\sigma,n+\sigma} = e_\sigma.$$

Diese Formel kann leicht verallgemeinert werden. Es sei $i_1, i_2, \dots i_n$ kurz (i) irgend eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots n$; man ze, wenn ϱ, σ, τ ganze Zahlen sind und

$$\varrho \leqq r, \quad \sigma \leqq n, \quad \tau \leqq n,$$

grössen

$$b_{\varrho\sigma}, \; b_{\varrho,n+\sigma}, \; a_{\sigma\tau}, \; a_{\sigma,n+\tau}, \; a_{n+\sigma,n+\tau}$$

die folgenden:

$$b_{\varrho i_\sigma}, \; b_{\varrho,n+i_\sigma}, \; a_{i_\sigma i_\tau}, \; a_{i_\sigma,n+i_\tau}, \; a_{n+i_\sigma,n+i_\tau},$$

rch D_μ in $D_\mu^{(i)}$, $E_{\mu\nu}$ in $E_{\mu\nu}^{(i)}$, e_σ in $e_\sigma^{(i)}$ übergehe. Dann ist offenbar

$$D_n^{(i)} = D_n, \quad D_{2n}^{(i)} = D_{2n},$$

bei der Willkürlichkeit der Grössen a, b ergiebt die Gleichung (5)

$$D_{n+\sigma}^{(i)} D_n^{\sigma-1} = e_\sigma^{(i)}.$$

erseits lehrt ein Blick auf die Definitionsgleichung der Grössen E , dass

$$E_{n+\sigma,n+\tau}^{(i)} = E_{n+i_\sigma,n+i_\tau};$$

olgt

$$D_{n+\sigma}^{(i)} D_n^{\sigma-1} = e_\sigma^{(i)} = \sum \pm E_{n+i_1,n+i_1}E_{n+i_2,n+i_2}\dots E_{n+i_\sigma,n+i_\sigma},$$

lie Ableitung dieser Formel bleibt auch für $r = 0$ in Kraft.

§ 2.

Quadratische Formen, deren Argumente linearen Bedingungsgleichungen unterworfen sind.

Eine reelle quadratische Form von n Argumenten

$$\psi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

heisse definit bei den linear unabhängigen Bedingungsgleichungen

$$(7) \qquad b_{\varrho 1}x_1 + b_{\varrho 2}x_2 + \cdots + b_{\varrho n}x_n = 0, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

wenn sie für alle diesen genügenden reellen Argumentsysteme folgende Eigenschaften hat: sie wechselt ihr Vorzeichen nicht und verschwindet nicht, solange noch mindestens eine der Grössen x_ν von Null verschieden ist. Dann kann die Grösse D_n nicht verschwinden; denn wäre $D_n = 0$, so würden die Gleichungen

$$b_{\varrho 1}\xi_1 + b_{\varrho 2}\xi_2 + \cdots + b_{\varrho n}\xi_n = 0, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$
$$b_{1\nu}\xi_1 + b_{2\nu}\xi_2 + \cdots + b_{r\nu}\xi_r + a_{\nu 1}\xi_1 + a_{\nu 2}\xi_2 + \cdots + a_{\nu n}\xi_n = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

ein System von Lösungen ξ_ν, ξ_ϱ besitzen, dessen Glieder nicht alle den Werth Null hätten. Es könnten auch nicht alle Grössen ξ_ν verschwinden, da sich in diesem Falle ergäbe

$$b_{1\nu}\xi_1 + b_{2\nu}\xi_2 + \cdots + b_{r\nu}\xi_r = 0,$$

was der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Gleichungen (7) widerspricht. Nun folgt aber aus den Gleichungen für ξ_ϱ, ξ_ν leicht

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu (a_{\nu 1}\xi_1 + a_{\nu 1}\xi_2 + \cdots + a_{\nu n}\xi_n) = \psi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = 0,$$

was, wenn die Grössen ξ_ν nicht alle verschwinden, der Voraussetzung widerspricht, da die Grössen ξ_ν für x_ν gesetzt den Gleichungen (7) genügen. Somit folgt

$$D_n \gtrless 0.$$

Da ferner die Gleichungen (7) linear unabhängig sein sollen, muss mindestens eine aus dem System der Coefficienten $b_{\varrho\nu}$ gebildete Determinante r^{ter} Ordnung von Null verschieden sein; speciell sei zunächst

$$(8) \qquad \sum (\pm b_{11} b_{22} \ldots b_{rr}) \gtrless 0.$$

Dann sind die Gleichungen (7) nach $x_1, x_2, \ldots x_r$ auflösbar; substituirt man die erhaltenen Ausdrücke in die Form ψ, so ergebe sich

$$\psi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \psi_0(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n).$$

Die Form ψ_0, deren Argumente als frei veränderlich angesehen werden können, ist definit im gewöhnlichen Sinne des Wortes, d. h. sie verschwindet nur gleichzeitig mit allen ihren Argumenten. Dasselbe gilt von allen Formen, die aus ihr entstehen, wenn man einen Theil der Argumente gleich Null setzt; denn verschwände eine solche, ohne dass alle ihre Argumente gleich Null wären, so würde dasselbe für ψ_0 folgen, was dem soeben Bemerkten widerspricht. Setzt man also z. B. in der Form ψ und den Gleichungen (7) $x_n = 0$, so ergiebt die Gleichung

$$\psi(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, 0) = \psi_0(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_{n-1}, 0),$$

dass die links stehende Form bei den Bedingungsgleichungen

$$b_{\varrho 1} x_1 + b_{\varrho 2} x_2 + \cdots + b_{\varrho, n-1} x_{n-1} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots n)$$

definit ist, und letztere sind der Annahme (8) zufolge linear unabhängig. Das Analogon der Determinante D_n ist hier D_{n-1}, da diese aus jener entsteht, indem man die auf die Variable x_n bezüglichen Grössen, d. h. alle, die mindestens einen Index n haben, weglässt. Es kann also nach den früheren Betrachtungen auch D_{n-1} nicht verschwinden; dasselbe ergiebt sich für D_{n-2} aus der Betrachtung der Form

$$\psi(x_1, x_2, \ldots x_{n-2}, 0, 0) = \psi_0(x_{r+1}, \ldots x_{n-2}, 0, 0)$$

bei den Bedingungsgleichungen

$$b_{\varrho 1} x_1 + b_{\varrho 2} x_2 + \cdots b_{\varrho, n-2} x_{n-2} = 0$$

u. s. f. Die sämmtlichen Grössen

$$D_n, D_{n-1}, \ldots D_{r+1}, D_r$$

sind also von Null verschieden bei der Annahme (8); für D_r folgt dies aus der Gleichung (1).

Wenn dagegen die Ungleichung (8) nicht gilt, so giebt es bei den eingeführten Voraussetzungen jedenfalls eine derartige Permutation (i) der Zahlen $1, 2, \ldots n$, dass anstatt jener die Ungleichung

$$\sum \pm b_{i_1 i_1} b_{i_2 i_2} \ldots b_{i_r i_r} \gtrless 0$$

besteht. Alsdann braucht man in der durchgeführten Deduction nur x_ν durch x_{i_ν} zu ersetzen, womit nach § 1 jede Grösse D_μ in $D_\mu^{(i)}$ übergeht; das erhaltene Resultat ergiebt also, dass mindestens eine Permutation (i) existirt, bei welcher die Grössen

$$D_n^{(i)} = D_n, D_{n-1}^{(i)}, D_{n-2}^{(i)}, \ldots D_r^{(i)} \tag{9}$$

von Null verschieden sind.

Richelot hat nun gezeigt*), dass die Form ψ bei den Bedingungen (7) definit ist, wenn die Grössen

*) Bemerkungen zur Theorie der Maxima und Minima, Astronomische Nachrichten Bd. XLVIII S. 272, Nr. 1146 (1858).

$$\frac{D_n}{D_{n-1}}, \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}, \cdots \frac{D_{r+1}}{D_r}$$

dasselbe Vorzeichen besitzen, welches dann auch das der Form ψ ist. Seine Argumentation ergiebt auch das umgekehrte Resultat, wenn man, wie er es stillschweigends thut, annimmt, dass keine der Grössen $D_n, D_{n-1}, \ldots D_r$ verschwindet. Stellt man hiermit den soeben bewiesenen Satz über die Grössen (9) zusammen, so folgt, dass die Form ψ dann und nur dann bei den Bedingungsgleichungen (7) definit ist, wenn eine Permutation (i) existirt, für welche die Grössen

$$\frac{D_n}{D^{(i)}_{n-1}}, \frac{D^{(i)}_{n-1}}{D^{(i)}_{n-2}}, \cdots \frac{D^{(i)}_{r+1}}{D^{(i)}_r}$$

endlich und von gleichem Vorzeichen sind; letzteres stimmt dann mit dem der Form ψ überein. Dieser Satz bleibt für $r = 0$ ungeändert, wenn man setzt

$$D^{(i)}_0 = 1; \tag{10}$$

man erhält dann das Jacobi'sche Kennzeichen der definiten quadratischen Form mit unabhängigen Argumenten*).

Um genauer zu discutiren, gehen wir davon aus, dass $D^{(i)}_r$ nach der Formel (1) das Vorzeichen von $(-1)^r$ hat, und die Gleichung (10) dasselbe für $r=0$ ergiebt; je nachdem also ψ eine positive oder negative Form ist, haben die Grössen (9) alle dasselbe Vorzeichen wie $(-1)^r$ oder sind abwechselnd positiv und negativ; im letzteren Falle ist

$$(-1)^n D_n > 0. \tag{11}$$

Sodann zeigen die Formeln (6), dass auch die Grössen

$$D^{(i)}_{n+1}, D^{(i)}_{n+2}, \ldots D^{(i)}_{2n}$$

von Null verschieden sind, wenn dies von den Grössen $e^{(i)}$ gilt; sind alle Grössen (9) positiv, so gilt dasselbe von allen Grössen $D^{(i)}_{n+\sigma}$, wenn man allgemein

$$e^{(i)}_\sigma > 0 \tag{12}$$

voraussetzt. Sind alle Grössen (9) negativ, so gilt dasselbe von den Grössen $D^{(i)}_{n+\sigma}$, wenn allgemein

$$e^{(i)}_\sigma (-1)^\sigma > 0 \tag{13}$$

angenommen wird. Sind endlich die Grössen (9) von abwechselndem Vorzeichen, so folgt dasselbe für $D^{(i)}_{n+\sigma}$ aus den Annahmen (12) oder (13), je nachdem D_n negativ oder positiv, d. h. nach (11) je nachdem n ungerade oder gerade ist.

---

*) Weber, Lehrbuch der Algebra (2. Aufl.) § 89 S. 296.

Diese Resultate benutzen wir zur Discussion der Form

$$\varphi = \sum_{\mu=1}^{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu ,$$

welche bei den Bedingungsgleichungen

$$(14) \qquad b_{\varrho 1} x_1 + b_{\varrho 2} x_2 + \cdots + b_{\varrho, 2n} x_{2n} = 0, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots n)$$

nach Richelot definit ist, wenn die $2n - r + 1$ Grössen

$$D_{2n}, \; D^{(\prime)}_{2n-1}, \ldots D^{(\prime)}_{r}$$

alle von dem Vorzeichen der Grösse $(-1)^r$ oder abwechselnd positiv und negativ sind; wenn also die $n - r + 1$ Grössen (9) alle das Vorzeichen von $(-1)^r$ haben, und die Ungleichungen (12) oder (13) bestehen, je nachdem r gerade oder ungerade ist, so ist φ eine bei den Bedingungen (14) definite Form. Dasselbe gilt nach der Formel (11), wenn die Zeichen der Reihe (9) abwechseln, und die Ungleichungen (12) oder (13) gelten, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Andrerseits bestehen die Relationen (12) oder (13), je nachdem die Form

$$E = \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{n} E_{n+\sigma, n+\tau} u_\sigma u_\tau$$

bei unabhängigen Argumenten definit positiv oder definit negativ ist; man kann also das Ergebniss der Untersuchung in folgender Weise formuliren.

Die Form φ ist bei den Bedingungen (14) *definit positiv, wenn dasselbe von der Form ψ bei den Bedingungen* (7) *gilt, und E eine definit positive oder negative Form ist, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Die Form φ ist bei den Bedingungen* (14) *definit negativ, wenn dasselbe von der Form ψ bei den Bedingungen* (7) *gilt, und die Form E definit positiv oder negativ ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist.*

§ 3.

Quadratische Formen mit variablen Coefficienten.

Ist die Form

$$\chi = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} c_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

definit positiv, so ist das Minimum ihrer Werthe unter der Bedingung

$$(15) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

die kleinste Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11}-v & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{12}-v & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-v \end{vmatrix} = 0,$$

also eine algebraische Function ihrer Coefficienten. Sind diese daher in dem Intervall

$$a \leqq x \leqq b \tag{16}$$

stetige Functionen von x, so gilt dasselbe von dem bezeichneten Minimum. Hört die Form χ für keinen dem Intervall angehörigen Werth von x auf, definit zu sein, so hat ihr Minimum eine von Null verschiedene untere Grenze; denn als stetige Function von x muss es seine untere Grenze erreichen, was, wenn diese Null wäre, den Voraussetzungen widerspräche. Es giebt also eine derartige positive Grösse γ, dass für alle der Ungleichung (16) genügenden Werthe von x bei der Annahme (15)

$$\chi > \gamma.$$

Man kann dies Resultat auch so aussprechen, dass die Ungleichung

$$\chi > \gamma(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

bei beliebigen Werthen x_ν, welche nicht sämmtlich verschwinden, besteht.

Es seien nun die in § 2 betrachteten Grössen $a_{\mu\nu}$, $b_{\varrho\nu}$ in dem Intervall (16) stetige, und zwar reguläre analytische Functionen von x. Wir untersuchen eine Potenzreihe

$$\Phi = \psi(u_1, u_2, \ldots u_n) + R,$$

deren Argumente den Bedingungsgleichungen

$$b_{\varrho 1}u_1 + b_{\varrho 2}u_2 + \cdots + b_{\varrho n}u_n + R_\varrho = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r) \tag{17}$$

unterworfen sind. Dabei seien R, R_ϱ Potenzreihen, R enthalte die Grössen u_ν nur in mindestens dritter, R_ϱ nur in mindestens zweiter Dimension; ihre Coefficienten seien unter der Annahme (16) reguläre analytische Functionen von x und die Reihen mögen für jeden dieser Werthe von x einen nicht verschwindenden Convergenzbereich besitzen. Ferner sei, unter γ_0 eine positive Constante verstanden, für das ganze Intervall von a bis b

$$\left| \sum \pm b_{11} b_{22} \ldots b_{rr} \right| > \gamma_0. \tag{18}$$

Alsdann können die Gleichungen (17) nach den ersten r Grössen u_ν aufgelöst werden; für diese erhält man Potenzreihen der übrigen $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots u_n$, deren lineare Glieder dieselben sind, wie wenn die Reihen R_ϱ identisch verschwinden, und die für jeden der Bedingung (16)

nügenden Werth von x einen nicht verschwindenden Convergenzreich besitzen. Dasselbe gilt von der Reihe

$$\Phi = \psi_0(u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots u_n) + R_0,$$

welche Φ durch Substitution jener Reihen für $u_1, u_2, \ldots u_r$ übereht; ψ_0 hat, wenn R_0 nur Glieder von mindestens dritter Dimension nthält, dieselbe Bedeutung wie in § 2, ist also eine definit positive orm, wenn dies von der Form ψ bei den Bedingungsgleichungen

$$b_{\varrho 1} u_1 + b_{\varrho 2} u_2 + \cdots + b_{\varrho n} u_n = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

ilt, was wir für das Intervall von a bis b voraussetzen. Man kann aher auf ψ_0 die für die Form χ durchgeführten Entwicklungen anenden, und schliessen, dass bei passender Wahl der positiven Conanten γ die Ungleichung

19) $$\psi_0(u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots u_n) > \gamma\,(u_{r+1}^2 + u_{r+2}^2 + \cdots + u_n^2)$$

nter der Annahme (16) besteht, sobald mindestens eine der Grössen $_{+1}, u_{r+2}, \ldots u_n$ nicht verschwindet.

Die Reihe R_0 convergire nun für einen bestimmten Werth von x, obald die Ungleichungen

$$|u_\nu| < \varepsilon_x \qquad (\nu = r+1, r+2, \ldots n)$$

estehen; ε_x sei eine positive Grösse und η_x die obere Grenze aller öglichen, bei dem betrachteten Werthe von x zulässigen Grössen ε_x. lätte nun η_x, wenn x das Intervall von a bis b durchläuft, die untere renze Null, so gäbe es einen diesem Intervall angehörigen Werth x_0 on der Beschaffenheit, dass in beliebiger Nähe desselben die Grössen $_x$ beliebig klein würden. Nun kann die Reihe R_0, da ihre Coefficienten nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt werden können, auch ls Potenzreihe der $n - r + 1$ Argumente $x - x_0$, $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots u_n$ argestellt werden, und convergirt in dieser Gestalt, wenn die Unleichungen

$$|x - x_0| < \eta_0, \quad |u_\nu| < \eta_0, \qquad (\nu = r+1, r+2, \ldots n)$$

ei passender Wahl der positiven Grösse η_0 bestehen. Dann wäre ber für alle der ersten Ungleichung genügenden Werthe von x offenbar

$$\eta_x \geqq \eta_0,$$

as der Definition der Stelle x_0 widerspricht. Es giebt daher eine ositive Constante γ_1 von der Beschaffenheit, dass im ganzen Gebiet (16)

$$\eta_x > \gamma_1,$$

nd die Reihe R_0 convergirt, sobald

$$|u_\nu| \leqq \gamma_1; \qquad (\nu = r+1, r+2, \ldots n).$$

abei ist es gleichgültig, ob die Grössen u_ν reell oder complex sind. iese Ungleichung definirt daher zusammen mit der Relation (16) ein ebiet im Bereich der Grössen x, u_{r+1}, u_{r+2}, ... u_n von der Beschaffen-

heit, dass R_0 im Innern und auf der Grenze desselben sich regulär verhält, also endlich und stetig ist, dass daher $|R_0|$ in diesem Gebiet eine endliche obere Grenze G besitzt. Hieraus folgt, wenn man entwickelt

$$R_0 = \sum C_{\nu_1 \nu_2 \dots} u_{r+1}^{\nu_1} u_{r+2}^{\nu_2} \dots,$$

nach einem bekannten Satze der Functionentheorie*) die Ungleichung

$$|C_{\nu_1 \nu_2 \dots}| < G \gamma_1^{-\nu_1 - \nu_2 - \dots},$$

also

$$|R_0| < G \sum \left|\frac{u_{r+1}}{\gamma_1}\right|^{\nu_1} \left|\frac{u_{r+2}}{\gamma_1}\right|^{\nu_2} \dots, \tag{21}$$

wobei rechts über alle Combinationen der Zahlen $\nu_1, \nu_2 \dots$ zu summiren ist, in welchen

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots \geqq 3.$$

Dividirt man daher die Reihe rechts durch die Summe

$$\frac{1}{\gamma_1^2}(u_{r+1}^2 + u_{r+2}^2 + \dots) = s,$$

und trennt in jedem Gliede einen Bruch

$$\frac{|u_\mu u_\nu|}{\gamma_1^2 s}$$

als Coefficienten von den andern Factoren ab, so erhält man eine Potenzreihe der Argumente

$$\frac{|u_{r+1}|}{\gamma_1}, \frac{|u_{r+2}|}{\gamma_1}, \dots,$$

deren Coefficienten dem absoluten Betrage nach nicht grösser als Eins sind, und welche mit linearen Gliedern beginnt; der Werth derselben wird also, wenn

$$|u_\nu| < \varepsilon, \qquad (\nu = r+1, r+2, \dots n) \tag{22}$$

mit ε zugleich unendlich klein. Die Ungleichung (21) ergiebt bei dieser Voraussetzung, wenn M eine von x unabhängige Grösse bedeutet,

$$\frac{|R_0|}{u_{r+1}^2 + u_{r+2}^2 + \dots + u_n^2} < M,$$

wobei offenbar

$$\lim_{\varepsilon = 0} M = 0.$$

Andererseits hat man nach der Formel (19)

$$\frac{\psi_0(u_{r+1}, u_{r+2}, \dots u_n)}{u_{r+1}^2 + u_{r+2}^2 + \dots + u_n^2} > \gamma;$$

*) Weierstrass, Zur Theorie der Potenzreihen, Math. Werke Bd. I S. 68.

es giebt also eine solche positive Constante ε, dass die Grösse

$$\frac{\psi_0(u_{r+1}, u_{r+2}, \dots u_n) + R_0}{u_{r+1}^2 + u_{r+2}^2 + \dots + u_n^2},$$

mithin auch ihr Zähler, d. h. die Grösse Φ für jeden dem Intervall von a bis b angehörigen Werth von x positiv ist, sobald die Relationen (22) gelten. Versteht man daher unter u_ν stetige Functionen von x, welche in dem bezeichneten Intervall dem absoluten Betrage nach kleiner als ε sind, so ergiebt sich

$$\int_a^b \Phi dx > 0. \tag{23}$$

Dieses Resultat kann noch von der Bedingung (18) befreit werden, wenn nur die Gleichungen (17) für das ganze Intervall (16) von einander unabhängig sind. Dann hat in ihm jede Determinante

$$\sum \pm b_{i_1 i_1} b_{i_2 i_2} \dots b_{i_r i_r} \tag{24}$$

nur eine endliche Anzahl von Nullstellen, da sie sich überall regulär verhält, und jedenfalls können nicht alle diese Ausdrücke identisch verschwinden. Man kann daher das Intervall von a bis b in eine endliche Anzahl derartiger Theile zerlegen, dass in jedem von ihnen mindestens eine der Determinanten (24) dem absoluten Betrage nach oberhalb einer positiven Constanten verbleibt. Für jedes Theilintervall liefert die durchgeführte Schlussreihe, in welcher nur $u_1, u_2, \dots u_r$ durch r andere Grössen u_ν ersetzt zu werden brauchen, die Ungleichung (23), welche damit für das ganze Intervall von a bis b bewiesen ist.

Berücksichtigt man endlich, dass offenbar den obigen entsprechende Entwicklungen für eine definit negative Form ψ gelten, so kann man die Ergebnisse dieses Paragraphen in folgendem Satze zusammenfassen.

Die Coefficienten der quadratischen Form $\psi(x_1, x_2, \dots x_n)$ seien ebenso wie die Grössen $b_{\varrho\nu}$ in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ reguläre analytische Functionen von x; für diese Werthe von x sei die Form ψ definit bei den Bedingungsgleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\varrho\nu} x_\nu = 0, \qquad (\varrho = 1, 2, \dots r)$$

und diese seien linear unabhängig. Sind dann R, R_ϱ Potenzreihen der Argumente $u_1, u_2, \dots u_n$, deren Coefficienten in dem Intervall von a bis b reguläre analytische Functionen von x sind, und beginnt R_ϱ mit quadratischen, R mit cubischen Gliedern; sind ferner u_ν in dem be-

zeichneten Intervall stetige Functionen von x, welche nicht sämmtlich identisch verschwinden und den Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\varrho\nu} u_\nu + R_\varrho = 0, \qquad (\varrho = 1, 2, \dots r)$$

unterworfen sind; so giebt es eine positive Constante ε von der Beschaffenheit, dass die Grösse

$$\int_a^b dx \left(\psi(u_1, u_2, \dots u_n) + R\right)$$

das Vorzeichen der Form ψ hat, sobald in dem Intervall von a bis b die Ungleichungen

$$|u_\nu| < \varepsilon$$

bestehen.

§ 4.

Neue Transformation der zweiten Variation.

Nothwendige Bedingungen dafür, dass das Integral

$$J = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \dots y_n, y_1', y_2', \dots y_n') dx$$

ein Extremum sei, wenn die Unbekannten den Bedingungsgleichungen

$$\varphi_\varrho(x, y_1, \dots y_n, y_1', \dots y_n') = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \dots r) \tag{25}$$

unterworfen und ihre Werthe für $x = a$ und $x = b$ gegeben sind, bestehen bekanntlich in den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_\nu} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_\nu'} = 0, \tag{26}$$

in welchen

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_r \varphi_r$$

gesetzt ist; f und φ_ϱ seien analytische Functionen ihrer Argumente. Ein bestimmtes System von Lösungen der Gleichungen (25) und (26) sei

$$y_\nu = \bar{y}_\nu, \ \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho;$$

und die Substitution derselben in irgend einen Ausdruck werde stets durch Ueberstreichen angezeigt. Die Functionen $\bar{y}_\nu$, $\bar{\lambda}_\varrho$ seien in dem reellen Intervall

$$a \leqq x \leqq b, \tag{27}$$

die Functionen f und φ_ϱ in der Umgebung jedes Werthsystems

$$(x, \bar{y}_1, \dots \bar{y}_n, \bar{y}_1', \dots \bar{y}_n')$$

regulär, wenn x dem bezeichneten Intervalle angehört.

Es seien nun δy_ν irgend welche nebst ihren Ableitungen $\delta y_\nu'$ stetige
nctionen von x, die für $x = a$ und $x = b$ verschwinden, und den
eichungen

$$8) \quad \varphi_\varrho(x, \bar{y}_1 + \delta y_1, \ldots \bar{y}_n + \delta y_n, \bar{y}_1' + \delta y_1', \ldots \bar{y}_n' + \delta y_n') = 0$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

nügen. Das Integral $\bar{J}$ ist dann ein Extremum, wenn die Grösse

$$\Delta = \int_a^b dx \big[f(x, \bar{y}_1 + \delta y_1, \ldots \bar{y}_n + \delta y_n, \bar{y}_1' + \delta y_1', \ldots \bar{y}_n' + \delta y_n') - f(x, \bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n, \bar{y}_1', \ldots \bar{y}_n') \big]$$

n festes Vorzeichen besitzt, so lange die absoluten Werthe der
ariationen δy_ν, $\delta y_\nu'$ unter einer gewissen Grenze liegen. In diesem
usdruck kann man auf Grund der Gleichungen (25) und (28) das
nctionszeichen f durch F ersetzen, und bei den eingeführten
oraussetzungen den Integranden nach Potenzen der Variationen
twickeln, wenn diese dem absoluten Betrage nach hinreichend klein
nd; dabei verschwinden die Glieder erster Dimension nach (26) und
ergiebt sich

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_a^b dx \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \Big\{ \overline{\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu \partial y_\nu}} \delta y_\mu \delta y_\nu + 2 \overline{\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu \partial y_\nu'}} \delta y_\mu \delta y_\nu' + \overline{\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu' \partial y_\nu'}} \delta y_\mu' \delta y_\nu' \Big\} + \int_a^b R dx,$$

enn man unter R eine Potenzreihe der Argumente δy_ν, $\delta y_\nu'$ versteht,
ren Coefficienten in dem Intervall (27) reguläre analytische Func-
nen von x sind, und welche die Variationen nur in mindestens
itter Dimension enthält. Sind ferner R_ϱ Reihen von derselben Be-
haffenheit, die aber auch quadratische Glieder enthalten können, so
nn man die Gleichungen (28) in folgende Gestalt bringen

$$8) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \Big(\overline{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu}} \delta y_\nu + \overline{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu'}} \delta y_\nu' \Big) + R_\varrho = 0,$$

d die Reihen R, R_ϱ haben dieselben Eigenschaften wie die ebenso
zeichneten in § 3.

Eine weitere Umformung der Grösse Δ ergiebt, wenn $\beta_{\mu\nu} = \beta_{\nu\mu}$,
e Gleichung

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{\mu\nu} \delta y_\mu \delta y_\nu \, . \, dx = 0,$$

welche, da die Grössen δy_ν an den Integrationsgrenzen verschwinden, sicher besteht, sobald die Grössen $\beta_{\mu\nu}$ irgend welche im Intervall von a bis b reguläre analytische Functionen von x sind. Subtrahirt man daher diesen Ausdruck von Δ und setzt, indem man unter μ, ν Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots n$ versteht

$$a_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu' \partial y_\nu'}, \quad a_{n+\mu,\nu} = a_{\nu,n+\mu} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu \partial y_\nu'} - \beta_{\mu\nu},$$

$$a_{n+\mu,n+\nu} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu \partial y_\nu} - \frac{d\beta_{\mu\nu}}{dx},$$

$$b_{\varrho\nu} = \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu'}, \quad b_{\varrho,n+\nu} = \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu},$$

$$\varphi(\delta y, \delta y') = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu \partial y_\nu}\delta y_\mu \delta y_\nu + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu \partial y_\nu'}\delta y_\mu \delta y_\nu' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu' \partial y_\nu'}\delta y_\mu' \delta y_\nu'\right\} - \frac{d}{dx}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\beta_{\mu\nu}\delta y_\mu \delta y_\nu,$$

sodass die Form φ dasselbe Coefficientensystem erhält wie die ebenso bezeichnete in § 2, und die Indices $1, 2, \ldots n$ den Argumenten $\delta y_\nu'$, die folgenden den Argumenten δy_ν entsprechen, so ergiebt sich

$$\Delta = \frac{1}{2}\int_a^b dx\,\big(\varphi(\delta y, \delta y') + 2R\big),$$

und die Gleichungen (28) werden geschrieben

$$\sum_{\nu=1}^{n}(b_{\varrho\nu}\delta y_\nu' + b_{\varrho,n+\nu}\delta y_\nu) + R_\varrho = 0. \tag{29}$$

Es sei nun, wenn x dem Intervall von a bis b angehört, stets mindestens eine aus dem System der Grössen $b_{\varrho\nu}$ gebildete Determinante r^{ter} Ordnung von Null verschieden. Dann haben die Gleichungen (28) die in § 3 von den Gleichungen (17) verlangten Eigenschaften; ersetzt man die Form ψ durch φ und die n Grössen u_ν durch die $2n$ Variationen δy_ν, $\delta y_\nu'$, die wie erstere stetige Functionen von x sind, so lehrt der dort erhaltene Satz Folgendes. Gelingt es, die Grössen $\beta_{\mu\nu}$ in dem Intervall von a bis b als reguläre analytische Functionen von x so zu bestimmen, dass die Form $\varphi(\varepsilon, \varepsilon')$ in diesem Intervall überall definit ist bei den Bedingungsgleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n}(b_{\varrho\nu}\varepsilon_\nu' + b_{\varrho,n+\nu}\varepsilon_\nu) = 0, \tag{30}$$

so giebt es eine solche positive Constante ε, dass die Grösse Δ ein

festes Vorzeichen, und zwar das der Form φ hat, sobald die Gleichungen (28) bestehen und die Grössen $|\delta y_\nu|$, $|\delta y_\nu'|$ kleiner als ε sind.

Die Clebsch-Mayer'sche Theorie der zweiten Variation strebt nicht die bezeichnete Eigenschaft der Function φ herbeizuführen, sondern in ihr die Anzahl der Variablen zu vermindern; ist dies erreicht, so ist die Form φ sogar sicher nicht in dem angegebenen Sinne definit. Mayer*) setzt, indem er unter z_ν willkürliche Functionen versteht, folgende Gleichungen an

$$\varphi(z, z') = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu + \sum_{\varrho=1}^{r}\Psi_\varrho \sum_{\nu=1}^{n}(b_{\varrho\nu}z_\nu' + b_{\varrho,n+\nu}z_\nu),$$

$$\Psi_\varrho = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu^\varrho z_\nu,\quad \omega_\mu = \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu^\mu z_\nu + z_\mu',\quad \sum_{\nu=1}^{n}(b_{\varrho\nu}z_\nu' + b_{\varrho,n+\nu}z_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\varrho\nu}\omega_\nu,$$

aus denen sich, indem man nach z_ν und z_ν' partiell differenzirt, für $\tau = 1, 2, \ldots n$ ergiebt

$$a_{n+\mu,n+\nu} = \sum_{\sigma=1}^{n} a_{n+\mu,\sigma}\alpha_\nu^\sigma + \sum_{\varrho=1}^{r} C_\nu^\varrho b_{\varrho,n+\mu},$$

$$a_{n+\nu,\tau} = \sum_{\sigma=1}^{n} a_{\sigma\tau}\alpha_\nu^\sigma \quad + \sum_{\varrho=1}^{r} C_\nu^\varrho b_{\varrho\tau},$$

$$b_{\varrho_1,n+\nu} = \sum_{\sigma=1}^{n} b_{\varrho_1\sigma}\alpha_\nu^\sigma,$$

entsprechend den Gleichungen (21), (22), (23) bei Mayer. Hält man hier die Zahlen μ, ν fest und setzt successive $\tau = 1, 2, \ldots n$, $\varrho_1 = 1, 2, \ldots r$, so erhält man $n + r + 1$ Gleichungen, aus denen die Grössen $\alpha_\nu^1, \alpha_\nu^2, \ldots \alpha_\nu^n, C_\nu^1, C_\nu^2, \ldots C_\nu^r$ eliminirt werden können, und das Resultat der Elimination ist in unsrer Bezeichnung einfach

$$E_{n+\mu,n+\nu} = 0, \tag{31}$$

eine Gleichung, die auch bei Clebsch ausführlich geschrieben vorkommt**), und $\frac{1}{2}n(n+1)$ Differentialgleichungen mit ebenso vielen Unbekannten $\beta_{\mu\nu}$ repräsentirt. Haben diese Gleichungen ein System von Lösungen (S), welche sich in dem Intervall von a bis b einschliesslich

*) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale (Leipzig 1866) S. 10.

**) Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten. Crelle's Journal Bd. LV S. 355.

der Grenzen regulär verhalten, so ist die Clebsch-Mayer'sche Transformation der zweiten Variation von J möglich; umgekehrt liefert diese Transformation stets, wenn die Grössen β im Integrationsintervall ein reguläres Verhalten zeigen, ein Integralsystem von der angegebenen Beschaffenheit.

Die Gleichungen (31) sind nun ein besonderer Fall des folgenden Systems

$$E_{n+\mu,n+\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}, \quad \frac{d\varepsilon_{\mu\nu}}{dx} = 0.$$

Da die ersten von diesen von den Ableitungen der Unbekannten nur $\frac{d\beta_{\mu\nu}}{dx}$ mit dem Factor $-D_n$ enthalten, so ergeben sich aus ihnen, wenn für das Intervall von a bis b die Ungleichung

$$D_n \gtrless 0 \tag{32}$$

vorausgesetzt wird, für die Ableitungen der Unbekannten Ausdrücke durch x und die Unbekannten selbst, welche sich in der Umgebung einer Stelle $(x, \beta_{\mu\nu}, \varepsilon_{\mu\nu})$ regulär verhalten, sobald nur x dem Intervall von a bis b angehört. Daraus folgt, wie ich gezeigt habe*), dass jedes System von Integralen dieser Gleichungen, dessen Integrationsconstanten sich von denen eines bestimmten Systems (S) hinreichend wenig unterscheiden, sich in dem Intervall von a bis b regulär verhält, wenn dies von (S) gilt. Für (S) kann man nun, wenn die Clebsch-Mayer'sche Transformation möglich ist, die oben ebenso bezeichneten Lösungen der Gleichungen (31) nehmen, indem man die Werthe $\varepsilon_{\mu\nu} = 0$ hinzufügt; dann ergiebt sich, dass die Gleichungen

$$E_{n+\mu,n+\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}, \tag{33}$$

wenn $\varepsilon_{\mu\nu}$ Constante von hinreichend kleinem absolutem Betrage sind, ein System von Lösungen besitzen, die sich im Intervall von a bis b regulär verhalten. Benutzt man dieses zur Bildung der Grössen a, so hat die Form φ die Eigenschaften, bei welchen der oben angegebene Zusammenhang zwischen ihren Vorzeichen und dem der Grösse Δ stattfindet, und es bleibt nur zu untersuchen, ob $\varphi(\varepsilon, \varepsilon')$ bei den Bedingungen (30) definit gemacht werden kann.

Hierzu kommt man durch angemessene Wahl der Grössen ε. Setzt man nämlich voraus, dass die Form

$$\psi = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}u_\mu u_\nu = \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu} u_\mu u_\nu$$

bei den Bedingungen

*) Zur Variationsrechnung, Bd. L dieser Annalen S. 31.

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\varrho\nu} u_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \overline{\varphi_\varrho}}{\partial y'_\nu} u_\nu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

definit sei, womit auch die Ungleichung (32) gefordert wird, so kann man nach § 2 über die Grössen $\varepsilon_{\mu\nu}$ in jedem Falle so verfügen, dass die Form

$$\varphi = \sum_{\mu=1}^{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$$

bei den Bedingungen

$$\sum_{\nu=1}^{2n} b_{\varrho\nu} u_\nu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

definit ist, und dasselbe Vorzeichen wie ψ hat. Ist letzteres z. B. das positive, so braucht man nur, wenn $\mu \gtrless \nu$,

$$\varepsilon_{\mu\nu} = 0$$

zu setzen, die Grössen $\varepsilon_{\mu\mu}$ aber positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Daraus folgt nach dem oben bemerkten, dass die Grösse Δ bei allen in Betracht kommenden Variationen δy_ν, welche ebenso wie ihre Ableitungen $\delta y'_\nu$ dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze ε liegen, ein festes Vorzeichen besitzt. *In dem hierdurch bestimmten Sinne macht also die betrachtete Mannigfaltigkeit* $(x, \bar{y}_\nu)$ *das Integral* J *sicher zu einem Extremum, wenn die Clebsch-Mayer'sche Transformation in der Weise möglich ist, dass die Grössen* $\beta_{\mu\nu}$ *in dem ganzen Integrationsintervall reguläre analytische Functionen von* x *sind.*

Der durchgeführte Beweis verhält sich zu der älteren Theorie der zweiten Variation ähnlich, wie die modificirte Darstellung, welche Lagrange in seiner Theorie der analytischen Functionen*) von der Legendre'schen Theorie der zweiten Variation giebt, zu der ursprünglichen Gestalt derselben. Legendre bringt nämlich die zweite Variation des Integrals

$$\int f(x, y, y')\, dx$$

in die Form

$$(34) \qquad \int dx \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \delta y'^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - \beta \right) \delta y \delta y' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\beta}{dx} \right) \delta y^2 \right\}$$

und setzt

$$(35) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\beta}{dx} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - \beta \right)^2 = 0;$$

*) Oeuvres Bd. IX S. 204.

Lagrange dagegen bemerkt, dass die linke Seite dieser Gleichung nur positiv zu sein braucht, um das Vorzeichen der zweiten Variation unmittelbar kenntlich zu machen. Dann ist der Integrand in dem Ausdruck (34) nicht, wie bei Legendre, ein Quadrat, sondern eine definite Form von zwei Argumenten, und wenn man auf die rechte Seite der Gleichung (35) eine positive Constante setzt, erhält man den einfachsten Fall des Systems (33). Dass diese Bemerkung von Lagrange in den einfachsten Fällen zu einer strengen Ableitung hinreichender Bedingungen des Extremums führt, habe ich schon vor einiger Zeit bewiesen*).

§ 5.

Die hinreichenden Bedingungen des Extremums.

Um das in § 4 erhaltene Resultat in seine endgültige Form bringen zu können, müssen wir eine kurze Betrachtung über die allgemeine Auflösung der Differentialgleichungen des Problems $\delta J = 0$ d. h. der Gleichungen (25), (26) und die Abhängigkeit ihrer Integrale von den Integrationsconstanten einschalten.

Wir setzen $y_\nu' = p_\nu$, bezeichnen durch y ohne Index das System aller n Grössen y_ν und geben den Buchstaben p, λ ohne Index die entsprechende Bedeutung. Die Functionen f und φ_ϱ seien regulär, wenn das Argumentsystem (x, y, p) einem gewissen Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört; schreibt man, was offenbar möglich ist, die Gleichungen (26) in der Form

$$(36) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial p_\mu \partial p_\nu} p_\nu' + \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial p_\mu} \lambda_\varrho' + F_\mu(x, y, p, \lambda) = 0,$$

wobei $\mu = 1, 2, \ldots n$ zu setzen ist, so sind F_μ lineare Functionen der Grössen λ, und die Coefficienten der letzteren im Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär. Dasselbe gilt von den Ausdrücken G_ϱ, wenn man die Gleichungen (25) differenzirt und das Resultat in folgender Form schreibt:

$$(37) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial p_\nu} p_\nu' + G_\varrho(x, y, p) = 0. \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

Versteht man unter D die Determinante der Coefficienten von p', λ' in den Gleichungen (36) und (37), so ist offenbar in der Bezeichnung des § 4

$$(38) \qquad \overline{D} = D_n.$$

Nennen wir ferner $\mathfrak{G}_1$ das Gebiet der Werthsysteme (x, y, p, λ), für

*) Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung Bd. VI, 1, S. 95; Referat eines auf der Naturforscherversammlung zu Braunschweig im September 1897 gehaltenen Vortrags.

welche D von Null verschieden, (x, y, p) aber eine Stelle des Gebiets $\mathfrak{G}$ ist, so sind im Gebiet $\mathfrak{G}_1$ die Gleichungen (36), (37) nach den Grössen p', λ' auflösbar, und man erhält

$$p'_\nu = H_\nu(x, y, p, \lambda), \quad (\nu = 1, 2, \ldots n) \tag{39}$$

$$\lambda'_\varrho = K_\varrho(x, y, p, \lambda), \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r) \tag{40}$$

wobei die rechten Seiten ebenfalls im Gebiet $\mathfrak{G}_1$ regulär sind.

Jetzt sei (0) eine Stelle dieses Gebiets, für welche alle Gleichungen (25), d. h. $\varphi_\varrho = 0$ bestehen; es giebt solche Stellen, wenn wir voraussetzen, dass D nicht bei allen diesen Gleichungen genügenden Werthsystemen (x, y, p) verschwindet. Es gelte ferner für (0) die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r)}{\partial(p_1, p_2, \ldots p_r)} \right| > 0; \tag{41}$$

dann können in der Umgebung dieser Stelle die Gleichungen (37) nach $p_1', p_2', \ldots p_r'$ aufgelöst werden; man kann daher die ersten r Gleichungen (39) durch die Gleichungen (37) ersetzen, und das System der Gleichungen (36), (37) ist gleichbedeutend mit dem der Gleichungen (37), (40) und

$$p'_{r+\sigma} = H_{r+\sigma}(x, y, p, \lambda). \quad (\sigma = 1, 2, \ldots n-r) \tag{42}$$

Man kann ferner bei der Annahme (41) die Gleichungen $\varphi_\varrho = 0$ nach $p_1, p_2, \ldots p_r$ auflösen, und erhalte

$$p_\varrho = \pi_\varrho(x, y, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots p_n); \tag{43}$$

hat man für die Stelle (0)

$$x = x_0, \quad y_\nu = Y_\nu^0, \quad p_\nu = P_\nu^0, \quad \lambda_\varrho = \Lambda_\varrho^0,$$

so sind die Functionen π_ϱ regulär in der Umgebung der Stelle

$$x = x_0, \; y = Y^0, \; p_{r+1} = P_{r+1}^0, \ldots p_n = P_n^0,$$

und nehmen in dieser selbst die Werthe $\pi_\varrho = P_\varrho^0$ an. Ersteres gilt also auch, wenn die Differenzen $|\lambda_\varrho - \Lambda_\varrho^0|$ hinreichend klein sind, von den Ausdrücken M_ν und N_ϱ, in welche H_ν und K_ϱ durch die Substitution (43) übergehen, und die Gleichungen (37), (40), (42) können durch folgendes System ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_\varrho}{dx} &= \pi_\varrho(x, y, p_{r+1}, \ldots p_n), \\
\frac{d\lambda_\varrho}{dx} &= N_\varrho(x, y, p_{r+1}, \ldots p_n, \lambda), \\
\frac{dp_{r+\sigma}}{dx} &= M_{r+\sigma}(x, y, p_{r+1}, \ldots p_n, \lambda), \\
\frac{dy_{r+\sigma}}{dx} &= p_{r+\sigma}. \\
&(\varrho = 1, 2, \ldots r, \; \sigma = 1, 2, \ldots n-r)
\end{aligned} \tag{44}$$

Hier treten nur die $2n$ Unbekannten y, λ, $p_{r+\sigma}$ und deren erste Ableitungen auf, und die Ausdrücke der letzteren sind regulär in der Umgebung der Stelle

$$x = x_0,\ y_\nu = Y_\nu^0,\ \lambda_\varrho = \Lambda_\varrho^0,\ p_{r+1} = P_{r+1}^0, \ldots p_n = P_n^0.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen ausser der ersten mögen der Reihe nach durch $C_1, C_2, \ldots C_{2n}$ bezeichnet werden; allgemein seien $c_1, c_2, \ldots c_{2n}$ die Werthe der Unbekannten y, λ, $p_{r+\sigma}$ für $x = x_0$.

Für $c_\nu = C_\nu$ erhalte man nun die Integrale Y_ν, Λ_r, $P_{r+\sigma}$, welche vom Punkte $x = x_0$ aus in der Ebene der complexen Zahlen x längs irgend einer Linie $\mathfrak{L}$ analytisch fortgesetzt seien; längs derselben sei immer D von Null verschieden, wenn man $y_\nu = Y_\nu$, $\lambda_\varrho = \Lambda_\varrho$ einsetzt. Soweit sich bei dieser Fortsetzung Werthsysteme (x, y, p, λ) ergeben, welche dem Gebiet $\mathfrak{G}_1$ angehören und der Ungleichung (41) genügen, sind die rechten Seiten der Gleichungen (44) regulär; es sei dies etwa der Fall bis zum Werth $x = x_1$ einschliesslich. Dann können längs dieser Strecke der Linie $\mathfrak{L}$ nach dem schon in § 4 citirten Satze auch alle Integralsysteme, für welche die Grössen $|c_\nu - C_\nu|$ eine gewisse Grenze nicht übersteigen, analytisch fortgesetzt werden, und die Werthe der $2n$ Grössen y_ν, λ_ϱ, $p_{r+\sigma}$ an einer bestimmten dieser Strecke angehörigen Stelle x_2 sind*) Functionen der Anfangswerthe c_ν, die sich in der Umgebung der Stelle $c_\nu = C_\nu$ regulär verhalten. Da nun, wenn allgemein die Substitution $x = x_\nu$ durch den oberen Index ν angedeutet wird, die Grössen y, λ, $p_{r+\sigma}$ als Potenzreihen der Argumente

$$x - x_2,\ y^{(2)} - Y^{(2)},\ \lambda^{(2)} - \Lambda^{(2)},\ p_{r+\sigma}^{(2)} - P_{r+\sigma}^{(2)}$$

dargestellt werden können, so sind sie als Functionen der Argumente x, c_ν in der Umgebung der Stelle x_2, C_ν regulär, und dasselbe gilt, da sie in dieser selbst die Werthe $Y^{(2)}$, $\Lambda^{(2)}$, $P_{r+\sigma}^{(2)}$ annehmen, nach den ersten Gleichungen (44) von $p_1, p_2, \ldots p_r$. Speciell sind die Grössen $y^{(1)}, \lambda^{(1)}, p^{(1)}$ in der Umgebung der Stelle $c_\nu = C_\nu$ reguläre Functionen der Argumente c_ν, und nehmen in dieser Stelle die Werthe $Y^{(1)}$, $\Lambda^{(1)}$, $P^{(1)}$ an.

Weiter gelte, wenn $i_1, i_2, \ldots i_n$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist, und $y = Y$ gesetzt wird, die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r)}{\partial(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots p_{i_r})} \right| > 0 \tag{45}$$

für $x = x_1$ und längs der Linie $\mathfrak{L}$ bis zum Punkte x_3 einschliesslich. Dann kann man auf dieses Stück die soeben durchgeführte Betrachtung übertragen, indem man $p_1, p_2, \ldots p_r$ durch $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots p_{i_r}$ ersetzt; liegt also x_4 auf $\mathfrak{L}$ zwischen x_1 und x_3, so sind die Grössen y, λ, p in der Umgebung der Stelle

$$x_4,\ Y^{(1)},\ \Lambda^{(1)},\ P_{i_{r+1}}^{(1)}, \ldots P_{i_n}^{(1)}$$

*) Bd. L dieser Annalen S. 32.

reguläre Functionen von x, $y^{(1)}$, $\lambda^{(1)}$, $p^{(1)}_{i_{r+1}}, \ldots p^{(1)}_{i_n}$, also nach dem Obigen auch reguläre Functionen der Argumente x, c_ν in der Umgebung der Stelle x_1, C_ν.

Um ähnliche Eigenschaften über den Punkt x_3 hinaus nachzuweisen, braucht man nur zu bedenken, dass jede Functionaldeterminante der Functionen φ_ϱ nach r Argumenten p, wenn man $y = Y$ substituirt, eine längs der Linie $\mathfrak{L}$ reguläre Function von x ist, also nur eine endliche Anzahl von Nullstellen auf dieser Linie besitzt. Wenn also die bezeichneten Determinanten in keinem Punkte der Linie $\mathfrak{L}$ sämmtlich zugleich verschwinden, so kann man diese in eine endliche Anzahl solcher Stücke theilen, dass in jedem von ihnen eine bestimmte Ungleichung (45) gilt, und je zwei aufeinanderfolgende in derselben Beziehung stehen wie die Strecken von x_0 bis x_1 und von x_1 bis x_2. Die für letztere abgeleiteten Eigenschaften der Functionen y, λ bleiben daher für die ganze Linie $\mathfrak{L}$ erhalten. Dabei ist offenbar die für $x = x_0$ vorausgesetzte Ungleichung (41) nur eine unwesentliche, durch Abänderung der Bezeichnung aufzuhebende Specialisirung.

In diesen Entwicklungen kann man speciell das Integralsystem Y, Λ durch die in § 4 definirten Functionen $\bar{y}$, $\bar{\lambda}$, und die Linie $\mathfrak{L}$ durch das reelle Intervall von a bis b ersetzen. Denn wird x auf dieses beschränkt, so ist nach den dort getroffenen Festsetzungen $(x, \bar{y}, \bar{p})$ eine Stelle des Gebiets $\mathfrak{G}$, $(x, \bar{y}, \bar{p}, \bar{\lambda})$ nach (38) und (32) eine Stelle des Gebiets $\mathfrak{G}_1$; *unter den in* § 4 *eingeführten Voraussetzungen ist also die Mannigfaltigkeit* $(x, \bar{y}, \bar{\lambda})$ *ein Individuum einer von* $2n$ *Constanten* c_ν *abhängenden Schaar.* Erhält man jene Mannigfaltigkeit, indem man $c_\nu = C_\nu$ setzt, so sind die allgemeineren Lösungen y, λ für hinreichend kleine Werthe der Differenzen $|c_\nu - C_\nu|$ längs der reellen Strecke von a bis b reguläre Functionen von $x, c_1, \ldots c_{2n}$. *Speciell also sind die Grössen*

$$\frac{\overline{\partial y}}{\partial c_\mu}, \quad \frac{\overline{\partial \lambda}}{\partial c_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots 2n)$$

in dem ganzen Intervall von a bis b reguläre analytische Functionen von x.

Hiermit stellen wir ein Hauptresultat der älteren Theorie der zweiten Variation zusammen*), dessen Ableitung von Extremumsbetrachtungen unabhängig und rein formaler Natur ist. Gewisse Integrale der für die Grössen $\beta_{\mu\nu}$ aufgestellten Differentialgleichungen (31) sind als Brüche darstellbar, deren Zähler ganze rationale Functionen der Grössen

*) Mayer, Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale, Crelle's Journal Bd. LXIX S. 247. 259.

$$\overline{\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu \partial p_\nu}},\quad \overline{\frac{\partial^2 F}{\partial p_\mu \partial p_\nu}},\quad \overline{\frac{\partial y_\nu}{\partial c_\mu}},\quad \overline{\frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial c_\mu}},\quad \overline{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial p_\nu}}$$

und ihrer Ableitungen mit constanten Coefficienten sind, und deren Nenner $\Delta(x, b_1)$ ist, wenn allgemein

$$\Delta(x, x_1) = \overline{\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots y_n, y_1^1, y_2^1, \ldots y_n^1)}{\partial(c_1, c_2, \ldots c_{2n})}}$$

gesetzt wird, der obere Index 1 wie vorher die Substitution $x = x_1$ bedeutet, und $b_1 - b$ eine beliebig kleine positive Grösse ist. Der Zähler ist daher nach dem, was theils vorausgesetzt, theils bewiesen worden ist, eine analytische Function von x, die sich im Intervall von a bis b regulär verhält. Dasselbe gilt zunächst von $\Delta(x, x_1)$, wenn beide Argumente jenem Intervall angehören; da nun aber die Grössen y^1 auch in der Umgebung der Stelle $x_1 = b$, $c_\nu = C_\nu$ reguläre Functionen der Argumente x_1, c_ν sind, so behalten sie diese Eigenschaft auch noch für gewisse Stellen, die aus der eben definirten durch Vergrösserung von b hervorgehen. Die Ableitungen $\frac{\partial y^1}{\partial c}$ sind daher auch für $x_1 = b_1$ endlich, die Grösse $\Delta(x, b_1)$ also, wenn $b_1 - b$ klein genug ist, für das ganze Intervall von a bis b regulär. Dasselbe gilt also von den erwähnten Ausdrücken $\beta_{\mu\nu}$, wenn die Grösse $\Delta(x, b_1)$ **für das Integrationsintervall von Null verschieden ist. Dazu genügt es, wie Mayer a. a. O. gezeigt hat, anzunehmen, dass $\Delta(a, x)$ für $a < x \leqq b$ niemals verschwinde. Erinnern wir uns nun des Hauptresultats in § 4, so kann das Ergebniss der ganzen Untersuchung in folgender Weise zusammengefasst werden.**

Um das Integral

$$J = \int_a^b f(x, y_1, \ldots y_n, y_1', \ldots y_n')\, dx$$

bei den Bedingungsgleichungen

$$(\mathfrak{A}) \qquad \varphi_\varrho(x, y_1, \ldots y_n, y_1', \ldots y_n') = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

zu einem Extremum zu machen, werde folgendes vorausgesetzt. 1) *Setzt man*

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r,$$

so seien

$$\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n, \ \bar{\lambda}_1, \ldots \bar{\lambda}_r$$

im Intervall von a bis b reguläre Functionen von x, welche den Gleichungen ($\mathfrak{A}$) *und*

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{\partial F}{\partial y_\nu} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_\nu'} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

nügen; die Substitution $y_\nu = \bar{y}_\nu$, $\lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho$ *werde allgemein durch Ueber-eichen angedeutet.* 2) *Die Functionen* f *und* φ_ϱ *seien analytisch und, nn* $a \leqq x \leqq b$, *in der Umgebung der Stelle* $(x, \bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n, \bar{y}_1', \ldots \bar{y}_n')$ *gulär. An jeder dieser Stellen sei mindestens eine Functionaldeter-inante der* r *Functionen* φ_ϱ *nach* r *Argumenten* y' *von Null ver-hieden.* 3) *Für eben diese Stellen habe die quadratische Form*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \overline{\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu' \partial y_\nu'}}\, u_\mu u_\nu$$

n festes Vorzeichen bei den Bedingungsgleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \overline{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu'}}\, u_\nu = 0, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

nd verschwinde unter diesen Bedingungen nur, wenn alle Argumente rschwinden. 4) *Bezeichnet man die unter den Bedingungen* 2), 3) *in r allgemeinen Lösung der Gleichungen* (𝔄), (𝔅) *auftretenden* $2n$ *Inte-rationsconstanten durch* $c_1, c_2, \ldots c_{2n}$, *und setzt für* $x = a$ *allgemein* $= y_\nu^0$, *so sei die Functionaldeterminante*

$$\overline{\frac{\partial (y_1^0, \ldots y_n^0, y_1, \ldots y_n)}{\partial (c_1, \ldots c_{2n})}}$$

r $a < x \leqq b$ *von Null verschieden.*

Alsdann giebt es eine positive Constante ε *von der Beschaffenheit, ass das Integral* $\bar{J}$ *einen Zuwachs von unveränderlichem Vorzeichen hält, wenn man* $\bar{y}_\nu$ *durch* $\bar{y}_\nu + \delta y_\nu$ *ersetzt und annimmt, dass letztere rössen für* y_ν *gesetzt den Gleichungen* (𝔄) *genügen, dass ferner die rössen* δy_ν *ebenso wie ihre Ableitungen* $\delta y_\nu'$ *stetige Functionen von* x *nd; dass endlich für* $x = a$ *und* $x = b$ *die Gleichungen* $\delta y_\nu = 0$, *in m ganzen Integrationsintervall aber die Ungleichungen*

$$|\delta y_\nu| < \varepsilon, \quad |\delta y_\nu'| < \varepsilon$$

stehen.

Untersuchung der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung vermittelst successiver Annäherungen.

Von

J. Horn in Charlottenburg.

In den Comptes rendus vom 17. Januar 1898 habe ich gezeigt, wie man durch eine geeignete Umgestaltung einer von Herrn Fuchs*) benutzten Methode successiver Annäherungen zu den Sätzen des Herrn Poincaré**) über die asymptotische Darstellung der irregulären Integrale linearer Differentialgleichungen durch die Thomé'schen Normalreihen gelangen kann***). Dass man nach ähnlicher Methode auch nicht lineare Differentialgleichungen behandeln kann, möchte ich zunächst an einem möglichst einfachen Beispiel zeigen.

Es liege die Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = F\left(\frac{1}{x}, y\right)$$

vor, deren rechte Seite in eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ und y entwickelbar ist, welche convergirt, wenn die absoluten Beträge dieser Grössen hinreichend klein sind. Ich setze der Einfachheit halber sämmtliche Grössen als reell voraus. Es sei

$$F(0, 0) = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=\infty, y=0} = a$$

von Null verschieden, so dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = \pm 1$ angenommen werden kann. Im Folgenden wird untersucht, wie sich die Integrale von (A) verhalten, wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht. Vermittelst successiver Annäherungen erhält man für diejenigen Integrale y, welche sich für $\lim x = +\infty$

*) Fuchs, Annali di Matematica 1870.

**) Poincaré, Am. Journ. Bd. 7, Act. math. Bd. 8.

***) Eine ausführlichere und allgemeinere Darstellung der in den Comptes rendus skizzirten Methode für lineare Differentialgleichungen werde ich an anderer Stelle geben.

der Grenze Null nähern, unendliche Reihen, welche für hinreichend grosse Werthe von x convergiren. Hieraus ergiebt sich die asymptotische Darstellung der bezeichneten Integrale durch die im allgemeinen divergente Potenzreihe

$$\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \cdots,$$

welche der Differentialgleichung (A) formell genügt, ein Satz, welchen ich im dritten Theil der Arbeit „Ueber das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle“*) nach einer von der jetzigen gänzlich verschiedenen Methode bewiesen habe. Das jetzige Verfahren lässt sich verallgemeinern und hat den Vortheil, dass eine convergente Entwicklung neben der divergenten Reihe erscheint.

§ 1.

Wir setzen

$$F\left(\frac{1}{x}, y\right) = ay + f\left(\frac{1}{x}, y\right),$$

so dass unsere Differentialgleichung lautet:

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = ay + f\left(\frac{1}{x}, y\right).$$

Es sei g eine beliebige positive Zahl, welche wir kleiner als 1 wählen. Da

$$f\left(\frac{1}{x}, y\right) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \gamma\frac{y}{x} + \delta y^2 + \cdots$$

ist, so lassen sich positive Grössen x_0 und h so bestimmen, dass für

$$x \geqq x_0, \quad |y| < h$$

$$\left|f\left(\frac{1}{x}, y\right)\right| < \frac{h}{2}$$

und für

$$x \geqq x_0, \quad |y| < h, \quad |y'| < h$$

$$\left|f\left(\frac{1}{x}, y'\right) - f\left(\frac{1}{x}, y\right)\right| < g|y' - y|$$

ist.

Wir ersetzen (A) durch die Kette von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

---

*) Crelle's Journ. Bd. 118, 119. Dort habe ich die allgemeinere Differentialgleichung

$$x^{-k}\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{1}{x}, y\right)$$

betrachtet und nur x auf reelle Werthe beschränkt, während die übrigen Grössen complex sein durften.

$$(A_m)\quad \frac{dy_m}{dx} = a y_m + f\left(\frac{1}{x},\, y_{m-1}\right) \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei $y_0 = 0$ angenommen wird, und schreiben

$$u_m = y_m - y_{m-1} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Erster Fall: $a = 1$.

Wir verstehen unter y_m das folgende particuläre Integral von (A_m)

$$y_m = e^x \int_{\infty}^{x} e^{-x} f\left(\frac{1}{x},\, y_{m-1}\right) dx,$$

so dass

$$u_m = e^x \int_{\infty}^{x} e^{-x} \left[f\left(\frac{1}{x},\, y_{m-1}\right) - f\left(\frac{1}{x},\, y_{m-2}\right)\right] dx$$

ist. Da man für $x \geqq x_0$

$$\left| f\left(\frac{1}{x},\, y_0\right)\right| = \left| f\left(\frac{1}{x},\, 0\right)\right| < \frac{h}{2} < h$$

hat, so ist

$$|y_1| < e^x \int_{x}^{\infty} e^{-x} h\, dx = h.$$

Wenn $|y_{m-1}| < h$ ist für $x \geqq x_0$, so ist

$$\left| f\left(\frac{1}{x},\, y_{m-1}\right)\right| < h,$$

folglich auch

$$|y_m| < h.$$

Wir hatten

$$|u_1| = |y_1| < h.$$

Ist für $x \geqq x_0$

$$|u_{m-1}| < g^{m-2} h,$$

so ist

$$\left| f\left(\frac{1}{x},\, y_{m-1}\right) - f\left(\frac{1}{x},\, y_{m-2}\right)\right| < g\,|y_{m-1} - y_{m-2}|$$
$$= g\,|u_{m-1}| < g^{m-1} h,$$

also

$$|u_m| < e^x \int_{x}^{\infty} e^{-x} g^{m-1} h\, dx,$$

d. h.

$$|u_m| < g^{m-1} h.$$

Wegen $g < 1$ ist für $x \geqq x_0$

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots < \frac{g}{1-g},$$

d. h. die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

ist für $x \geqq x_0$ unbedingt und gleichmässig convergent.

Zweiter Fall: $a = -1$.

Wir finden durch Integration von (A_m)

$$y_m = e^{-x}\Big[C + \int_{x_0}^{x} e^x f\left(\frac{1}{x}, y_{m-1}\right) dx\Big]$$

ıd

$$u_m = e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^x \left[f\left(\frac{1}{x}, y_{m-1}\right) - f\left(\frac{1}{x}, y_{m-2}\right)\right] dx,$$

o C eine willkürliche Constante und x_0 eine hinreichend grosse ›sitive Zahl ist. Nachdem C fixirt ist, wählen wir x_0 und h so, dass cht nur die oben angegebenen Bedingungen erfüllt sind, sondern ›ss auch

$$|C|\, e^{-x_0} < \frac{h}{2}$$

Die so gewählte Zahl x_0 wird auch als untere Integrationsgrenze nutzt.

Da für $x \geqq x_0$

$$\left|f\left(\frac{1}{x}, 0\right)\right| < \frac{h}{2}$$

, so haben wir

$$|y_1| < \frac{h}{2} e^{x_0 - x} + e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^x \frac{h}{2} dx$$

$$\leqq \frac{h}{2} + \frac{h}{2} e^{-x}(e^x - e^{x_0}),$$

ıo

$$|y_1| < h.$$

enn für $x \geqq x_0$ $|y_{m-1}| < h$ ist, so ist

$$\left|f\left(\frac{1}{x}, y_{m-1}\right)\right| < \frac{h}{2},$$

ıo unter Wiederholung der soeben benutzten Schlussweise

$$|y_m| < h.$$

Es war

$$|u_1| = |y_1| < h.$$

enn für $x \geqq x_0$

$$|u_{m-1}| < g^{m-2} h$$

, so ist

$$\left|f\left(\frac{1}{x}, y_{m-1}\right) - f\left(\frac{1}{x}, y_{m-2}\right)\right| < g|u_{m-1}| < g^{m-1} h,$$

o

$$|u_m| < e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^x g^{m-1} h\, dx,$$

h.

$$|u_m| < g^{m-1} h.$$

Wie im ersten Fall ergiebt sich die unbedingte und gleichmässige Convergenz der Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

für $x \geqq x_0$. —

Sowohl im Falle $a = 1$ als im Falle $a = -1$ stellt die so berechnete Reihe

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} u_m = \sum_{m=1}^{\infty} (y_m - y_{m-1}) = \lim_{m=\infty} y_m$$

ein Integral der Differentialgleichung (A) dar. Zunächst ist die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{du_m}{dx}$$

für $x \geqq x_0$ gleichmässig convergent. Es ist nämlich

$$\frac{du_m}{dx} = \pm u_m + f\left(\frac{1}{x}, y_{m-1}\right) - f\left(\frac{1}{x}, y_{m-2}\right),$$

also

$$\left|\frac{du_m}{dx}\right| \leqq |u_m| + g|u_{m-1}| < 2g^{m-1}h.$$

Demnach ist

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{du_m}{dx} = \lim_{m=\infty} \frac{dy_m}{dx}.$$

Aus

$$\frac{dy_m}{dx} = \pm y_m + f\left(\frac{1}{x}, y_{m-1}\right)$$

erhält man für $m = \infty$

$$\frac{dy}{dx} = \pm y + f\left(\frac{1}{x}, y\right),$$

d. h. y genügt der Differentialgleichung (A).

Wir haben demnach *im Fall* $a = 1$ *ein einziges particuläres Integral von* (A), *im Fall* $a = -1$ *ein Integral, welches eine willkürliche Constante* C *enthält, in Form einer unendlichen Reihe dargestellt, welche für* $x \geqq x_0$ *unbedingt und gleichmässig convergirt.* Dabei ist x_0 eine hinreichend grosse positive Zahl, welche im Falle $a = -1$ von der Constanten C abhängt*).

*) Man vergleiche § 1 mit Picard's Traité d'Analyse, Bd. II, S. 301, Bd. III, S. 88, wo successive Annäherungen in anderer Form und zu anderen Zwecken benutzt werden.

§ 2.

Um das Verhalten der Functionen u_m und y_m für $\lim x = +\infty$ zu untersuchen, bedürfen wir der folgenden Hilfsbetrachtung.

Die Function $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ werde durch die Reihe

$$c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots$$

für grosse positive x asymptotisch dargestellt, d. h. es sei für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n}, \quad \lim_{x=+\infty} \gamma_n = 0^*).$$

Das Integral

$$J = e^x \int_{\infty}^{x} e^{-x} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

oder

$$J = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^x \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-x}\,dx}{x^\nu} + e^x \int_{\infty}^{x} \frac{c_{n+1} + \gamma_{n+1}}{x^{n+1}} e^{-x}\,dx$$

geht, wenn man durch wiederholte Anwendung der Formel

$$e^x \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-x}\,dx}{x^\nu} = -\frac{1}{x^\nu} - \nu e^x \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-x}\,dx}{x^{\nu+1}}$$

die Integrale

$$e^x \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-x}\,dx}{x^\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

auf

$$e^x \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-x}\,dx}{x^{n+1}}$$

zurückführt, über in

$$J = C_0 + \frac{C_1}{x} + \cdots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n},$$

wobei gesetzt ist:

---

*) Wir schreiben dafür:

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) \sim c_0 + \frac{c}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots.$$

$$\frac{\varepsilon_n}{x^n} = e^x \int_{\infty}^{x} \frac{A + \gamma_{n+1}}{x^{n+1}} e^{-x} dx$$

(A ist eine Constante) oder

$$\varepsilon_n = e^x x^n \int_{\infty}^{x} \frac{A + \gamma_{n+1}(t)}{t^{n+1}} e^{-t} dt,$$

woraus man durch die Substitution

$$t = x + u$$

erhält:

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{x} \int_{0}^{\infty} \frac{A + \gamma_{n+1}(t)}{\left(1 + \frac{u}{x}\right)^{n+1}} e^{-u} du.$$

Der absolute Betrag des letzten Integrals bleibt für beliebig gro positive Werthe von x unter einer endlichen Grenze, es ist also

$$\lim_{x=+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Das Integral J wird demnach durch die Reihe

$$C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots$$

asymptotisch dargestellt.

Aehnlich lässt sich das Integral

$$J = e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^x \varphi\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

behandeln*). Setzt man

$$J = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^x \varphi\left(\frac{1}{x}\right) dx + e^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{c_{n+1} + \gamma_{n+1}}{x^{n+1}} e^x dx$$

und wendet man die Formel

$$e^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{e^x dx}{x^\nu} = \nu e^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{e^x dx}{x^{\nu+1}} + \frac{1}{x^\nu} - \frac{e^{x_0 - x}}{x_0^\nu}$$

wiederholt an, so erhält man

$$J = C_0 + \frac{C_1}{x} + \cdots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n}$$

---

*) Wir gebrauchen jetzt die Buchstaben J und $C_0, C_1, C_2, \ldots$ in and Bedeutung.

mit

$$\frac{\varepsilon_n}{x_n} = e^{-x}\int_{x_0}^{x}\frac{A+\gamma_{n+1}}{x^{n+1}}e^{x}dx + Be^{-x},$$

wo A und B Constante sind, oder

$$\varepsilon_n = e^{-x}x^n\int_{x_0}^{x}\frac{A+\gamma_{n+1}(t)}{t^{n+1}}e^{t}dt + Be^{-x}x^n.$$

Durch die Substitution

$$t = x - u$$

erhält man

$$\varepsilon_n = \frac{1}{x}\int_{0}^{x-x_0}\frac{A+\gamma_{n+1}(t)}{\left(1-\frac{u}{x}\right)^{n+1}}e^{-u}du + Be^{-x}x^n.$$

Um zu beweisen, dass

$$\lim_{x=+\infty}\varepsilon_n = 0$$

ist, hat man, da

$$|A+\gamma_{n+1}(t)|$$

für $t \geqq x_0$ unter einer endlichen Grenze bleibt, nur zu zeigen, dass dasselbe für

$$K = \int_{0}^{x-x_0}\frac{e^{-u}du}{\left(1-\frac{u}{x}\right)^{n+1}}$$

gilt. Die Function

$$\psi(u) = e^{-\frac{1}{2}u-(n+1)\log\left(1-\frac{u}{x}\right)}$$

bleibt dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze M für alle Werthe u des Integrationsgebietes $0 \ldots x - x_0$ und für alle Werthe $x \geqq x_0$. Es ist also

$$K = \int_{0}^{x-x_0}\psi(u)e^{-\frac{1}{2}u}du,$$

$$|K| < M\int_{0}^{x-x_0}e^{-\frac{1}{2}u}du < M\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u}du = 2M,$$

w. z. b. w. Die Reihe

$$C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots$$

stellt also das Integral J asymptotisch dar.

Die folgenden Betrachtnngen gelten für die beiden mit J bezeichneten Integrale. Setzt man

$$\frac{dJ}{dx} = -\frac{C_1}{x^2} - \frac{2C_2}{x^3} - \cdots - \frac{(n-1)C_{n-1}}{x^n} + \frac{\varepsilon_n'}{x^n},$$

so ist

$$\varepsilon_n' = \frac{d\varepsilon_n}{dx} - \frac{n(C_n + \varepsilon_n)}{x}.$$

Es ist aber

$$\frac{d\varepsilon_n}{dx} = \varepsilon_n + \frac{A + \gamma_{n+1}}{x} + \frac{n\varepsilon_n}{x},$$

also

$$\lim_{x=+\infty} \frac{d\varepsilon_n}{dx} = 0$$

und folglich auch

$$\lim_{x=+\infty} \varepsilon_n' = 0;$$

d. h. es besteht die asymptotische Gleichung

$$\frac{dJ}{dx} \sim -\frac{C_1}{x^2} - \frac{2C_2}{x^3} + \cdots.$$

Das Integral J genügt der linearen Differentialgleichung

$$\frac{dJ}{dx} = \pm J + \varphi\left(\frac{1}{x}\right);$$

man hat also für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$-\frac{C_1}{x^2} - \cdots - \frac{(n-1)C_{n-1}}{x^n} + \frac{\varepsilon_n'}{x^n}$$

$$= \pm\left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \cdots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n}\right) + c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n},$$

d. h. die Gleichung

$$\frac{dJ}{dx} = \pm J + c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots$$

wird durch die Reihe

$$J = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots$$

formell befriedigt; die Coefficientenvergleichung ergiebt

$$\pm C_0 + c_0 = 0,$$
$$\pm C_1 + c_1 = 0,$$
$$(n-1)\,C_{n-1} \pm C_n + c_n = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$$

lach auch

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_n = 0.$$

§ 3.

der in § 1 aufgestellten Reihenentwickelung des Integrals y leiten wir unter Benutzung des in § 2 bewiesenen Hilfssatzes halten der Function y für grosse Werthe von x her.

ter Fall: $a = 1$.

ist

$$f\left(\frac{1}{x}, 0\right) = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)^*),$$

$$y_1 = e^x \int_\infty^x e^{-x} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) dx \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{1\nu}}{x^\nu}.$$

folgt

$$f\left(\frac{1}{x}, y_1\right) \sim \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)^{**}),$$

$$y_2 \sim e^x \int_\infty^x e^{-x} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right) dx \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_{2\nu}}{x^\nu}.$$

ahrend, findet man

$$y_n \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{n\nu}}{x^\nu}.$$

nun

$$c_{n\nu} = c_{n-1,\nu} \quad (\nu = 1, \ldots n-1);$$

nn dies für $n = 2, \ldots m-1$ gilt, so ist

$$f\left(\frac{1}{x}, y_{m-1}\right) - f\left(\frac{1}{x}, y_{m-2}\right) \sim \frac{\lambda}{x^m} + \frac{\lambda'}{x^{m+1}} + \cdots;$$

$$u_m \sim e^x \int_\infty^x e^{-x} \left(\frac{\lambda}{x^m} + \cdots\right) dx$$

---

*) Unter $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ wird eine convergente oder divergente Potenzreihe von onstantes Glied verstanden.

**) Ueber das Rechnen mit asymptotischen Reihen vergl. Poincaré, Act . 8 und Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Bd. II.

folgt

$$u_m = y_m - y_{m-1} \sim -\frac{\lambda}{x^m} + \cdots,$$

d. h. es ist

$$c_{mv} = c_{m-1,v} \qquad (v = 1, \ldots m-1).$$

Setzt man

$$c_{mm} = c_m,$$

so ist

$$y \sim \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \cdots.$$

Es ist nämlich

$$y = y_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots.$$

Wir setzen

$$y_n = \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n},$$

$$u_{n+v} = \frac{\gamma_{n+v}}{x^v} \qquad (v = 1, 2, \ldots).$$

Wegen der gleichmässigen Convergenz der Reihe $x^n(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots)$*) für $x \geqq x_0$ lässt sich nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Zahl $p > n$ so bestimmen, dass für $x \geqq x_0$

$$|\gamma_{p+1} + \gamma_{p+2} + \cdots| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Auf Grund der bewiesenen asymptotischen Darstellungen lässt sich $\xi > x_0$ so wählen, dass für $x > \xi$

$$|\gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots + \gamma_p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Setzt man

$$\varepsilon_n = \gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots,$$

so ist

$$y = \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n};$$

für $x > \xi$ ist $|\varepsilon_n| < \varepsilon$, es ist

$$\lim_{x=+\infty} \varepsilon_n = 0,$$

womit die ausgesprochene Behauptung erwiesen ist.

Da die in § 2 für J angegebene asymptotische Gleichung differentiirt werden darf, so ist

$$\frac{dy_n}{dx} = -\frac{c_1}{x^2} - \cdots - \frac{(n-1)\,c_{n-1}}{x^n} + \frac{\gamma'_n}{x^n},$$

$$\frac{du_{n+v}}{dx} = \frac{\gamma'_{n+v}}{x^n},$$

$$\lim_{x=+\infty} \gamma'_n = 0, \quad \lim_{x=+\infty} \gamma'_{n+v} = 0;$$

*) Es sind positive Grössen G, H so vorhanden, dass die Bedingungen am Anfang von § 1 für $g = \frac{G}{x}$, $h = \frac{H}{x}$ erfüllt sind. Dann ist $|u_m| < \frac{G^{m-1}H}{x^m}$.

die für $x \geqq x_0$ gleichmässig convergente Reihe

$$\frac{dy_n}{dx} + \frac{du_{n+1}}{dx} + \frac{du_{n+2}}{dx} + \cdots$$

Summe $\frac{dy}{dx}$ hat, so führt dieselbe Schlussweise wie vorhin zu der mptotischen Gleichung

$$\frac{dy}{dx} \sim -\frac{c_1}{x^2} - \frac{2c_2}{x^3} - \cdots.$$

Zweiter Fall: $a = -1$.

Jetzt ist

$$y_1 = Ce^{-x} + e^{-x}\int_{x_0}^{x} e^x \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

as zweite Glied der rechten Seite wird durch eine Reihe von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{1\nu}}{x^\nu}$$

mptotisch dargestellt; es ist demnach

$$y_1 = Ce^{-x} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_{1\nu}}{x^\nu} + \frac{\gamma_{1n}}{x^n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_{1\nu}}{x^\nu} + \frac{\bar{\gamma}_{1n}}{x^n},$$

$$\bar{\gamma}_{1n} = \gamma_{1n} + Cx^n e^{-x}$$

setzt ist; wegen $\lim_{x=+\infty} \gamma_{1n} = 0$ ist auch $\lim_{x=+\infty} \bar{\gamma}_{1n} = 0$, so dass die mptotische Gleichung

$$y_1 \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{1\nu}}{x^\nu}$$

steht. Man gelangt wieder*) zu den asymptotischen Gleichungen

$$y \sim \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots,$$

$$\frac{dy}{dx} \sim -\frac{c_1}{x^2} - \frac{2c_2}{x^3} - \cdots,$$

d zwar sind die Reihencoefficienten $c_1, c_2, \ldots$ von der Integrationsnstanten C unabhängig. —

In beiden Fällen wird die Differentialgleichung (A) formell beedigt, wenn man für y die im allgemeinen divergente Reihe

$$\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots$$

*) Ich sehe nachträglich, dass die Schlussweise in der letzten Fussnote hier ht anwendbar ist. Aus der gleichmässigen Convergenz der Reihe $y = u_1 + u_2 + \cdots$ $x \geqq x_0$ folgt aber $\lim_{x=+\infty} y = 0$ und man kommt zum angegebenen Resultat, lem man wie in Crelle's Journ. Bd. 119, S. 272 zeigt, dass $\lim_{x=+\infty} \frac{d^n y}{dx^n} = n!\, c_n$ dlich ist.

einsetzt. Es ist nämlich

$$f\left(\frac{1}{x}, y\right) = \frac{k_1}{x} + \frac{k_2}{x^2} + \cdots,$$

wo die Reihe auf der rechten Seite durch Einsetzung der Reihe für y und formale Ausführung der Rechnungen erhalten wird. Man hat also für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$-\frac{c_1}{x^2} - \cdots - \frac{(n-1)\,c_{n-1}}{x^n} + \frac{\varepsilon_n'}{x^n}$$
$$= a\left(\frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n}\right) + \frac{k_1}{x} + \cdots + \frac{k_n}{x^n} + \frac{\varkappa_n}{x^n},$$

wo für $\lim x = +\infty$

$$\lim \varepsilon_n = 0, \quad \lim \varepsilon_n' = 0, \quad \lim \varkappa_n = 0$$

ist. Wenn die Coefficienten von $\frac{1}{x}, \cdots \frac{1}{x^{n-1}}$ auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen, so gilt das auch für die Coefficienten von $\frac{1}{x^n}$, wie man erkennt, wenn man mit x^n multiplicirt und x unendlich gross werden lässt.

§ 4.

Die in § 1 vermittelst successiver Annäherungen erhaltenen Integrale y der Differentialgleichung (A) haben nach § 3 die Eigenschaft

$$\lim_{x=+\infty} y = 0.$$

Es ist noch zu zeigen, dass es keine weiteren Integrale mit dieser Eigenschaft giebt.

Erster Fall: $a = 1$.

In diesem Fall besitzt die Differentialgleichung nur ein einziges Integral, welches für $\lim x = +\infty$ verschwindet. Denn wären zwei derartige Integrale vorhanden, so würde deren Differenz z einer Gleichung von der Form

$$\frac{dz}{dx} = z\left(1 + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, z\right)\right)$$

genügen, wo $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, z\right)$ eine Potenzreihe ohne constantes Glied ist, und es würde $\lim_{x=+\infty} z = 0$ sein. Wäre z nicht identisch gleich Null, so liesse sich nach Angabe eines positiven echten Bruches λ eine positive Zahl ξ so angeben, dass für $x > \xi$

$$\frac{d \log |z|}{dx} > \lambda$$

wäre, was der Annahme $\lim_{x=+\infty} z = 0$ widerspricht.

Zweiter Fall: $a = -1$.

Wir verstehen unter $y = \eta$ ein beliebiges Integral von (A), welches sich für $\lim x = +\infty$ der Grenze Null nähert. Es sei x_0 ein hinreichend grosser positiver Werth von x und η_0 der Werth, welchen das Integral η für $x = x_0$ annimmt. Zunächst wählen wir x_0 so gross, dass das Werthepaar $x = x_0$, $y = \eta_0$ dem Convergenzbezirk der Potenzreihe $F\left(\frac{1}{x}, y\right)$ angehört. Dann muss ein Integral von (A), welches für $x = x_0$ den Werth η_0 annimmt, mit η übereinstimmen. Die Grösse x_0 soll ferner die am Anfang von § 2 angegebenen Bedingungen erfüllen und ausserdem so gross angenommen werden, dass $|\eta_0| < \frac{h}{2}$ wird. Setzt man

$$C = \eta_0 e^{x_0},$$

so ist die in § 2 benutzte Bedingung

$$|C|\, e^{-x_0} < \frac{h}{2}$$

erfüllt. Ist

$$y_m = Ce^{-x} + e^{-x}\int_{x_0}^{x} e^x f\left(\frac{1}{x}, y_{m-1}\right) dx,$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

so nimmt

$$y = \lim_{m=\infty} y_m$$

für $x = x_0$ den Werth η_0 an, stimmt also mit η überein. —

Wir fassen das Hauptergebniss in den folgenden Satz zusammen:

Die Differentialgleichung (A) *besitzt ein einziges Integral oder unendlich viele Integrale mit der Eigenschaft*

$$\lim_{x=+\infty} y = 0,$$

*je nachdem a positiv oder negativ ist**). *Jedes derartige Integral y wird durch die der Differentialgleichung formell genügende, im allgemeinen divergente Reihe*

$$\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots$$

für grosse positive Werthe von x asymptotisch dargestellt, d. h. es ist für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y = \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n}, \quad \lim_{x=+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Charlottenburg, 1. März 1898.

---

*) Jetzt ist für das im Falle $a > 0$ vorhandene einzige Integral mit dem Grenzwerth 0 eine analytische Darstellung gegeben, während früher nur die Existenz nachgewiesen war.

Ueber eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Von

J. Horn in Charlottenburg.

In der Abhandlung von Briot und Bouquet im Journ. de l'Ec. Pol., cah. 36 (S. 179) findet sich unter den unerledigten Typen von Differentialgleichungen erster Ordnung die Gleichung

$$x\frac{dy}{dx} = y\mathfrak{P}(x, y); \quad \mathfrak{P}(0, 0) = 0,$$

worin $\mathfrak{P}(x, y)$ eine Potenzreihe bezeichnet, welche für hinreichend kleine Werthe von $|x|$ und $|y|$ convergent ist. Es handelt sich um die Untersuchung derjenigen Integrale y, welche sich gleichzeitig mit x der Grenze Null nähern.

Im Folgenden gebe ich eine asymptotische Darstellung dieser Integrale im Anschluss an den vorausgehenden Aufsatz „Untersuchung der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung vermittelst successiver Annäherungen". Im gegenwärtigen Aufsatz werden complexe Werthe sämmtlicher Grössen zugelassen.

§ 1.

Wir schreiben die Differentialgleichung in der Form

$$x\frac{dy}{dx} = g(y) + xyG(x, y), \tag{A}$$

worin

$$g(y) = a_1y^2 + a_2y^3 + \cdots$$

und $G(x, y)$ eine Potenzreihe von x und y ist. Wir setzen unter Beschränkung auf den einfachsten Fall a_1 *von Null verschieden* voraus. Es sei

$$a = -\frac{a_2}{a_1^2}.$$

Setzt man

$$x = e^{-t}t^{-a},$$

also

$$\frac{dx}{dt} = -x\left(1 + \frac{a}{t}\right),$$

so geht die Differentialgleichung (A) über in

$$-\frac{dy}{dt} = \left(1+\frac{a}{t}\right)\left[g(y) + e^{-t}t^{-a}yG(e^{-t}t^{-a}, y)\right].$$

Die Differentialgleichung

$$-\frac{d\eta}{dt} = \left(1+\frac{a}{t}\right)g(\eta)$$

wird durch die Substitution

$$\eta = \frac{1}{a_1 t} + \frac{v}{t^2}$$

in eine Gleichung von der Form

$$-t^2\frac{dv}{dt} = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{t}, v\right)$$

oder, wenn

$$t = \frac{1}{\tau}$$

gesetzt wird, von der Form

$$\frac{dv}{d\tau} = \mathfrak{P}(\tau, v)$$

übergeführt; dabei ist $\mathfrak{P}(\tau, v)$ eine Potenzreihe, welche für hinreichend kleine Werthe von $|\tau|$ und $|v|$ convergirt. Diese Differentialgleichung besitzt ein Integral v, welches für $\tau = 0$ den beliebig vorgeschriebenen Werth c annimmt, in Form einer Potenzreihe

$$v = c_2 + c_3\tau + c_4\tau^2 + \cdots \quad (c_2 = c),$$

welche convergirt, wenn $|\tau|$ hinreichend klein ist. Hieraus erhält man die für hinreichend grosse Werthe von $|t|$ convergente Potenzreihe

$$\eta = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \frac{c_3}{t^3} + \cdots;$$

darin ist

$$c_1 = \frac{1}{a_1}, \; c_2 = c,$$

während $c_3, c_4, \ldots$ von c abhängen.

Wenn man

$$y = \eta + xz$$

setzt, wo η die soeben berechnete Potenzreihe ist, und

$$x = e^{-t}t^{-a}$$

als Function von t betrachtet wird, so geht die Differentialgleichung (A) über in

(B) $$\frac{dz}{dt} = z + f\left(\frac{1}{t}, x, z\right);$$

darin ist

$$f(z) = f\left(\frac{1}{t}, x, z\right)$$

$$= -\left(1+\frac{a}{t}\right)g'(\eta) + \frac{a}{t}z - \left(1+\frac{a}{t}\right)(\eta + xz)\,G(x, \eta + xz)$$

eine Potenzreihe von $\frac{1}{t}, x, z$, welche convergirt, wenn die absoluten Beträge dieser Grössen hinreichend klein sind; für die Nullwerthe dieser drei Grössen verschwinden f*) und $\frac{\partial f}{\partial z}$.

§ 2.

Die Differentialgleichung (B) integriren wir vermittelst successiver Annäherungen in ähnlicher Weise, wie die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dt} = z + f\left(\frac{1}{t}, z\right)$$

in dem oben erwähnten Aufsatz (unter Beschränkung auf reelle Grössen, welche hier fortfällt) behandelt wurde. Es genügt, die an der früheren Entwickelung vorzunehmenden Abänderungen anzugeben.

Wir setzen

$$t = re^{i\varphi}$$

und beschränken φ auf das Gebiet

$$-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 \quad \left(\varphi_0 < \frac{\pi}{2}\right).$$

Es sei A eine beliebige positive Grösse, welche wir kleiner als 1 annehmen. Dann sind positive Grössen r_0 und h so vorhanden, dass für

$$|t| \geqq r_0, \quad |\arg t| < \varphi_0, \quad |z| < h, \quad |z'| < h,$$
$$|f(z)| < h \cos\varphi_0,$$
$$|f(z') - f(z)| < A \cos\varphi_0 \, |z' - z|$$

ist.

Wir nehmen $z_0 = 0$ an und erhalten

$$z_m = e^t \int_{\infty}^{t} e^{-t} f(z_{m-1}) dt \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

aus der Differentialgleichung

$$\frac{dz_m}{dt} = z_m + f(z_{m-1}) \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Der Integrationsweg komme aus dem Unendlichen mit einem Argument zwischen $-\varphi_0$ und φ_0 und verlaufe in dem Gebiet

$$|t| \geqq r_0, \quad -\varphi_0 < \arg t < \varphi_0.$$

Wir wählen als äquivalenten Integrationsweg eine gerade Linie, welche aus dem Unendlichen mit $\arg t = \varphi$ nach $t = re^{i\varphi}$ geht.

---

*) Das Anfangsglied von $g'(\eta)$ ist $\frac{2}{t}$.

Wegen

$$|f(z_0)| = |f(0)| < h \cos \varphi_0$$

ist

$$|z_1| < e^{r \cos \varphi} h \cos \varphi_0 \int_r^\infty e^{-r \cos \varphi} dr$$

$$= \frac{h \cos \varphi_0}{\cos \varphi} < h;$$

ebenso findet man

$$|z_m| < h.$$

Ferner ist

$$u_m = z_m - z_{m-1} = e^t \int_\infty^t e^{-t} \left(f(z_{m-1}) - f(z_{m-2}) \right) dt.$$

Wegen

$$|u_1| = |z_1| < h$$

ist

$$|u_2| < A \cos \varphi_0 h e^{r \cos \varphi} \int_r^\infty e^{-r \cos \varphi} dr$$

$$= \frac{A \cos \varphi_0}{\cos \varphi} h < Ah$$

und ebenso allgemein

$$|u_m| < A^{m-1} h,$$

also

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m| < \frac{h}{1-A},$$

so dass die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m$$

für

$$|t| \geqq r_0, \quad -\varphi_0 < \arg t < \varphi_0$$

unbedingt und gleichmässig convergent ist. Dass diese Reihe der Differentialgleichung (B) genügt, wird wie früher gezeigt.

Der früher zur Untersuchung der Functionen z_m und u_m benutzte Hülfssatz lautet in etwas allgemeinerer Fassung folgendermassen:

Wenn die Function $\varphi(t)$ durch die Reihe

$$c_0 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots$$

gleichmässig asymptotisch dargestellt wird*), wenn t im Gebiet

*) D. h.: Setzt man, unter n eine beliebige Zahl verstehend,

$$\varphi(t) = c_0 + \frac{c_1}{t} + \cdots + \frac{c_n}{t^n} + \frac{\gamma_n}{t^n},$$

so nähert sich γ_n gleichmässig der Grenze Null, wenn t mit einem Argument zwischen $-\varphi_0$ und φ_0 ins Unendliche geht.

$$-\varphi_0 < \arg t < \varphi_0 \quad \left(\varphi_0 < \frac{\pi}{2}\right)$$

ins Unendliche geht, so wird das Integral

$$e^t \int_{\infty}^{t} e^{-t} \varphi(t)\, dt$$

durch die formell berechnete Reihe

$$C_0 + \frac{C_1}{t} + \frac{C_2}{t^2} + \cdots$$

in demselben Gebiet gleichmässig asymptotisch dargestellt *). Ist $c_\nu = 0$ $(\nu < n)$, so ist auch $C_\nu = 0$ $(\nu < n)$.

Wie früher beweist man den Satz:

Das vermittelst successiver Annäherungen berechnete Integral

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} u_m$$

der Differentialgleichung (B) wird durch eine im allgemeinen divergente Reihe von der Form

$$\frac{c_1'}{t} + \frac{c_2'}{t^2} + \frac{c_3'}{t^3} + \cdots$$

gleichmässig asymptotisch dargestellt, wenn t mit einem Argument zwischen $-\varphi_0$ und φ_0 ins Unendliche geht.

Es ist also

$$z = \frac{c_1'}{t} + \frac{c_2'}{t^2} + \cdots + \frac{c_n'}{t^n} + \frac{\gamma_n'}{t^n}, \quad \lim \gamma_n' = 0.$$

Wie früher ergiebt sich die asymptotische Darstellung der Function $\frac{dz}{dt}$ durch die Reihe

$$-\frac{c_1'}{t^2} - \frac{2c_2'}{t^3} - \cdots.$$

Setzt man

$$D(z) = -\frac{dz}{dt} + z + f\left(\frac{1}{t}, x, z\right),$$

$$\Delta(z) = -\frac{dz}{dt} + z + f\left(\frac{1}{t}, 0, z\right),$$

so bestehen die formalen Gleichungen

---

*) In Betreff des Beweises, der wie früher geführt wird, sehe man auch eine in Crelle's Journ. erscheinende Arbeit „Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle".

$$f\left(\frac{1}{t}, 0, \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu'}{t^\nu}\right) = \frac{k_1}{t} + \frac{k_2}{t^2} + \cdots$$

und

$$\Delta\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu'}{t^\nu}\right) = \frac{c_1'}{t^2} + \frac{2c_2'}{t^3} + \cdots + \frac{c_1'}{t} + \frac{c_2'}{t^2} + \cdots$$
$$+ \frac{k_1}{t} + \frac{k_2}{t^2} + \cdots = \frac{h_1}{t} + \frac{h_2}{t^2} + \cdots.$$

Ferner ist, wenn unter z das oben berechnete Integral von (B) verstanden wird,

$$\Delta(z) = \frac{h_1}{t} + \cdots + \frac{h_n}{t^n} + \frac{\sigma_n}{t^n} \text{*)},$$

wo sich σ_n der Grenze Null nähert, wenn t in dem angegebenen Gebiet ins Unendliche geht.

Da $D(z) - \Delta(z)$ durch eine Reihe von der Form

$$x\mathfrak{P}\left(\frac{1}{t}, x\right)$$

asymptotisch dargestellt wird, so ist

$$0 = D(z) = \frac{h_1}{t} + \cdots + \frac{h_n}{t^n} + \frac{\tau_n}{t^n},$$

wo τ_n dieselbe Eigenschaft besitzt wie σ_n. Hieraus ergiebt sich wie im früheren Aufsatz

$$h_n = 0,$$

so dass die formale Gleichung besteht:

$$\Delta\left(\frac{c_1'}{t} + \frac{c_2'}{t^2} + \cdots\right) = 0.$$

Es giebt aber nur eine einzige Potenzreihe von $\frac{1}{t}$, welche die Differentialgleichung $\Delta(z) = 0$ formell befriedigt.

Die Differentialgleichung (B) wird formell befriedigt durch eine Reihe von der Form

$$z = T_1 + xT_2 + x^2T_3 + \cdots,$$

wo $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Potenzreihen von $\frac{1}{t}$ ohne constantes Glied sind. Es ist nämlich formell

---

*) Nach den Sätzen über das Rechnen mit asymptotischen Reihen wird $\Delta(z)$ durch die Reihe $\frac{h_1}{t} + \frac{h_2}{t^2} + \cdots$ asymptotisch dargestellt.

$$\frac{ds}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} x^{\lambda-1}\left(\frac{dT_\lambda}{dt} - (\lambda-1)\left(1+\frac{a}{t}\right)T_\lambda\right)$$

und

$$D(s) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} x^{\lambda-1}\left(-\frac{dT_\lambda}{dt} + \lambda T_\lambda + \cdots\right).$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{dT_\lambda}{dt} = \lambda T_\lambda + \cdots \quad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

erhält man durch formelle Rechnung

$$T_\lambda = \frac{c_1^{(\lambda)}}{t} + \frac{c_2^{(\lambda)}}{t^2} + \cdots \quad (\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Lässt man sowohl in der Reihe $T_1 + xT_2 + \cdots$ als auch in $D(s)$ alle Glieder weg, welche x enthalten, so erhält man die formelle Gleichung

$$\Delta(T_1) = 0.$$

Da es nur eine Potenzreihe von $\frac{1}{t}$ giebt, welche diese Gleichung formell befriedigt, nämlich die oben berechnete Reihe

$$\frac{c_1'}{t} + \frac{c_2'}{t^2} + \cdots,$$

so muss T_1 mit dieser Reihe übereinstimmen.

§ 3.

Wir kehren zur Differentialgleichung (A) zurück, welche mit (B) durch die Substitution

$$y = \eta + xs$$

zusammenhängt. Jedem endlichen Werth der in

$$\eta = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots$$

enthaltenen willkürlichen Constanten $c_2 = c$ entspricht ein Integral

$$y = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots + x\left(\frac{c_1'}{t} + \cdots + \frac{c_n'}{t^n} + \frac{\gamma_n'}{t^n}\right)$$

der Differentialgleichung (A), wo $\lim \gamma_n' = 0$ ist, wenn t in der angegebenen Weise ins Unendliche geht.

Zwischen x und t besteht der Zusammenhang

$$x = e^{-t}t^{-a}.$$

Setzt man

$$a = \alpha + i\beta$$

und

$$x = \varrho e^{i\vartheta},\ t = re^{i\varphi},$$

so ist

$$\log \varrho = -r\cos\varphi - \alpha \log r + \beta\varphi,$$
$$\vartheta = -r\sin\varphi - \beta\log r - \alpha\varphi.$$

Man kann x mit $\lim \arg x = \vartheta_0$ (ϑ_0 beliebig) so in die singuläre Stelle $x = 0$ gehen lassen, dass t mit $\lim \arg t$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ unendlich wird. Lässt man t beispielsweise auf der Curve

$$\varphi = \frac{1}{r}\,\psi\left(\frac{1}{r}\right) - \beta\,\frac{\log r}{r}$$

ins Unendliche gehen, wo

$$\psi(0) = \vartheta_0$$

ist, so wird

$$\lim r = \infty,\ \lim \varphi = 0,$$
$$\lim \varrho = 0,\ \ \lim \vartheta = \vartheta_0.$$

Dann ist aber

$$\lim \gamma_n' = 0.$$

Im Falle $a = 0$ oder, was dasselbe ist, $a_2 = 0$, ist

$$t = -\log x.$$

Wir haben den Satz:

Zu jedem Werth der willkürlichen Constanten c_2 gehört ein Integral y der Differentialgleichung (A), *welches die Eigenschaft*

$$y = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots + x\left(\frac{c_1'}{t} + \cdots + \frac{c_n'}{t^n} + \frac{\gamma_n'}{t^n}\right),$$
$$\lim_{x=0} \gamma_n' = 0$$

besitzt, wenn x so in die singuläre Stelle $x = 0$ geht, dass die durch die Gleichung

$$x = e^{-t}t^{-a}\ \left(a = -\frac{a_2}{a_1^2}\right)$$

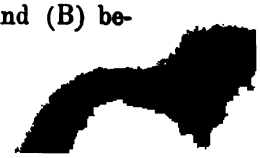
definirte Veränderliche t mit $-\varphi_0 < \arg t < \varphi_0$ $\left(\varphi_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ unendlich wird.

Am Schlusse des § 2 wurde gezeigt, dass die Differentialgleichung (B) durch die Reihe

$$z = \sum_{\lambda=1}^{\infty} x^{\lambda-1}\left(\frac{c_1^{(\lambda)}}{t} + \frac{c_2^{(\lambda)}}{t^2} + \cdots\right)$$

formell befriedigt wird. Zwischen den Gleichungen (A) und (B) besteht der Zusammenhang

$$y = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots + xz.$$



Die Differentialgleichung (A) *wird also formell befriedigt durch die Reihe*

$$y = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots + \sum_{\lambda=1}^{\infty} x^\lambda \left(\frac{c_1^{(\lambda)}}{t} + \frac{c_2^{(\lambda)}}{t^2} + \cdots \right);$$

hierin ist $c_1 = \frac{1}{a_1}$ und c_2 eine willkürliche Constante, von welcher die folgenden Coefficienten abhängen; die Reihe

$$\frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots$$

ist für hinreichend kleine Werthe von $|t|$ convergent, während die Reihen

$$\frac{c_1^{(\lambda)}}{t} + \frac{c_2^{(\lambda)}}{t^2} + \cdots \quad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

im allgemeinen divergent sind.

Charlottenburg, 27. März 1898.

Sur une formule utile dans la détermination de certaines valeurs asymptotiques.

Par

J. Franel à Zurich.

I.

Dans son mémoire „Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie“*) Dirichlet a exprimé la somme

$$\sum_{s=1}^{s=n}\left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s)$$

au moyen de deux autres dans lesquelles les limites supérieures des indices de sommation sont de l'ordre $\sqrt{n}$.

Nous nous proposons de montrer que ce résultat est susceptible d'une assez grande généralisation. Comme application simple nous donnons, à une grandeur près de l'ordre $n^{\frac{3}{4}}$, la valeur asymptotique de la somme

$$\sum_{xy\leq n}\left[\frac{n}{xy}\right]$$

et la valeur moyenne du nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$xyz = n.$$

Soient, pour commencer, $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions quelconques de la variable x et

$$\vartheta(n) = \sum f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right), \tag{1}$$

la somme étant relative à tous les diviseurs d du nombre entier positif n.

Dans cette dernière équation remplaçons successivement n par $n-1$, $n-2$, ... 1 et ajoutons membre à membre. Si l'on fait, pour abréger,

*) Dirichlet's Werke, zweiter Band, herausgegeben von H. Fuchs.

$$F(n) = \sum_1^n f(n),$$

$$G(n) = \sum_1^n g(n),$$

il viendra

$$(2) \qquad \sum_1^n \vartheta(n) = \sum_1^n f(r)\, G\left[\frac{n}{r}\right] = \sum_1^n g(r)\, F\left[\frac{n}{r}\right].$$

Or, à chaque diviseur $d < \sqrt{n}$ correspond un diviseur complémentaire

$$\frac{n}{d} > \sqrt{n},$$

de sorte que

$$(3) \qquad \vartheta(n) = \sum_{d \leq \sqrt{n}} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d \leq \sqrt{n}} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d),$$

chacune des sommes s'étendant maintenant aux seuls diviseurs du nombre n qui ne surpassent pas $\sqrt{n}$. Si n est un carré s^2, on devra, dans le second membre, retrancher le terme $f(s) \cdot g(s)$.

Si maintenant, dans la formule (3) on remplace successivement n par $n-1$, $n-2$, ... 1, puis qu'on ajoute membre à membre on obtiendra

$$\sum_1^n \vartheta(n) = \sum_{r=1}^{r=\nu} f(r)\left[G\left[\frac{n}{r}\right] - G(r-1)\right] + \sum_{r=1}^{r=\nu} g(r)\left[F\left[\frac{n}{r}\right] - F(r-1)\right] - \sum_{r=1}^{r=\nu} f(r)\, g(r),$$

si l'on fait, pour simplifier,

$$\nu = [\sqrt{n}],$$

et si l'on convient de regarder $F(0)$ et $G(0)$ comme étant nuls.

D'ailleurs $G(r-1) = G(r) - g(r)$, de sorte que

$$-\sum_1^\nu f(r)\, G(r-1) = -\sum_1^\nu f(r)\, G(r) + \sum_1^\nu f(r)\, g(r)$$

$$= -\sum_1^\nu [F(r) - F(r-1)]\, G(r) + \sum_1^\nu f(r)\, g(r)$$

$$= \sum_1^\nu F(r-1)\, [G(r) - G(r-1)] - F(\nu)\, G(\nu) + \sum_1^\nu f(r)\, g(r)$$

$$= \sum_1^\nu F(r-1)\, g(r) - F(\nu)\, G(\nu) + \sum_1^\nu f(r)\, g(r)$$

où résulte finalement

$$) \quad \sum_{1}^{n} \vartheta(n) = \sum_{r=1}^{r=\nu} f(r)\, G\left[\frac{n}{r}\right] + \sum_{r=1}^{r=\nu} g(r)\, F\left[\frac{n}{r}\right] - F(\nu)\, G(\nu).$$

n particulier, si l'on suppose $f(x) = g(x) = 1$, on obtiendra

$$\sum_{r=1}^{r=n}\left[\frac{n}{r}\right] = 2\sum_{r=1}^{r=\nu}\left[\frac{n}{r}\right] - \nu^2.$$

ette formule déjà signalée par M. Mertens*) a été retrouvée par . Hermite**).

II.

A la formule (4) correspond une transformation de certaines séries. aisons

$$\sum_{1}^{\infty} f(s)\, e^{-sx} = \varphi(x), \quad \sum_{s=r}^{s=\infty} f(s)\, e^{-sx} = \varphi_r(x),$$

$$\sum_{1}^{\infty} g(s) e^{-sx} = \psi(x), \quad \sum_{s=r}^{s=\infty} g(s) e^{-sx} = \psi_r(x).$$

n aura, tout d'abord

$$) \quad \sum_{r=1}^{r=\infty} g(r)\, \varphi(rx) = \sum_{r=1}^{r=\infty} f(r)\, \psi(rx) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \vartheta(n) e^{-nx},$$

ensuite

$$) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \vartheta(n)\, e^{-nx} = \sum_{r=1}^{r=\infty} g(r)\, \varphi_r(rx) + \sum_{r=1}^{r=\infty} f(r)\, \psi_r(rx) - \sum_{r=1}^{r=\infty} f(r)\, g(r)\, e^{-r^2x}.$$

n suppose naturellement que les séries précédentes sont convergentes.

Si l'on égale les coefficients de e^{-nx} dans les deux membres de formule (6), multipliée préalablement par $\frac{1}{1-e^{-x}}$, on retrouve la rmule (4).

Si l'on suppose

$$f(r) = g(r) = 1,$$

*) Ueber einige asymptot. Gesetze der Zahlentheorie, Journal f. Math. Bd. 77.

**) Sur quelques points dans la théorie des nombres, Acta Mathematica, me II.

les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_r(x)$ se réduisent respectivement à $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ et à $\frac{e^{-rx}}{1-e^{-x}}$ et l'on obtient, dans ce cas particulier, l'équation

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{e^{-rx}}{1-e^{-rx}} = 2\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{e^{-r^2x}}{1-e^{-rx}} - \sum_{r=1}^{r=\infty} e^{-r^2x}.$$

Cette transformation de la série de Lambert est due à Clausen*).

En choisissant $f(n) = (-1)^n$, $g(n) = 1$, on obtient semblablement

$$\varphi(x) = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}, \quad \varphi_r(x) = (-1)^r \frac{e^{-rx}}{1+e^{-x}},$$

$$\psi(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}, \quad \psi_r(x) = \frac{e^{-rx}}{1-e^{-x}},$$

d'où

$$\sum_1^\infty (-1)^r \frac{e^{-rx}}{1-e^{-rx}} = -\sum_1^\infty \frac{e^{-rx}}{1+e^{-rx}} = \sum_1^\infty (-1)^r e^{-r^2x}\left(\frac{1+e^{-2rx}}{1-e^{-2rx}}\right)$$

etc.

III.

Les résultats qui précédent deviennent, pour ainsi dire, intuitifs si l'on se sert de considérations géométriques.

Nous réserverons, dans la suite, la lettre P pour désigner les points du plan ou de l'espace dont les coordonnées sont des nombres entiers. Par l'expression points P d'une région nous entendrons l'ensemble des points P situés à l'intérieur ou sur la limite de cette région. Enfin nous désignerons par

$$\sum_{(R)} u(P),$$

la somme des valeurs d'une fonction u aux divers points P de la région R.

Ces définitions posées, si l'on fait

$$u = f(x)\, g(y),$$

il est clair que la somme envisagée au paragraphe I,

$$\sum_1^n \vartheta(n),$$

n'est autre chose que

$$\sum u(P),$$

*) Journal de Crelle, tome III, page 95. Voir aussi un article de Scherk, même journal, tome 9.

cette dernière somme étant relative aux points P de la région limitée par les trois lignes

$$x = 1, \quad y = 1, \quad xy = n.$$

Si l'on considère d'abord les points P de cette région situés sur une parallèle à l'axe des y

$$x = r,$$

la somme des valeurs correspondantes de u aura pour expression

$$f(r)\left[g(1) + g(2) + \cdots + g\left[\frac{n}{r}\right]\right]$$

c'est-à-dire

$$f(r)\, G\left[\frac{n}{r}\right].$$

Semblablement

$$g(s)\, F\left[\frac{n}{r}\right]$$

représente la somme des valeurs de notre fonction aux points P de la région situés sur la droite $y = s$. Il en résulte ainsi l'équation

$$\sum u(P) = \sum_{1}^{n} \vartheta(n) = \sum_{r=1}^{r=n} f(r)\, G\left[\frac{n}{r}\right] = \sum_{s=1}^{s=n} g(s)\, F\left[\frac{n}{s}\right].$$

Pour mettre en évidence la symétrie de cette formule par rapport aux deux fonctions f et g nous partagerons la région considérée en quatre parties (l'une d'elles pouvant se réduire à un point) par les deux droites

$$x = \nu, \qquad y = \nu,$$

ν désignant toujours $[\sqrt{n}]$.

Nous appellerons les quatre régions partielles ainsi obtenues R_1, R_2, R_3, R_4, conformément au tableau suivant:

R_1, région limitée par les lignes $x = 1$, $x = \nu$, $y = 1$, $xy = n$,
R_2, „ „ „ „ „ $x = 1$, $y = 1$, $y = \nu$, $xy = n$,
R_3, „ „ „ „ „ $x = 1$, $y = 1$, $x = \nu$, $y = \nu$,
R_4, „ „ „ „ „ $x = \nu$, $y = \nu$, $xy = n$.

Cette dernière région ne renferme, à son intérieur, aucun point P; dans le cas où elle se réduit à un point celui-ci appartient déjà à R_3.

On a évidemment

$$\sum u(P) = \sum_{(R_1)} u(P) + \sum_{(R_2)} u(P) - \sum_{(R_3)} u(P)$$

ce qui est précisément la formule (4).

Plus généralement, si l'on fait

$$h' = \left[\frac{n}{h}\right],$$

h désignant un nombre entier $< n$, on aura

$$(7)\quad \sum_{r=1}^{r=a} f(r)\,G\left[\frac{n}{r}\right] = \sum_{r=1}^{r=h} f(r)\,G\left[\frac{n}{r}\right] + \sum_{s=1}^{s=h'} g(s)\,F\left[\frac{n}{s}\right] - F(h)\,G(h').$$

Il est tout naturel de remplacer dans les considérations qui précèdent l'hyperbole $xy = n$ par une autre courbe.

Nous supposerons que l'ordonnée de cette courbe

$$y = \varphi(x),$$

est toujours positive et va constamment en diminuant quand x varie de a à b, a et b désignant deux entiers positifs $(b > a)$.

Faisons, pour abréger,

$$a' = [\varphi(a)], \quad b' = [\varphi(b)]$$

et soit

$$x = \psi(y)$$

la function inverse de φ.

On obtiendra pour la somme

$$\sum u(P), \qquad \big(u = f(x)\,.\,g(y)\big)$$

relative aux points P de la région limitée par les lignes

$$x = a + 1, \quad x = b, \quad y = 1, \quad y = \varphi(x),$$

les deux expressions suivantes:

$$\sum u(P) = \sum_{x=a+1}^{x=b} f(x)\; G[\varphi(x)],$$

$$\sum u(P) = \sum_{y=b'+1}^{y=a'} g(y)\; F[\psi(y)] + G(b')\,F(b) - G(a')\,F(a)$$

suivant qu'on somme partiellement, pour commencer, le long d'une parallèle à l'axe des y ou le long d'une parallèle à l'axe des x. En prenant $g(y) = 1$, on obtient une formule dont s'est servi Dirichlet dans l'un de ses mémoires *).

Si l'on choisit un nombre entier $h < b$, puis qu'on fasse

$$h' = [\varphi(h)],$$

on aura aussi

$$\sum u(P) = \sum_{x=a+1}^{h} f(x)\; G[\varphi(x)] + \sum_{y=b'+1}^{y=h'} g(y)\; F[\psi(a)] + F(b)\,G(b') - F(h)\,G(h').$$ **)

*) Ueber ein die Division betreffendes Problem, tome II des Oeuvres de Dirichlet.

**) Voir la réponse de M. Lipschitz à M. Hermite, Acta Math. tome II.

Au lieu de la fonction $u = f(x)\, g(y)$, on pourrait envisager une fonction quelconque des deux variables x et y,

$$u = F(x, y).$$

On serait ainsi conduit à une formule que nous nous dispenserons d'écrire et qui est à rapprocher de la formule donnée par M. Busche dans son beau mémoire intitulé „Ueber grösste Ganze"*).

IV.

Soient maintenant f, g, h, trois fonctions quelconques d'une variable et

$$\vartheta(n) = \sum_{xyz=n} f(x)\, g(y)\, h(z), \tag{8}$$

la somme étant étendue à tous les systèmes de valeurs entières et positives x, y, z, qui satisfont à l'équation

$$xyz = n.$$

Si l'on fait, comme précédemment,

$$F(n) = \sum_1^n f(n), \quad G(n) = \sum_1^n g(n), \quad H(n) = \sum_1^n h(n),$$

il viendra

$$\begin{aligned} \sum_1^n \vartheta(n) &= \sum_{xy \leq n} f(x)\, g(y)\, H\left[\frac{n}{xy}\right] = \sum_{yz \leq n} g(y)\, h(z)\, F\left[\frac{n}{yz}\right] \\ &= \sum_{zx \leq n} h(z) f(x)\, G\left[\frac{n}{zx}\right] \end{aligned} \tag{9}$$

et la valeur commune de ces expressions n'est autre chose que la somme des valeurs de la fonction

$$u = f(x)\, g(y)\, h(z)$$

aux points P appartenant au volume limité par les surfaces

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1, \quad xyz = n.$$

Il s'agit de mettre $\sum_1^n \vartheta(n)$, que nous désignerons aussi plus simplement par S, sous une forme symétrique par rapport à chacune des fonctions f, g, h. A cet effet, posons

$$\mu = \left[\sqrt[3]{n}\right], \tag{10}$$

$$\mu' = \left[\frac{n}{\mu}\right] \tag{11}$$

*) Journal für Mathematik, Band 103.

et introduisons, pour plus de commodité, les quantités auxiliaires définies par les équations suivantes:

$$A = \sum_{x=1}^{x=\mu} f(x) \sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{x}\right]} g(y)\, H\left[\frac{n}{xy}\right],$$

$$B = \sum_{y=1}^{y=\mu} g(y) \sum_{z=1}^{z=\left[\frac{n}{y}\right]} h(z)\, F\left[\frac{n}{yz}\right],$$

$$C = \sum_{z=1}^{z=\mu} h(z) \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{z}\right]} f(x)\, G\left[\frac{n}{zx}\right],$$

$$A' = \sum_{y=\mu+1}^{y=\mu'} g(y) \sum_{z=\mu+1}^{z=\left[\frac{n}{y}\right]} h(z)\, F\left[\frac{n}{yz}\right],$$

$$B' = \sum_{z=\mu+1}^{z=\mu'} h(z) \sum_{x=\mu+1}^{x=\left[\frac{n}{z}\right]} f(x)\, G\left[\frac{n}{zx}\right],$$

$$C' = \sum_{x=\mu+1}^{x=\mu'} f(x) \sum_{y=\mu+1}^{y=\left[\frac{n}{x}\right]} g(y)\, H\left[\frac{n}{xy}\right],$$

$$L = \sum_{y=1}^{y=\mu} \sum_{z=1}^{z=\mu} g(y)\, h(z)\, F\left[\frac{n}{yz}\right],$$

$$M = \sum_{z=1}^{z=\mu} \sum_{x=1}^{x=\mu} h(z)\, f(x)\, G\left[\frac{n}{zx}\right],$$

$$N = \sum_{x=1}^{x=\mu} \sum_{y=1}^{y=\mu} f(x)\, g(y)\, H\left[\frac{n}{xy}\right],$$

$$L' = \sum_{yz \leq \mu'} g(y)\, h(z)\, F\left[\frac{n}{yz}\right],$$

$$M' = \sum_{zx \leq \mu'} h(z)\, f(x)\, G\left[\frac{n}{zx}\right],$$

$$N' = \sum_{xy \leq \mu'} f(x)\, g(y)\, H\left[\frac{n}{yx}\right],$$

$$I = F(\mu)\, G(\mu)\, H(\mu).$$

Ces sommes ont une signification évidente. A, par-exemple, est

nme des valeurs de u aux points P qui appartiennent au volume ité par les surfaces

$$x = 1, \quad x = \mu, \quad y = 1, \quad xy = n, \quad xyz = n.$$

cette signification résultent immédiatement les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} S &= A + B - N + C', \\ S &= B + C - L + A', \\ S &= C + A - M + B'; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= M + N - I + A', \\ B &= N + L - I + B', \\ C &= L + M - I + C' \end{aligned}\right\}$$

isi que la relation

$$C' = \sum_{x=1}^{x=\mu'} f(x) \sum_{y=1}^{y=\left[\frac{n}{x}\right]} g(y)\, H\left[\frac{n}{xy}\right] - A - \sum_{x=1}^{x=\mu'} \sum_{y=1}^{y=u} f(x) g(y)\, H\left[\frac{n}{xy}\right] + N.$$

intenant nous avons, par l'application de la formule (7)

$$\sum_{y=1}^{y=\mu} g(y)\, H\left[\frac{n}{xy}\right] = G(\mu)\, H\left[\frac{\mu'}{x}\right] + \sum_{z=1}^{z=\left[\frac{n}{x}\right]} h(z)\, G\left[\frac{n}{zx}\right] - \sum_{z=1}^{z=\left[\frac{\mu'}{x}\right]} h(z)\, G\left[\frac{n}{zx}\right],$$

ù

$$\sum_{x=1}^{x=u'} \sum_{y=1}^{y=u} f(x) g(y)\, H\left[\frac{n}{xy}\right] = G(\mu) \sum_{x=1}^{x=\mu'} f(x)\, H\left[\frac{\mu'}{x}\right] + \sum_{x=1}^{x=\mu'} f(x) \sum_{z=1}^{\left[\frac{n}{x}\right]} h(z)\, G\left[\frac{n}{zx}\right] - M'$$

par-conséquent, puisque

$$\sum_{z=1}^{\left[\frac{n}{x}\right]} h(z)\, G\left[\frac{n}{zx}\right] = \sum_{y=1}^{\left[\frac{n}{x}\right]} g(y)\, H\left[\frac{n}{xy}\right],$$

$$C' = -A + N + M' - G(\mu) \sum_{1}^{\mu'} f(x)\, H\left[\frac{\mu'}{x}\right].$$

en déduit deux autres relations, par de simples permutations ulaires:

$$\left.\begin{aligned} A' &= -B + L + N' - H(\mu) \sum_{1}^{\mu'} g(y)\, F\left[\frac{\mu'}{y}\right], \\ B' &= -C + M + L' - F(\mu) \sum_{1}^{\mu'} h(z)\, G\left[\frac{\mu'}{z}\right]. \end{aligned}\right\}$$

En combinant ces équations (15) avec les équations (12) et (13) on obtient finalement:

$$2S = L + M + N + L' + M' + N' - I$$
$$(16) \qquad - G(\mu) \sum_1^{\mu'} f(x)\, H\left[\frac{\mu'}{x}\right] - H(\mu) \sum_1^{\mu'} g(y)\, F\left[\frac{\mu'}{y}\right] - F(\mu) \sum_1^{\mu'} h(z)\, H\left[\frac{\mu'}{z}\right].$$

C'est là le résultat que nous voulions établir. Cette formule est symétrique par rapport aux fonctions f, g, h, car la somme

$$\sum_1^{\mu'} f(x)\, H\left[\frac{\mu'}{x}\right],$$

par-exemple, peut, en vertu de la formule (4), se mettre sous la forme

$$\sum_{x=1}^{x=\mu_0} f(x)\, H\left[\frac{\mu'}{x}\right] + \sum_{z=1}^{z=\mu_1} h(z)\, F\left[\frac{\mu'}{z}\right] - F(\mu_0)\, H(\mu_0), \quad (\mu_0 = [\sqrt{\mu'}]).$$

Il est clair qu'on pourra transformer d'une manière analogue la somme

$$\sum f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_r),$$

étendue à tous les systèmes de valeurs entières et positives des variables tels que

$$x_1\, x_2 \ldots x_r \leqq n.$$

Mais la complication de la formule croît rapidement avec le nombre r*).

V.

Nous appliquerons la formule (16) au cas où chacune des fonctions f, g, h se réduit à l'unité. La fonction

$$\vartheta(n) = \sum_{xyz=n} f(x)\, g(y)\, h(z)$$

est alors égale au nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$xyz = n.$$

Dorénavant nous désignerons par $f(n)$ le nombre des diviseurs du nombre entier n en faisant, comme plus haut,

$$F(n) = \sum_1^n f(n).$$

On a évidemment

$$\vartheta(n) = \sum f(d),$$

*) On pourrait aussi envisager, dans l'espace à trois dimensions, des surfaces autres que celle qui est représentée par l'équation $xyz = n$.

la somme étant relative à tous les diviseurs du nombre n et

$$\sum_1^n \vartheta(n) = \sum_{r=1}^{r=n} f(r) \left[\frac{n}{r}\right] = \sum_{r=1}^{r=n} F\left[\frac{n}{r}\right]$$

Dans le cas particulier qui nous occupe la formule (16) nous donne donc

$$(17) \quad 2\sum_1^n \vartheta(n) = 2\sum_{xy \leq n} \left[\frac{n}{xy}\right] = 3\sum_{x=1}^{x=\mu} \sum_{y=1}^{y=\mu} \left[\frac{n}{xy}\right] + 3\sum_{xy \leq \mu'} \left[\frac{n}{xy}\right] - \mu^3 - 3\mu F(\mu').$$

Nous en déduirons tout d'abord une propriété relative à la distribution des points P sur la surface

$$xyz = n.$$

Désignons par $N(r)$ le nombre de ces points P qui se projettent, sur le plan des xy, à l'intérieur ou sur le contour du carré limité par les droites

$$x = 1, \quad x = r, \quad y = 1, \quad y = r.$$

De même soit $N'(r)$ le nombre des points P de la surface $xyz = n$ qui se projettent, sur le plan des xy, à l'intérieur ou sur le contour de la région limitée par les lignes

$$x = 1, \quad y = 1, \quad xy = r.$$

Si de l'équation (17) on retranche celle qu'on obtient en y remplaçant n par $n - 1$ on obtiendra, au premier membre, $2\vartheta(n)$. Pour évaluer le second membre nous utiliserons cette remarque de M. Hermite*) que

$$\left[\frac{n}{r}\right] = \left[\frac{n-1}{r}\right] + 1,$$

lorsque n est divisible par r et

$$\left[\frac{n}{r}\right] = \left[\frac{n-1}{r}\right],$$

quand n n'est pas un multiple de r.

Nous ferons, pour un instant,

$$\mu_1 = [\sqrt[3]{n} - 1], \quad \mu_1' = \left[\frac{n-1}{\mu}\right]$$

et nous distinguerons trois cas:

1er cas; n n'est pas un cube et n'est pas divisible par μ. Les nombres μ_1 et μ_1' sont égaux respectivement à μ et à μ', de sorte que

$$2\vartheta(n) = 3\sum_{x=1}^{x=\mu} \sum_{y=1}^{y=\mu} \left\{\left[\frac{n}{xy}\right] - \left[\frac{n-1}{xy}\right]\right\} + 3\sum_{xy \leq \mu'} \left\{\left[\frac{n}{xy}\right] - \left[\frac{n-1}{xy}\right]\right\},$$

$$(18) \quad 2\vartheta(n) = 3N(\mu) + 3N'(\mu').$$

*) Sur quelques points dans la théorie des nombres, Acta Mathematica, tome II.

2ème cas; n n'est pas un cube mais est divisible par μ. On a, dans ce cas,

$$\mu_1 = \mu, \quad \mu_1' = \mu' - 1$$

et, par-conséquent,

$$2\vartheta(n) = 3N(\mu) + 3N'(\mu'-1) + 3\left[\frac{n}{\mu'}\right] f(\mu') - 3\mu f(\mu'),$$

formule qui se réduit à

$$2\vartheta(n) = 3N(\mu) + 3N'(\mu'-1) \tag{19}$$

puisque $\left[\frac{n}{\mu'}\right] = \mu$, μ' étant $> \mu$.

3ème cas; n est un cube:

$$n = \mu^3, \ \mu' = \mu^2, \ \mu_1 = \mu - 1, \ \mu_1' = \frac{\mu^3 - 1}{\mu - 1} = \mu^2 + \mu + 1$$

d'où

$$2\vartheta(n) = 3N(\mu-1) + 6\sum_{x=1}^{x=\mu}\left[\frac{\mu^2}{x}\right] - 3\mu + 3N'(\mu)$$

$$-3\sum_{xy=\mu^3+1}^{xy=\mu^2+\mu+1}\left[\frac{n-1}{xy}\right] - \mu^3 + (\mu-1)^3 - 3\mu F(\mu^2)$$

$$+3(\mu-1)F(\mu^2+\mu+1).$$

Or

$$2\sum_{x=1}^{x=\mu}\left[\frac{\mu^2}{x}\right] = F(\mu^2) + \mu^2,$$

$$\sum_{xy=\mu^2+1}^{xy=\mu^2+\mu+1}\left[\frac{n-1}{xy}\right] = \sum_{h=\mu^3+1}^{h=\mu^3+\mu+1}\left[\frac{n-1}{h}\right] f(h)$$

$$= (\mu-1)\left(F(\mu^2+\mu+1) - F(\mu^2)\right),$$

puisque $\left[\frac{n-1}{h}\right]$ est constamment égal à $\mu - 1$ pour les valeurs de h comprises entre $\mu^2 + 1$ et $\mu^2 + \mu + 1$. Réductions faites il reste simplement

$$2\vartheta(n) = 3N(\mu-1) + 3N'(\mu') - 1. \tag{20}$$

Les propriétés exprimées par les formules (18), (19) et (20) sont la généralisation naturelle de cette proposition élémentaire qu'à tout diviseur du nombre $n < \sqrt{n}$ correspond un autre diviseur $> \sqrt{n}$.

On pourrait réciproquement de ces trois formules remonter à l'équation (17).

VI.

Avant de faire connaître la valeur asymptotique de la somme

$$\sum_{xy \leq n} \left[\frac{n}{xy}\right],$$

nous dirons quelques mots de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, définie, pour les valeurs de s dout la partie réelle est > 1 par la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

On sait*) que cette fonction est développable en série de la forme

$$\frac{1}{s-1} + C + C_1(s-1) + \frac{C_2}{1.2}(s-1)^2 + \cdots$$

convergente dans tont le plan, sauf dans le voisinage de la valeur $s = 1$.

Il est aisé d'obtenir une expression des divers coefficients $C, C_1, C_2 \ldots$. A cet effet, posons

$$u_n = \frac{1}{n^s} - \frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s} = \int_n^{n+1} \left[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right] dx,$$

et envisageons la série

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

Je dis qu'elle converge absolument pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle est > 0. Car si l'on fait $s = \alpha + i\beta$, α et β étant réels, puis qu'on désigne par ϱ_n le module de la différence

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s},$$

on aura

$$\varrho_n^2 = \left[\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha}\right]^2 + 4\,\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}\log\left(\frac{x}{n}\right)}{n^\alpha x^\alpha},$$

et, par-conséquent, pour toutes les valeurs de x comprises entre n et $n+1$,

$$\varrho_n < \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} + |\beta|\,\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^\alpha}$$

*) Oeuvres de Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

d'où finalement

$$|u_n| < \frac{\alpha + |\beta|}{n^{\alpha+1}}.$$

La série $\sum_1^\infty u_n$, converge donc absolument dès que $\alpha > 0$; elle converge en outre uniformément dans toute région finie du plan située à droite de l'axe $O\beta$. Sa somme, que nous appellerous $F(s)$, est une fonction analytique holomorphe de la variable s dans la région définie par l'inégalité $\alpha > 0$. Elle pourra se développer en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $s-1$; les coefficients de ce développement s'obtiendront en développant les divers termes u_n et en ajoutant les coefficients correspondants.

Or

$$\sum_1^n u_n = \sum_1^n \frac{1}{n^s} - \frac{(n+1)^{1-s}-1}{1-s}$$

a évidemment pour limite, pour $n = \infty$,

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

lorsqu'on suppose $\alpha > 1$. La fonction $F(s)$ est donc la continuation analytique de $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$, dans le domaine que définissent les inégalités $\alpha > 0$, $\alpha \leqq 1$ et l'on a le développement

$$(21) \qquad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^s} - \frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s}\right]$$

$$= \frac{1}{s-1} + \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} - \frac{(n+1)^{1-s}-1}{1-s}\right)$$

$$= \frac{1}{s-1} + \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s}-1}{1-s}\right)$$

valable pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle est > 0.

Nous apprenons, par la «Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann» de M. Gram*) que cette formule, trouvée avec une légère modification par M. Piltz, a été retrouvée par M. M. Stieltjes et T. L. v. Jensen. Ce dernier auteur a déterminé les valeurs numériques des premiers coefficients $C_1, C_2, \ldots$. On a

*) Bulletin de l'Académie Royale de Copenhague, 1895.

$$C = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = \text{constante d'Euler}$$

$$C_1 = -\lim_{n=\infty}\left(\frac{\log 2}{2}+\cdots+\frac{\log n}{n}-\frac{1}{2}\log^2 n\right) = 0{,}07281584548\ldots$$

$$\frac{C_2}{1.2} = \frac{1}{1.2}\lim_{n=\infty}\left(\frac{\log^2 2}{2}+\cdots+\frac{\log^2 n}{n}-\frac{1}{3}\log^3 n\right) = -0{,}004845181596\ldots$$

$$\frac{C_3}{1.2.3} = -\frac{1}{1.2.3}\lim_{n=\infty}\left(\frac{\log^3 2}{2}+\cdots+\frac{\log^3 n}{n}-\frac{1}{4}\log^4 n\right) = -0{,}00034230573\ldots$$

etc.

On vérifie facilement, au moyen, par-exemple, de la formule sommatoir d'Euler, qu'en faisant

$$\sum_1^n \frac{\log n}{n}-\frac{1}{2}\log^2 n = -C_1+\varrho\frac{\log n}{n} \tag{22}$$

la valeur absolue de ϱ reste inférieure à un.

VII.

Nous aurons besoin, plus loin, de connaître une valeur approchée de la somme

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{f(r)}{r}.$$

A cet effet nous nous appuierons sur la proposition suivante*): Si le module du quotient $\frac{A_1+\cdots+A_n^2}{n^\alpha}$ où $A_1,\ldots,A_n,\ldots$ sont des constantes quelconques, α une quantité positive ou nulle, reste, pour toute valeur de n, inférieur à un nombre fixe la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{A_n}{n^s},$$

où les termes sont rangés par ordre des nombres n croissants, converge pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle est $> \alpha$.

Or on sait, par Dirichlet**), que la fonction

$$F(n) = \sum_1^n f(n),$$

a pour valeur approchée $n\log n+(2C-1)n$ en négligeant une quantité qui reste inférieure, en valeur absolue à $A\sqrt{n}$, A étant une constante convenable.

---

*) Voir notre travail Sur la fonction $\xi(t)$ de Riemann, Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft, Zürich 1896.

**) Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie.

Il en résulte que la série

$$\zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{n^s},$$

où

$$A_n = f(n) - \log n - 2C,$$

converge certainement pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle est $> \frac{1}{2}$.

La somme de cette série se réduit à

$$3C_1 - C^2$$

pour $s = 1$, de sorte que

$$3C_1 - C^2 = \sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{n} = \sum_{1}^{n} \frac{A_n}{n} + R, \tag{23}$$

en faisant, pour abréger,

$$R = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{A_n}{n}.$$

Pour obtenir une limite supérieure de $|R|$, nous ferons, pour un instant,

$$A_1 + \cdots + A_n = B_n,$$

d'où

$$R = -\frac{B_n}{n+1} + \frac{B_{n+1}}{(n+1)(n+2)} + \frac{B_{n+2}}{(n+2)(n+3)} + \cdots.$$

Et comme $|B_n|$, d'après la propriété de $F(n)$ qu'on vient de rappeler, reste inférieur à $B\sqrt{n}$, où B est une constante convenable, on pourra faire

$$R = \frac{\eta}{\sqrt{n}}$$

la valeur absolue de η restant constamment plus petite qu'une grandeur assignable. Remplaçant cette valeur de R dans la formule (23) il viendra

$$\sum_{1}^{n} \frac{f(n)}{n} = 3C_1 - C^2 + \sum_{1}^{n} \frac{\log n}{n} + 2C \sum_{1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{\eta}{\sqrt{n}}$$

ou, plus simplement

$$\sum_{1}^{n} \frac{f(n)}{n} = 2C_1 + C^2 + \frac{1}{2}\log^2 n + 2C \log n + \frac{\eta'}{\sqrt{n}}, \tag{24}$$

la valeur absolue de η' restant, elle aussi, inférieure, quelque soit n, à une quantité assignable.

VIII.

Revenons maintenant à la formule (17)

$$(17)\quad 2\sum_{xy<n}\left[\frac{n}{xy}\right]=2S=3\sum_{x=1}^{x=u}\sum_{y=1}^{y=\mu}\left[\frac{n}{xy}\right]+3\sum_{xy\leq\mu'}\left[\frac{n}{xy}\right]-\mu^3-3\mu F(\mu'),$$

et, pour éviter des redites, convenons de désigner indistinctement par $R(n^r \cdot \log^p n)$ toute quantité de la forme $n^r \cdot \log^p n \cdot \eta$, où $|\eta|$ reste, quelque soit n, inférieur à une grandeur fixe assignable; les exposants r et p peuvent être positifs, nuls ou négatifs.

Nous avons

$$\mu = n^{\frac{1}{3}} - \varepsilon,$$

où

$$\varepsilon < 1$$

et

$$n = \mu\mu' + \varrho, \quad \varrho < \mu,$$

puisque μ' est, par-définition, le plus grand nombre entier contenu dans le quotient $\frac{n}{\mu}$ de sorte que

$$\mu\,\mu' = n + R\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$\mu' = n^{\frac{2}{3}} + R\left(n^{\frac{1}{3}}\right).$$

La formule de Dirichlet relative à la valeur asymptotique de $F(n)$ peut se mettre sous la forme

$$F(n) = n\log n + (2C-1)n + R(\sqrt{n}).$$

Appliquée au nombre μ' elle devient

$$F(\mu') = \frac{2}{3}\,n^{\frac{3}{2}}\log n + (2C-1)n^{\frac{3}{2}} + R\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$$

Nous aurons donc, tout d'abord,

$$(25)\qquad \mu^3 = n + R\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$(26)\qquad \mu F(\mu') = \frac{2}{3}\,n\log n + (2C-1)\,n + R\left(n^{\frac{2}{3}}\right).$$

Maintenant

$$\sum_{x=1}^{x=\mu}\sum_{y=1}^{y=\mu}\left[\frac{n}{xy}\right] = \sum_{x=1}^{x=\mu}\sum_{y=1}^{y=u}\frac{n}{xy} + \varrho,$$

où $|\rho|$ qui est $< \mu^2$ est, au plus, de l'ordre $n^{\frac{2}{3}}$; d'ailleurs

$$\sum_{x=1}^{x=\mu}\sum_{y=1}^{y=\mu}\frac{n}{xy} = n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\mu}\right)^2 = n\left(\log\mu + C + \frac{1}{2\mu}+\cdots\right)^2$$

d'où résulte facilement

$$(27)\quad \sum_{x=1}^{x=\mu}\sum_{y=1}^{y=\mu}\left[\frac{n}{xy}\right] = n\left(\frac{\log^2 n}{9}+\frac{2C}{3}\log n + C^2\right) + R\left(n^{\frac{2}{3}}\log n\right).$$

Enfin

$$\sum_{xy\leqq\mu'}\left[\frac{n}{xy}\right] = \sum_{xy\leqq\mu'}\frac{n}{xy} + \lambda,$$

où $|\lambda|$ qui est $< F(\mu')$ est, au plus, de l'ordre $n^{\frac{2}{3}}\log n$; et comme

$$\sum_{xy\leqq\mu'}\frac{n}{xy} = n\sum_{r=1}^{r=\mu'}\frac{f(r)}{r} = n\left(2C_1 + C^2 + \frac{2}{9}\log^2 n + \frac{4}{3}C\log n\right) + R\left(n^{\frac{2}{3}}\right),$$

en vertu de la formule (24), on aura finalement

$$(28)\quad \sum_{xy\leqq\mu'}\left[\frac{n}{xy}\right] = n\left(2C_1 + C^2 + \frac{2}{9}\log^2 n + \frac{4}{3}C\log n\right) + R\left(n^{\frac{2}{3}}\log n\right).$$

En substituant dans l'équation (17) les valeurs fournies par les équations (25) ... (28) on obtient:

$$(29)\quad \sum_{xy\leqq n}\left[\frac{n}{xy}\right] = \sum_{1}^{n}\vartheta(n) = \frac{n}{2}\left[(\log n + 3C - 1)^2 - 3C^2 + 6C_1 + 1\right] + R\left(n^{\frac{2}{3}}\log n\right).$$

Il est probable d'ailleurs que l'écart entre la valeur exacte et la valeur asymptotique précédente de $\sum_{1}^{n}\vartheta(n)$ est, en réalité, d'un ordre inférieur à $n^{\frac{2}{3}}$, comme il est probable, pour les mêmes raisons, que la formule de Dirichlet

$$F(n) = n\log n + (2C-1)n,$$

est plus approchée qu'il n'est possible de l'établir actuellement*).

La valeur moyenne

$$\frac{\vartheta(n+1)+\cdots+\vartheta(n+s)}{s}$$

*) Voir, à ce sujet, une lettre de Dirichlet à Kronecker, Oeuvres de Dirichlet, tome II, page 407.

tend vers la limite

$$\frac{1}{2}\log^2 n + 3C\log n + 3C^2 + 3C_1$$

si l'on suppose que n devenant très-grand les quantités

$$\frac{n^{\frac{2}{3}}\log n}{s} \quad \text{et} \quad \frac{s}{n}$$

tendent vers 0.

La valeur moyenne obtenue conviendra non seulement à $\vartheta(n)$, mais encore à chacun des nombres de la suite

$$\vartheta(n+1),\ \vartheta(n+2),\ \ldots\ \vartheta(n+s),$$

si l'on suppose que $\frac{s}{n}\log n$ tend aussi vers 0.

Zurich, Avril 1898.

Sur une formule nouvelle*) relative aux déterminants et son application à la théorie des équations différentielles linéaires.

Par

W. Anissimoff à Varsovie.

Considérons une équation linéaire homogène aux coefficients quelconques

$$y^{(n)} = P_0 y + P_1 y' + \cdots + P_{n-1} y^{(n-1)}. \tag{1}$$

Soient

$$y_1, y_2, \cdots y_n \tag{2}$$

les n intégrales particulières d'un système fondamental. Les relations identiques de la forme $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n = 0$, $C_1, C_2, \ldots C_n$ étant des constantes, ne sont possibles, que si l'on a à la fois

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0.$$

De même, il n'y a pas, en général, entre $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de relations

$$F_m(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \tag{3}$$

où F_m est une fonction entière, homogène du degré m avec des coefficients constants.

Mais on peut se poser le problème: *quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les intégrales* (2) *de l'équation* (1) *vérifient une relation* (3)*?*

Notre problème est intimément lié avec la question concernant la forme et les conditions sous lesquelles l'équation (1) est intégrable par des fonctions algébriques.

M. Fuchs, dans un mémoire**), a discuté la nature des intégrales des équations linéaires fuchsiennes du 3me ordre, en supposant, qu'il y avait une relation de la forme (3) entre les intégrales particulières,

*) M. Gordan, dans une lettre adressée à M. Klein et communiquée par celui-ci à moi, indique que cette formule est déjà donnée par M. Hurwitz, Math. Ann., Bd. XLV, S. 391.

**) L. Fuchs. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. Acta math., t. I, p. 321—362.

et a trouvé, en outre, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de cette relation dans le cas le plus simple $m = 2$. D'autres géomètres, nous n'en citons pas les noms, s'occupaient d'autres cas particuliers.

C'est la solution du problème posé, pris dans toute sa généralité, que le lecteur trouvera dans lignes suivantes. Cette solution est fondée sur une formule relative aux déterminants, qui n'est pas encore remarquée. Pour ne pas interrompre la marche des idées, nous déduisons préalablement cette formule.

§ 1.

Déduction d'une formule rélative aux déterminants.

Envisageons un système de n *formes linéaires* de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$(4)\qquad \begin{cases} \Phi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \Phi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

et soit

$$(5)\qquad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

le déterminant de ce système des formes.

Composons avec les $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ toutes les *formes du degré* m

$$(6)\qquad \Phi_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \Phi_1^{i_1}\Phi_2^{i_2}\ldots\Phi_n^{i_n}, \quad i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m,$$

en supposant, que les nombres entiers $i_1, i_2, \ldots, i_n$ peuvent acquérir tous les systèmes distincts des valeurs, satisfaisant à la condition $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m$. Il est évident, que le nombre total de ces formes du degré m est égal à

$$(7)\qquad C^m_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots n}{1.2\ldots m}.$$

Les formes (6) étant des fonctions entières homogènes des expressions

$$(8)\qquad x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n},$$

les coefficients de ces expressions seront composés avec les nombres a_{ik}. *Désignons par D_m le déterminant de ces coefficients.* C'est la relation entre D_m et D_1, que nous voulons établir.

Pour ce but, passons des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aux variables nouvelles $z_1, z_2, \ldots, z_n$ au moyen des formules

$$(9)\qquad \begin{cases} x_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1n}z_n, \\ x_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2n}z_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{nn}z_n, \end{cases}$$

avec le déterminant

$$(10)\qquad E_1 = \begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \ldots, & b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22}, & \ldots, & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \ldots, & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Au lieu des formes (4) nous aurons, après la transformation, les formes linéaires

$$(11)\qquad \begin{cases} \Theta_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1n}z_n, \\ \Theta_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Theta_n = c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \cdots + c_{nn}z_n, \end{cases}$$

où les coefficients c_{ik} s'expriment en fonction de a_{ik} et b_{ik} par la formule

$$(12)\qquad c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

pour $i, k = 1, 2, \ldots, n$. La transformation indiquée étant faite, les formes (6) du degré m se trouveront remplacées par les formes de ce même degré m

$$(13)\qquad \Theta_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \Theta_1^{i_1}\Theta_2^{i_2}\ldots\Theta_n^{i_n},\quad i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m.$$

Il est bien évident, que les formes (13) sont composées des expressions

$$(14)\qquad z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}$$

et des nombres c_{ik} de la même manière, dont les formes (6) sont formées avec les expressions (8) et les nombres a_{ik}.

Nommons Δ_m le déterminant du système des formes (13) par rapport aux expressions (14). Le Δ_m sera la même fonction des c_{ik}, comme le D_m des a_{ik}.

Mais on parvient aussi aux formes (13) des formes (6), en remplaçant dans les expressions (8) les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ au moyen des formules (9). Les expressions (8) seront remplacées donc par les expressions (14). Soit E_m le déterminant des coefficients du passage des expressions (8) aux expressions (14). On voit tout de suite, que E_m dépend de la même manière des b_{ik}, comme autrefois D_m des a_{ik}.

Nous aurons

$$\Delta_m = D_m E_m, \tag{15}$$

une identité fondamentale pour notre but.

Différentions l'identité (15) par rapport à a_{ik}, en faisant ensuite $k = 1, 2, \ldots n$. On a

$$\begin{cases} b_{11}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{i1}} + \cdots + b_{1k}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{ik}} + \cdots + b_{1n}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{in}} = E_m \dfrac{\partial D_m}{\partial a_{i1}}, \\ b_{21}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{i1}} + \cdots + b_{2k}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{ik}} + \cdots + b_{2n}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{in}} = E_m \dfrac{\partial D_m}{\partial a_{i2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{i1}} + \cdots + b_{nk}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{ik}} + \cdots + b_{nn}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{in}} = E_m \dfrac{\partial D_m}{\partial a_{in}}. \end{cases} \tag{16}$$

De même, la différentiation de l'identité (15) par rapport à b_{ik}, si l'on fait ensuite $i = 1, 2, \ldots, n$, nous donne

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{1k}} + \cdots + a_{i1}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{ik}} + \cdots + a_{n1}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{nk}} = D_m \dfrac{\partial E_m}{\partial b_{1k}}, \\ a_{12}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{1k}} + \cdots + a_{i2}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{ik}} + \cdots + a_{n2}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{kn}} = D_m \dfrac{\partial E_m}{\partial b_{2k}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{1k}} + \cdots + a_{in}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{ik}} + \cdots + a_{nn}\dfrac{\partial \Delta_m}{\partial c_{nk}} = D_m \dfrac{\partial E_m}{\partial b_{nk}}, \end{cases} \tag{17}$$

Nommons par A_{ik} et B_{ik} les déterminants mineurs relatifs aux éléments a_{ik} et b_{ik} des déterminants D_1 et E_1 respectivement; en d'autres termes, posons

$$\begin{cases} A_{ik} = \dfrac{\partial D_1}{\partial a_{ik}}, \\ B_{ik} = \dfrac{\partial E_1}{\partial b_{ik}}. \end{cases} \tag{18}$$

Multiplions les égalités (16) par $B_{1k}, B_{2k}, \ldots, B_{nk}$ respectivement et ajoutons les résultats obtenus. De même, on multiplie les égalités (17) par $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$ et on prend la somme des résultats. La comparaison des sommes, ainsi obtenues, nous donne

$$\begin{aligned} &\frac{E_m}{E_1}\left\{B_{1k}\frac{\partial D_m}{\partial a_{i1}} + \cdots + B_{nk}\frac{\partial D_m}{\partial a_{in}}\right\} \\ &= \frac{D_m}{D_1}\left\{A_{i1}\frac{\partial E_m}{\partial b_{1k}} + \cdots + A_{in}\frac{\partial E_m}{\partial b_{nk}}\right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Pour faire ressortir la relation cherchée, faisons dans nos formules

$$b_{ik} = 0, \; i \neq k;$$
$$b_{ik} = 1, \; i = k.$$

Il est bien visible, qu'on a aussi, étant $E = 1$,

$$B_{ik} = 0,\ i \neq k;$$
$$B_{ik} = 1,\ i = k.$$

Quant au déterminant E_m, on peut toujours arranger ses éléments de telle façon, que les termes de la forme $b_{11}^{i_1} b_{22}^{i_2} \ldots b_{nn}^{i_n}$ soient en diagonale. Alors, $E_m = 1$ et on a aussi

$$\frac{\partial E_m}{\partial b_{ik}} = 0,\ i \neq k$$

mais la détermination des $\frac{\partial E_m}{\partial b_{ii}}$ exige un calcul un peu plus long. On voit d'abord, que toutes ces dérivées sont égales entre elles, et on arrive sans peine à la formule

$$n_m = \frac{\partial E_m}{\partial b_{ii}} = \sum_0^{m-1} (m-k)\, C_{n+k-2}^{k},$$

d'où pour le calcul de n_m, on obtient une équation du premier ordre aux différences finies par rapport à m

$$\Delta n_m = \sum_0^{m} C_{n+k-2}^{k} = C_{n+m-1}^{m}.$$

Or, étant $n_1 = 1$, on parvient au résultat

$$\frac{\partial E_m}{\partial b_{ii}} = n_m = C_{n+m-1}^{n}. \tag{20}$$

L'identité (19) nous donne alors, pour toutes les valeurs de i et k,

$$\frac{\partial D_m}{\partial a_{ik}} = n_m \frac{D_m}{D_1} \frac{\partial D_1}{\partial a_{ik}},$$

d'où on obtient aisément

$$\frac{D_m}{D_1^{n_m}} = \text{Const.},$$

Const. ne dépendant pas des a_{ik}. Fait-on $a_{ik} = 0$, $a_{ii} = 1$, on a tout de suite Const. $= 1$. C'est ainsi, qu'on parvient à la formule

$$D_m = D_1^{C_{n+m-1}^{n}}, \tag{21}$$

que nous voulions établir.

Par exemple, on a

$$\begin{vmatrix} a_1^2, & 2a_1b_1, & b_1^2 \\ a_1a_2, & a_1b_2 + a_2b_1, & b_1b_2 \\ a_2^2, & 2a_2b_2, & b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}^3;$$

$$\begin{vmatrix} a_1^3, & 3a_1^2b_1, & 3a_1b_1^2, & b_1^3 \\ a_1^2a_2, & a_1^2b_2+2a_1a_2b_1, & a_2b_1^2+2a_1b_1b_2, & b_1^2b_2 \\ a_1a_2^2, & a_2^2b_1+2a_1a_2b_2, & a_1b_2^2+2a_2b_1b_2, & b_1b_2^2 \\ a_2^3, & 3a_2^2b_2, & 3a_2b_2^2, & b_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}^6.$$

Toutes ces formules se vérifient sans peine par le calcul immédiat.

§ 2.

Application de la formule (21) à la théorie des équations différentielles linéaires.

En nous reportant au problème, déjà posé, demandons nous, à uelle condition doivent satisfaire les coefficients de l'équation (1), our qu'il y eût lieu une relation (3) entre les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$. ette relation, étant de la forme

$$22) \quad F_m(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum C_{i_1, i_2, \ldots, i_n} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \ldots y_n^{i_n}, \; i_1+i_2+\cdots+i_n = m$$

ontient, en général, C^m_{n+m-1} constantes $C_{i_1, i_2, \ldots i_n}$. Supposons, que la elation existe; joignons-y les $C^m_{n+m-1} - 1$ relations nouvelles, d'en léduites par la différentiation. Le nombre des relations sera égal au ombre des constantes.

Pour donner aux résultats de nos différentiations la forme aussi imple que possible, remarquons d'abord, que notre relation (22) peut 'écrire symboliquement comme il suit

$$23) \quad F_m(y_1, y_2, \ldots, y_n) = [\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n]^m = 0.$$

Dans cette formule, après avoir élevé le polynôme

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n$$

au degré m, nous devons remplacer les nombres

$$\frac{1.2 \ldots m}{i_1! \, i_2! \ldots i_n!} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \ldots \alpha_n^{i_n}$$

par les constantes $C_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. On voit aussi, que les résultats des lifférentiations successives de (23) seront des fonctions entiéres, homogènes linéaires des expressions

$$24) \quad F_{k, k_1, \ldots, k_l} = [\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n]^k [\alpha_1 y_1' + \cdots + \alpha_n y_n']^{k_1} \cdots \cdot [\alpha_1 y_1^{(l)} + \cdots + \alpha_n y_n^{(l)}]^{k_l},$$

a signification de ces formules symboliques étant la même, que de la 'ormule (23).

Désignons

$$(25)\qquad \begin{cases} F_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n, \\ F_2 = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \cdots + \alpha_n y_n', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n = \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)}, \end{cases}$$

et, en général,

$$(26)\qquad F_{i+1} = \alpha_1 y_1^{(i)} + \alpha_2 y_2^{(i)} + \cdots + \alpha_n y_n^{(i)}.$$

Or, l'équation (1) nous fait voir, qu'on a toujours

$$(27)\qquad y^{(i)} = P_0^{(i)} y + P_1^{(i)} y' + \cdots + P_{n-1}^{(i)} y^{(n-1)},$$

où les $P_0^{(i)}, P_1^{(i)}, \ldots, P_{n-1}^{(i)}$ sont des fonctions entières des coefficients $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $i-n$. Par conséquent, d'après la formule (26), l'expression F_{i+1} sera une fonction homogène, linéaire des $F_1, F_2, \ldots, F_n$, dont les coefficients dépendent des $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $i-n$.

Cela étant bien compris, nous voyons tout de suite, que la relation (22) aussi que les autres, d'en déduites par la différentiation, se présentent sous la forme

$$(28)\qquad \sum P_{i_1, i_2, \ldots, i_n} F_1^{i_1} F_2^{i_2} \ldots F_n^{i_n} = \sum P_{i_1, i_2, \ldots, i_n} F_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = 0.$$

Le nombre des relations (28), comme nous l'avons déjà dit, est égal, aussi que le nombre des $C_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ à C_{n+m-1}^m, les coefficients $P_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ ne dépendent que des $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ et de leurs dérivées d'ordres différents jusqu'à l'ordre $C_{n+m-1}^m - n - 1$.

Mais il est bien important de remarquer, que notre système des C_{n+m-1}^m équations (28) contiendra toutes les expressions possibles

$$F_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = F_1^{i_1} F_2^{i_2} \ldots F_n^{i_n}, \quad i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m.$$

En effet, après les i différentiations de la relation (22) ou (23), on obtient les résultats de la forme (24) avec les conditions

$$(29)\qquad \begin{cases} k_1 + 2k_2 + \cdots + ik_i = i, \\ k + k_1 + k_2 + \cdots + k_i = m. \end{cases}$$

On s'en assure aisément, en considérant les dérivées successives d'une fonction quelconque u^m.

Cela posé, soient $i_1, i_2, \ldots, i_n$ les nombres d'un système déterminé, vérifiant la condition $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m$. Etudions la marche de la fonction

$$(30)\qquad p_n = i_2 + 2i_3 + \cdots + (n-1)i_n$$

pour toutes les systèmes possibles des $i_1, i_2, \ldots, i_n$. On voit sans peine, qu'on a

$$p_n \leqq (n-1)(i_2 + i_3 + \cdots + i_n) = (n-1)(m - i_1),$$

d'où il vient tout de suite que le maximum de p_n est au plus égal à $m(n-1)$. Or, ce maximum ne peut surpasser pour aucun système de $i_1, i_2, \ldots, i_n$ le nombre $C^m_{n+m-1} - 1$. En effet, considérons la fonction

$$q_n = C^m_{n+m-1} - m(n-1) - 1. \tag{31}$$

Il est évident, que pour $n = 2$ on a $q_n = 0$ et p_n atteint son maximum $C^m_{n+m-1} - 1 = m$. Pour voir, comment varie cette fonction q_n en cas $n > 2$, calculons sa différence première par rapport à n. On obtient facilement

$$\Delta q_n = C^{m-1}_{n+m-1} - m = m\left[\frac{m+1}{2} \cdots \frac{m+n-1}{n} - 1\right] > 0,$$

parce qu'on suppose toujours $m > 1$; par suite, la fonction q_n marche en croissant. Mais, comme nous l'avons vu, $q_n = 0$ pour $n = 2$; c'est ainsi, qu'on a pour $n > 2$

$$q_n > 0, \quad n > 2 \tag{32}$$

et aussi

$$\text{Maximum } p_n < C^m_{n+m-1} - 1, \quad n > 2. \tag{33}$$

Par conséquent, toutes les expressions $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ figurent nécessairement dans notre système des C^m_{n+m-1} équations (28). La démonstration ci-donnée nous indique aussi, on le voit bien clairement, que toutes les expressions $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ paraissent déjà après les $C^m_{n+m-1} - 2$ différentiations, dans les $C^m_{n+m-1} - 1$ équations premières du système (28), si l'on suppose $n > 2$. Nous ferons l'usage de cette remarque dans la suite.

Les équations (28) doivent être compatibles, leur nombre étant égal au nombre des expressions $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. C'est pour cela on doit avoir nécessairement

$$D(P_{i_1, i_2, \ldots, i_n}) = 0, \tag{34}$$

D étant le déterminant du système des coefficients $P_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, ou

$$F_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = 0 \tag{35}$$

pour tous les systèmes des valeurs des $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Examinons d'abord la deuxième hypothèse (35). Dans les équations (35) les expressions $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ sont formées avec les $y^{(i)}_k$ de la même manière, dont dans les (6) les expressions $\Phi_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ sont composées avec les a_{ik}. Désignons par

$$D_m(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{36}$$

le déterminant des $F_{i_1, i_2, \cdots i_n}$ dans les équations (35) par rapport aux $C_{i_1, i_2, \cdots i_n}$, et par

$$(37) \qquad D_1(y_1, y_2, \ldots y_n) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots y_n \\ y_1', & y_2', & \ldots y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

D'après notre formule (21), ces déterminants sont liés par la relation

$$(38) \qquad D_m(y_1, y_2, \ldots y_n) = D_1(y_1, y_2, \ldots y_n)^{C_{n+m-1}^n}.$$

Les constantes $C_{i_1, i_2, \cdots i_n}$ dans les équations (35) n'étant pas toutes nulles à la fois, pour la compatibilité de ce système il faut avoir

$$D_m(y_1, y_2, \ldots y_n) = 0,$$

ou, d'après la formule (38),

$$D_1(y_1, y_2, \ldots y_n) = 0.$$

Mais, le système des integrales $y_1, y_2, \ldots y_n$ étant fondamental, $D_1(y_1, y_2, \ldots y_n)$ est nécessairement différent du zéro. C'est pour cela, que l'hypothèse (35) est inadmissible, si l'on suppose que les constantes $C_{i_1, i_2, \cdots i_n}$ ne soient pas toutes nulles à la fois.

Il nous reste encore d'étudier de plus près l'hypothèse (34).

Considérons d'abord le cas le plus simple $n = 2$. Les formules (27) nous donnant

$$y^{(i)} = P_0^{(i)} y + P_1^{(i)} y', \quad i \geqq 2$$

les différentiations successives de la relation

$$(39) \qquad F_1^m = \sum C_{i_1, i_2} y_1^{i_1} y_2^{i_2} = 0$$

conduisent aux résultats

$$(40) \qquad \begin{cases} F_{m,0} = F_1^m = 0, \\ F_{m-1,1} = F_1^{m-1} F_2 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_{0,m} = F_2^m = 0. \end{cases}$$

D'où il suit, qu'on a

$$D(P_{i_1, i_2}) = 1,$$

et les relations de la forme $F_1^m = 0$, dans le cas considéré, sont inadmissibles. Mais cette circonstance est bien évidente, car la relation (39) nous donne

$$\frac{y_2}{y_1} = \text{Const.},$$

le résultat impossible, parce que le système des intégrales y_1, y_2 est un système fondamental.

Passons au cas général $n > 2$. Dans les n équations premières du système (28) les coefficients $P_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ sont des constantes, et, le nombre de ces coefficients aussi que le nombre des repressions $F_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ qui y figurent étant plus grand que n, les expressions $F_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ de ces équations ne satisfont pas toutes à la fois aux relations de la forme

$$F_{i_1, i_2, \ldots i_n} = 0.$$

Dans les autres $C^n_{n+m-1} - n$ équations du même système (28) les coefficients $P_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ seront, en général, les fonctions des $P_0, P_1, \ldots P_{n-1}$ et de leurs dérivées. C'est pour cela, que les équations considérées ne se vérifieront pas identiquement en vertu de n équations premières du même système, et la déterminant (34) contiendra nécessairement les $P_0, P_1, \ldots P_{n-1}$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre

$$C^m_{n+m-1} - n - 1.$$

La condition (34) est donc *nécessaire*, et, en cas général $n > 2$, elle établit une relation effective entre les coefficients $P_0, P_1, \ldots P_{n-1}$ et leurs dérivées. On suppose, cela va sans dire, que les constantes $C_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ de la relation (22) ne sont pas toutes nulles à la fois.

Mais la même condition (34) est aussi, en général, *suffisante.* Examinons de plus près cette question inverse pour démontrer notre assertion.

Supposons que l'équation (34) est satisfaite par un choix convenable des coefficients $P_0, P_1, \ldots P_{n-1}$. Pour notre déterminant $D(P_{i_1, i_2, \ldots i_n})$, de ses déterminants mineurs, correspondants aux éléments de la dernière ligne horizontale, l'un au moins ne sera pas, en général, identiquement nul*).

On peut toujours établir entre $y_1, y_2, \ldots y_n$ une relation de la forme (22), mais les rapports des $C_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ seront, en général, variables, fonctions de la variable indépendante x. Il y en entre eux

$$C^m_{n+m-1} - 2$$

tout à fait arbitraires. Les $C^m_{n+m-1} - 2$ conditions supplémentaires seront donc admissibles. Ce point étant éclairci, choisissons nos $C_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ de telle manière, que les $C^m_{n+m-1} - 1$ équations premières du système (28), dans l'hypothèse des $C_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ variables, auraient la même forme, que dans l'hypothèse des $C_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ constantes. Cela nous donne les $C^m_{n+m-1} - 2$ conditions à remplir, et nos fonctions $C_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ doivent satisfaire aux $C^m_{n+m-1} - 2$ équations premières du système (28), si l'on y remplace les $C_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ par les $\frac{dC_{i_1, i_2, \ldots i_n}}{dx}$. Les mêmes $C_{i_1, i_2, \ldots i_n}$

*) Nous ne possédons pas de démonstration générale, que, dans tous les cas, parmi les déterminants sous-dits, il y a toujours un au moins de la nature indiquée. C'est la voie aux recherches ultérieures, plus détaillées

satisfont aussi aux $C^m_{n+m-1} - 1$ équations premières du même système (28). Alors, la différentiation de l'avant-dernière équation du systeme (28) nous donne la même équation avec $\frac{d\,C_{i_1,i_2,\cdots i_n}}{dx}$ au lieu $C_{i_1,i_2,\cdots i_n}$: car, l'équation (34) est supposée satisfaite.

Par conséquent, les $C_{i_1,i_2,\cdots i_n}$ satisfaisant aux $C^m_{n+m-1} - 1$ équations premières du système (28)

$$\sum P_{i_1,i_2,\cdots i_n} F_{i_1,i_2,\cdots i_n} = 0, \tag{41}$$

où figurent les $C_{i_1,i_2,\cdots i_n}$, satisfont aussi aux $C^m_{n+m-1} - 1$ équations analogues

$$\sum P_{i_1,i_2,\cdots i_n} F'_{i_1,i_2,\cdots i_n} = 0, \tag{42}$$

qu'on obtient, en remplaçant les $C_{i_1,i_2,\cdots i_n}$ par les

$$\frac{d\,C_{i_1,i_2,\cdots i_n}}{dx}.$$

Il est bien compris, que nous ne considérons ici que le cas $n > 2$. Mais, nous avons remarqué, que, dans ce cas, toutes les expressions possibles $F_{i_1,i_2,\cdots i_n}$ figurent déjà dans les $C^m_{n+m-1} - 1$ équations premières du système (28). En outre, l'un au moins des déterminants des équations (41) ou (42) n'est pas nul. Par suite, les systèmes (41) et (42) nous donnent

$$\frac{F'_{i_1,i_2,\cdots i_n}}{F_{i_1,i_2,\cdots i_n}} = P, \tag{43}$$

P étant une fonction de x. Les équations (43) peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathrm{F}_{i_1,i_2,\cdots i_n} = 0. \tag{44}$$

Les expressions $\mathrm{F}_{i_1,i_2,\cdots i_n}$ on obtient des $F_{i_1,i_2,\cdots i_n}$ en y écrivant

$$\mathrm{C}_{i_1,i_2,\cdots i_n} = \frac{d\,C_{i_1,i_2,\cdots i_n}}{dx} - PC_{i_1,i_2,\cdots i_n}.$$

au lieu des $C_{i_1,i_2,\cdots i_n}$. Dans le système (44) nous avons le système complet des expressions $\mathrm{F}_{i_1,i_2,\cdots i_n}$; leur déterminant par rapport aux $\mathrm{C}_{i_1,i_2,\cdots i_n}$, étant égal à (38)

$$D_m(y_1, y_3, \ldots y_n),$$

comme nous avons vu, n'est pas nul. Par conséquent, on doit avoir

$$\frac{d\,C_{i_1,i_2,\cdots i_n}}{dx} = PC_{i_1,i_2,\cdots i_n}. \tag{45}$$

On conclut de là, que

$$\frac{C_{i_1,i_2,\cdots i_n}}{C_{k_1,k_2,\cdots k_n}} = \text{Const.}, \tag{46}$$

$, k_2, \ldots k_n$ étant des nombres entiers déterminés, vérifiant la con-
tion $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m$. Les rapports des $C_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ à l'une
elles sont constants. La condition (34) est donc bien suffisante.

Le problème posé est, dans ses fondements, complétement résolu.

Appliquons nos formules au cas $m=2$, $n=3$, traité par M. Fuchs.
ous avons une équation du troisième ordre

7) $$y''' = P_0 y + P_1 y' + P_2 y''$$

ec le système fondamental des intégrales y_1, y_2, y_3. Quand aura
u la relation

8) $$F_2(y_1, y_2, y_3) = 0?$$

ssons à la variable z au moyen de la formule

9) $$y = z e^{\frac{1}{3}\int P_2 dx}.$$

près la transformation, nous aurons l'équation en z

0) $$z''' = Q_0 z + Q z',$$

les coefficients Q_0 et Q_1 seront déterminés par les formules

1) $$Q_0 = \frac{27 P_0 + 9 P_1 P_2 + 2 P_2^3 - 9 P_2''}{27},$$
$$Q_1 = \frac{3 P_1 + P_2^2 - 3 P_2'}{3}.$$

Entre les intégrales correspondantes z_1, z_2, z_3 de l'équation (50)
ous aurons la relation

2) $$F_2(z_1, z_2, z_3) = 0.$$

es équations (28) prendront dans le cas considéré la forme

5) $$\begin{cases} F_{2,0,0} = 0, \\ F_{1,1,0} = 0, \\ F_{1,0,1} + F_{0,2,0} = 0, \\ F_{0,1,1} = 0, \\ F_{0,0,2} + Q_1 F_{0,2,0} = 0, \\ 2 Q_0 F_{1,0,1} + Q_1' F_{0,2,0} = 0, \end{cases}$$

Leur déterminant $D(P_{i_1, i_2, i_3})$ sera

4) $$D(P_{i_1, i_2, i_3}) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & Q_1 \\ 0, & 0, & 2Q_0, & 0, & 0, & Q_1' \end{vmatrix} = Q_1' - 2Q_0.$$

Mais l'un des déterminants mineurs correspondants aux éléments de la dernière ligne horizontale étant égal à l'unité, nous concluons, d'après notre théorie générale, que la condition

$$2Q_0 - Q_1' = 0 \tag{55}$$

est nécessaire et suffisante pour l'existence de la relation (52).

En revenant à l'équation (47), nous obtenons

$$54P_0 + 18P_1P_2 + 4P_2^3 - 27P_1' - 18P_2P_2' + 9P_2'' = 0. \tag{56}$$

C'est bien la condition, trouvée par M. Fuchs*).

Varsovie, $\frac{14}{26}$ Févr. 1898.

*) L. Fuchs. — loc. cit., p. 332.

Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie.

Von

Friedrich Schur in Karlsruhe.

Wenn der Fundamentalsatz der projectiven Geometrie zu immer neuen Publicationen Veranlassung giebt, so dürfte dies dem Gefühle entspringen, dass die Begründung dieses Satzes immer noch irgend etwas zu wünschen übrig lasse. Wir glauben nicht fehlzugehen, wenn wir die Gründe hierfür in den Beziehungen auf das Messen suchen, die bei allen bisherigen Beweisen des Fundamentalsatzes irgendwie zur Geltung kommen, man müsste denn vom Bewegungsbegriffe ausgehen wie Thomae oder gar, wie neuerdings Zeuthen*), von einem Postulate, das sich einer unmittelbaren Erkenntniss durch die Anschauung oder Erfahrung vollkommen entzieht. Solche Beweise mögen pädagogisch nicht ohne Bedeutung sein, für die Wissenschaft kommen sie nicht in Betracht, so lange das betreffende Postulat nicht selbst *bewiesen* ist.

Die Beziehungen auf das Messen finden bei denjenigen Geometern, welche die projective Geometrie ganz von den Congruenzaxiomen loslösen wollen, in der Adjunction gewisser durch einen Grenzprocess definirter Punkte ihren Ausdruck. In der Erkenntniss, dass hierdurch schon in die Elemente der Geometrie ein Begriff eingeführt wird, zu dem erst deren Ueberleitung in die Infinitesimalgeometrie Veranlassung geben könnte, hat Pasch in seinen Vorlesungen über Neuere Geometrie (Leipzig 1882) von jener Vermeidung der Congruenzaxiome abgesehen und sich nach dem Vorgange der Alten auf das sogenannte Archimedische Postulat gestützt, dem er a. a. O. § 13, S. 105 im IV. Grundsatze den folgenden Ausdruck giebt:

„Liegt der Punkt c_1 innerhalb der geraden Strecke ab, und verlängert man die Strecke ac_1 um die congruente Strecke c_1c_2, diese um die congruente Strecke c_2c_3 u. s. f., so gelangt man stets zu einer Strecke c_nc_{n+1}, welche den Punkt b enthält."

*) Zeuthen, Sur le fondement de la Géométrie projective, Comptes rendus 1898, p. 213. Vergl. die vorhergehenden Artikel über denselben Gegenstand, ibid. 1897, p. 638 und p. 859.

Bei diesem Verfahren scheint nun, wie neuerdings Felix Klein*) bemerkt hat, die Heranziehung des Congruenzbegriffes ganz überflüssig zu sein. Sieht man in der That mit Pasch diesen Grundsatz als eine Abstraction aus der Erfahrung an, so ist nicht ersichtlich, dass nicht dieselbe Auffassung für denjenigen Grundsatz erlaubt wäre, welcher aus jenem dadurch entsteht, dass das Auftragen der congruenten Strecken durch die Aufsuchung des jedesmaligen vierten harmonischen Punktes c_{i+1} von c_{i-1} in Bezug auf c_i und einen über b hinaus liegenden Punkt d ersetzt wird. Auch diesen Grundsatz wird die Erfahrung in allen der Construction überhaupt zugänglichen Fällen bestätigen, nicht anders wie das Abgreifen mit dem Zirkel das Postulat des Archimedes.

In beiden Fällen kann aber die Frage aufgeworfen werden: Ist dieser Grundsatz auch dann verbürgt, wenn er auf Punkte angewendet wird, die nicht unmittelbar und desshalb den Forderungen des Postulats entsprechend gegeben sind, sondern sich erst aus nur gedachten Constructionen ergeben? Die Bedenken gegen die unbedingte Bejahung dieser Frage scheinen im Grunde genommen ebenso berechtigt wie diejenigen gegen die strenge Geltung des Parallelenaxioms. In der That hat ja Veronese**) die Behauptung aufgestellt, dass die Geometrie vom Postulate des Archimedes unabhängig sei. Wenn nun auch gegen die von Veronese eingeführten transfiniten Zahlen, auf deren Eigenschaften er seine Behauptung stützt, Bedenken***) erhoben worden sind, so lässt sich doch auf elementarem Wege zeigen, dass alle zur Begründung der Geometrie hinreichenden Sätze aus den Congruenzaxiomen ohne das Postulat des Archimedes abgeleitet werden können. Es lässt sich dies zeigen auf Grund der wohl zuerst von H. Wiener†) ohne Beweis ausgesprochenen Behauptung, dass sich der Fundamentalsatz der projectiven Geometrie aus dem Satze des Desargues über zwei perspective Dreiecke und dem Satze des Pascal für einen aus zwei Geraden bestehenden Kegelschnitt ohne alle Stetigkeitsaxiome beweisen lasse. Es ist nämlich gerade nur dieser Fundamentalsatz, zu dessen Beweise Pasch den o. a. Grundsatz benutzt. Hiernach wird alles auf den Beweis des Pascal'schen Satzes für zwei Geraden ankommen. Das

---

*) F. Klein, Gutachten betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie, physik.-mathemat. Gesellschaft, Kasan, 1897, p. 22 (abgedruckt in Bd. 50 der mathematischen Annalen).

**) Veronese, Fondamenti di Geometria, Padova 1891, p. XXIX.

***) Vergl z. B. Schönfliess, Sur les nombres transfinis de Mr. Veronese, Rendiconti di Acc. dei Lincei, 1897, p. 362, und Veronese, Segmenti e numeri transfiniti, ib. 1898, p. 79.

†) H. Wiener, Ueber die Grundlagen und den Aufbau der Geometrie, Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1. Bd., p. 47.

ann aber nach einem auf Dandelin*) zurückgehenden Verfahren eschehen, wenn man die beiden Geraden als den zwei Schaaren von rzeugenden eines einschaligen Hyperboloids angehörig betrachten kann. ie Herstellung eines solchen Hyperboloids und zwar eines Rotationsyperboloids sowie der Beweis seiner wesentlichen Eigenschaften gengen nun sehr leicht auf Grund der Congruenzaxiome, und es kommt diglich darauf an, hervortreten zu lassen, dass diese bekannten Beeise vom Archimedischen Postulat unabhängig sind.

Bei der in § 1 gegebenen Ausführung dieses Gedankens werden ir, um nicht zu weit ausholen zu müssen, von den Grundsätzen der ongruenz ausgehen, die Pasch a. a. O. in § 13 aufgestellt hat, indem ir nur den o. a. IV. Grundsatz oder das Postulat des Archimedes snehmen. In § 2 haben wir einen Beweis für die o. a. Behauptung on H. Wiener gegeben, damit der Leser bei Zugrundelegung des uches von Pasch alle für die Begründung der Geometrie hinreichenen Elemente beisammen habe.

Ob der Pascal'sche Satz für zwei Geraden sich auch ohne die ongruenzaxiome und zugleich ohne die projective Form des Archiedischen Postulats beweisen lasse, wage ich nicht zu entscheiden. edenfalls enthalten die Congruenzaxiome Elemente, deren projective ormen mir kaum anders beweisbar erscheinen als eben mit Hülfe des undamentalsatzes der projectiven Geometrie. Sicherlich ist nun der eweis geliefert, dass auch das gewöhnliche Rechnen mit Strecken auf inem von der Masszahl und dem Archimedischen Postulate unabängigen Wege abgeleitet werden kann.

§ 1.

Beweis des Pascal'schen Satzes für einen aus zwei Geraden bestehenden Kegelschnitt.

Verstehen wir unter der Spiegelung $\mathfrak{S}$ an einer Ebene σ eine solche egenseitige Zuordnung der Punkte des Raumes, dass die Ebene σ auf er Verbindungsstrecke je zweier entsprechender Punkte in deren Mitte nkrecht steht, so gelten die folgenden Sätze:

1. *Das Spiegelbild* $\mathfrak{S}P = P'$ *jedes Punktes* P *hat wiederum den unkt* P *zum Spiegelbilde, oder* $\mathfrak{S}\mathfrak{S}P = P$; *jeder Punkt der spiegeln-n Ebene ist sein eigenes Spiegelbild.*

2. *Das Spiegelbild jeder Strecke ist eine ihr congruente Strecke.*

3. *Das Spiegelbild* g' *jeder Geraden* g *schneidet sich mit dem riginale auf der spiegelnden Ebene (in einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkte), oder* $(g, \sigma) = (\mathfrak{S}g, \sigma)$.

*) Dandelin, Recherches nouvelles sur les sections de cône et sur les hexagones inscrits et circonscrits à ses sections, Annales de Gergonne, t. 15. p. 387.

4. *Die Aufeinanderfolge dreier Spiegelungen an drei Ebenen durch dieselbe Axe a kann ersetzt werden durch eine einzige Spiegelung an einer Ebene durch dieselbe Axe, oder* $\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1 P = \mathfrak{S} P$.

Um den Leser nicht zu ermüden, wollen wir es ihm überlassen, den nahe liegenden Beweis zu liefern, dass sich die Möglichkeit der obigen Zuordnung sowie die drei ersten Sätze aus den in der Einleitung erwähnten Grundsätzen von Pasch auf rein logischem Wege ergeben. Hingegen dürfte es wohl am Platze sein, den Beweis des 4. Satzes wenigstens zu skizziren. Hierbei wird es offenbar genügen, ihn für die Ebene zu beweisen, wobei die spiegelnden Ebenen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in spiegelnde Axen s_1, s_2, s_3 durch einen festen Punkt A übergehen. Wir beweisen hierzu zuerst den Hülfssatz:

Die Aufeinanderfolge *zweier* Spiegelungen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ kann niemals durch *eine* Spiegelung ersetzt werden, es müsste denn $\mathfrak{S}_1 \equiv \mathfrak{S}_2$ sein.

Wäre nämlich die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ eine Spiegelung $\mathfrak{S}$, so müssten $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ nach Satz 1 vertauschbar sein oder $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1 P = \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2 P$. Ist dann S irgend ein Punkt der spiegelnden Axe s_1 also $\mathfrak{S}_1 S = S$, so wäre einerseits $\mathfrak{S} S = \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1 S = \mathfrak{S}_2 S$, d. h. s_2 müsste die spiegelnde Axe von $\mathfrak{S}$ sein. Ist andrerseits T_1 ein Punkt der spiegelnden Axe s_2, also $\mathfrak{S}_2 T_1 = T_1$, so folgt ebenso $\mathfrak{S} T_1 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2 T_1 = \mathfrak{S}_1 T_1$, d. h. auch s_1 müsste die spiegelnde Axe von $\mathfrak{S}$ sein. Folglich kann die Aufeinanderfolge der beiden Spiegelungen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ nur dann wieder eine Spiegelung sein, wenn $\mathfrak{S}_1 \equiv \mathfrak{S}_2$ ist.

Ist nunmehr $S_3 = \mathfrak{S}_3 S_2 = S_2 = \mathfrak{S}_2 S_1 = \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1 S = \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1 S$ ein Punkt der dritten spiegelnden Axe s_3, so geht nach Satz 2 und dem IX. Grundsatze von Pasch auf S. 109 die Figur AS_3P_3 durch diejenige Spiegelung $\mathfrak{S}$, welche AS_3 in AS überführt, entweder in ASP oder in ASP' über, wo P' das Spiegelbild von P an AS ist. Wäre nun das Letztere der Fall, so würde $\mathfrak{S}$ gleichzeitig die Figur AS_2P_2 in ASP verwandeln, was nach unserm Hülfssatze nur dann möglich wäre, wenn $\mathfrak{S}_2 \equiv \mathfrak{S}_1$ ist; dann ist aber Satz 4 evident. Es ist folglich $\mathfrak{S} P = P_3 = \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1 P$.

Wir merken schliesslich noch den folgenden vorbereitenden Satz an (vergl. Pasch a. a. O. S. 148, Fig. 50):

5. *Zwei gerade Linien g und g', die einen eigentlichen Punkt S gemein haben, können stets durch eine Spiegelung* $\mathfrak{S}$ *in einander übergeführt werden.*

Hieraus folgt:

6. *Durch die Punkte zweier Geraden g und g', die einen eigentlichen Punkt S gemein haben, können zwei Schaaren von Geraden* $g_1', g_2', \ldots$ *und* $g_1, g_2, \ldots$ *so gelegt werden, dass zwei Geraden verschiedener Schaaren stets derselben Ebene angehören, zwei Geraden derselben Schaar hingegen nicht.*

Nimmt man nämlich in der spiegelnden Ebene σ der Spiegelung $\mathfrak{S}$, die g in g' überführt, irgend eine Axe a an, die nicht auf der Ebene $[g, g']$ senkrecht steht, so entstehen die Geraden g_i' resp. g_i aus g resp. g' durch die Spiegelungen $\mathfrak{S}_i$ an den Ebenen σ_i durch a. Denn dann ist $g_i = \mathfrak{S}_i g = \mathfrak{S}_i \mathfrak{S} g' = \mathfrak{S}_i \mathfrak{S} \mathfrak{S}_k g_k$; nach Satz 4 geht folglich g_i' aus g_k durch eine einzige Spiegelung hervor, sodass g_k und g_i' nach Satz 3 einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt gemein haben müssen. Würden zwei Geraden derselben Schaar einander schneiden, so ist leicht zu sehen, dass der ersten Eigenschaft zufolge sämmtliche Geraden beider Schaaren in der Ebene $[g, g']$ liegen müssten, diese also auf a senkrecht stehen müsste; da dies ausgeschlossen war, so ist auch die zweite Eigenschaft bewiesen.

Wir kommen nunmehr zum Beweise des Hauptsatzes (Fig. 1):

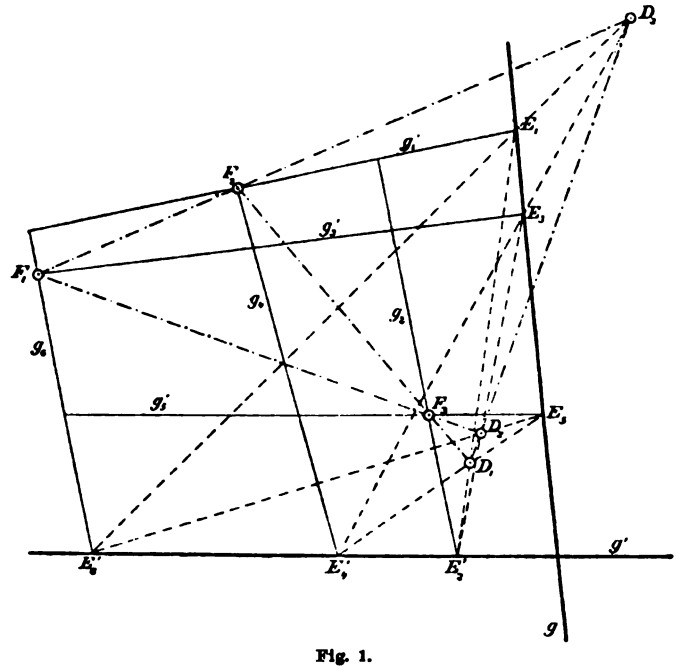


Fig. 1.

I. *Liegen die Ecken* $E_1, E_2', E_3, E_4', E_5, E_6'$ *eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden* g *und* g', *die einen eigentlichen Punkt gemein haben, so liegen die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks, d. h. die Punkte:*

$D_1 = (E_1E_2', E_4'E_5)$, $D_2 = (E_2'E_3, E_5E_6')$, $D_3 = (E_3E_4', E_6'E_1)$ *in einer geraden Linie.*

Wählen wir nämlich die Axe a wie oben und bezeichnen die Spiegelbilder von g an den Ebenen aE_1, aE_3, aE_5 mit g_1', g_3', g_5' und

diejenigen von g' an den Ebenen aE_2', aE_4', aE_6' mit g_2, g_4, g_6, so liegen D_1, D_2, D_3 der Reihe nach in den Schnittlinien der Ebenen $[g_1', g_2]$ und $[g_4, g_5']$, $[g_2, g_3']$ und $[g_5', g_6]$, $[g_3', g_4]$ und $[g_6, g_1']$. Setzen wir daher $(g_3', g_6) = F_1$, $(g_1', g_4) = F_2$, $(g_2, g_3') = F_3$, so liegen D_1, D_2, D_3 auch der Reihe nach in den Geraden F_2F_3, F_3F_1, F_1F_2 die mit den obigen Schnittlinien identisch sind. Da nun die Punkte F_1, F_2, F_3 nach Satz 6 nicht in der Ebene $[g, g']$ liegen dürfen, so liegen die Punkte D_1, D_2, D_3 in der Schnittlinie dieser Ebene mit der Ebene $F_1F_2F_3$, womit unser Satz bewiesen ist.

§ 2.

Beweis des Fundamentalsatzes der projectiven Geometrie.

Wir gehen aus von der folgenden Definition der Projectivität:

Eine Projectivität n^{ter} Stufe zwischen zwei Geraden g_1 und g_{n+1} derselben Ebene entsteht durch Projection von g_1 auf g_2 aus S_1, von g_2 auf g_3 aus S_2, ..., von g_n auf g_{n+1} aus S_n.

Hieraus folgt zunächst nach dem Satze von den perspectiven Dreiecken (Pasch, a. a. O. S 80):

7. *Die Projectivität 2. Stufe zwischen zwei Geraden g_1 und g_3 kann durch eine solche 1. Stufe oder eine Perspectivität ersetzt werden, wenn g_2 durch den Schnittpunkt von g_1 und g_3 geht.*

Weiter werden wir den Satz beweisen:

8. ***Ist eine Projectivität 2. Stufe zwischen zwei Geraden g_1 und g_3 gegeben, so kann g_2 durch irgend eine Gerade h_2 ersetzt werden, die nicht durch den Punkt (g_1, g_3) geht oder einen Punkt P_1 von g_1 mit dem ihm entsprechenden Punkt P_3 von g_3 verbindet.***

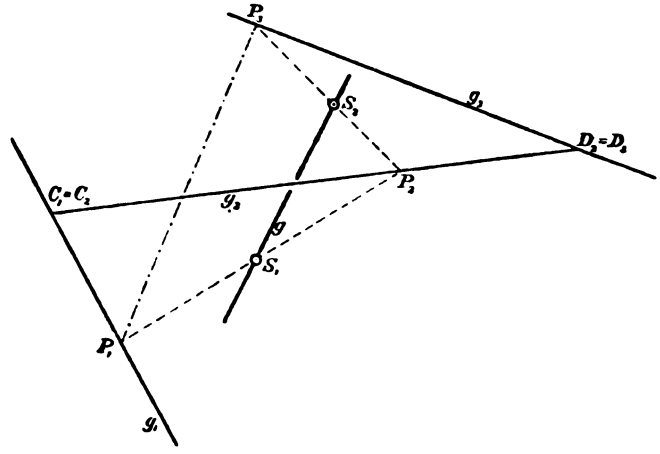


Fig. 2.

Denkt man sich nämlich g_1 und g_3 (Fig. 2) als die Projectionen zweier windschiefen Geraden g_1^0 und g_3^0 des Raumes von einem Punkte O

aus und g_2 als Projection der Verbindungslinie g_2^0 der Punkte (g_1^0, Og_2) und (g_3^0, Og_2) und setzt $(OS_1, [g_1^0, g_2^0]) = S_1^0$, $(OS_2, [g_2^0, g_3^0]) = S_2^0$, so sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte P_1 und P_3 der beiden projectiven Punktreihen g_1 und g_3 die Projectionen der Geraden $P_1^0 P_3^0$, die g_1^0, $g^0 = S_1^0 S_2^0$ und g_3^0 gleichzeitig schneiden. Diese Geraden können aber auf demselben Wege mit Hülfe irgend einer Geraden h_2^0 gefunden werden, welche g_1^0 und g_3^0 schneidet, aber nicht g^0, wobei dann S_1^0 und S_2^0 durch $T_1^0 = (g^0, [g_1^0, h_2^0])$ und $T_2^0 = (g^0, [g_3^0, h_2^0])$ zu ersetzen sind. Mit Hülfe der Projectionen T_1, h_2, T_2 von T_1^0, h_2^0, T_2^0 auf die Ebene $[g_1, g_2]$ construirt man den jedem Punkte P_1 entsprechenden Punkt P_3 genau wie zuerst mit Hülfe von S_1, g_2, S_2, wenn nur h_2 nicht durch den Punkt (g_1, g_3) geht oder h_2^0 den Strahl von O nach diesem Punkte nicht schneidet, in welchem Falle die Construction unbestimmt würde. Schneidet h_2 die Träger g_1 und g_3 in $C_1 = C_2$ und $D_2 = D_3$, so ist offenbar $T_1 = (S_1 S_2, D_1 D_2)$ und $T_2 = (S_1 S_2, C_2 C_3)$ zu setzen, so dass aus der gegebenen Projectivität T_1 und T_2 auch ohne die räumliche Figur*) gefunden werden können.

Hieraus kann der Satz bewiesen werden:

9. *Jede Projectivität zwischen zwei Geraden derselben Ebene ist entweder eine solche der 2. Stufe oder eine Perspectivität.*

Ist nämlich die Projectivität eine solche n^{ter} Stufe zwischen den Geraden g_1 und g_{n+1}, so kann man nach dem eben bewiesenen Satze, ohne die Projectivität 2. Stufe zwischen den Geraden g_{n-2} und g_n zu ändern, die g_{n-1} so abändern, dass sie durch den Punkt (g_n, g_{n+1}) geht, falls dieser nicht zugleich auf g_{n-2} liegt. Nach Satz 7 kann daher die Projectivität 2. Stufe zwischen g_{n-1} und g_{n+1} durch eine solche 1. Stufe ersetzt werden, die Projectivität zwischen g_1 und g_{n+1} folglich durch eine solche $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe. Läge der Punkt (g_n, g_{n+1}) auf g_{n-2}, so kann man ohne die Projectivität 2. Stufe zwischen g_{n-1} und g_{n+1} zu ändern, die g_n so abändern, dass sie durch den Punkt (g_{n-2}, g_{n-1}) läuft und dann ebenso schliessen. Liefen g_{n-2}, g_{n-1}, g_n, g_{n+1} durch denselben Punkt, so reducirte sich ja die Projectivität ohne Weiteres um 2 Stufen. Die Fortsetzung des obigen Schlusses ergiebt unsern Satz.

Haben wir bisher von Satz I noch nirgends Gebrauch gemacht, so bedürfen wir desselben zum Beweise des folgenden Satzes, der das allgemeine Kriterium für das Eintreten der Perspectivität angiebt:

10. *Eine Projectivität zwischen zwei Geraden derselben Ebene ist dann und nur dann eine Perspectivität, d. h. die Verbindungslinien*

---

*) Mit Hinzuziehung des Satzes I ist es leicht, bei diesen Beweisen ganz in der Ebene zu bleiben, doch kam es uns darauf an zu zeigen, wie weit man ohne diesen Satz kommt.

entsprechender Punkte laufen durch einen Punkt, wenn der Schnittpunkt der beiden Träger sich selbst entspricht.

Wir können nämlich die Projectivität zwischen den Geraden g_1 und g_3 nach dem letzten Satze immer als eine solche der 2. Stufe ansehen. Der Punkt (Fig. 3) $(g_1, g_3) = A_1 = A_3$ wird dann und nur

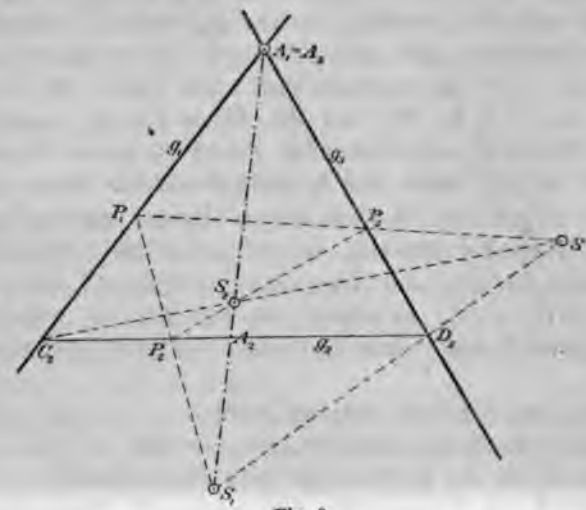


Fig. 3.

dann sich selbst entsprechen, wenn entweder g_2 oder $S_1 S_2$ durch diesen Punkt geht. Im ersten Falle ergiebt sich unsere Behauptung aus Satz 7 und im zweiten Falle durch Anwendung des Satzes I auf die beiden Geraden g_2 und $S_1 S_2$, wenn man überdies voraussetzt, dass dieselben einen eigentlichen Punkt A_2 gemein haben. Setzen wir dann nämlich wieder $(g_1, g_2) = C_2$ und $(g_2, g_3) = C_3$, so schneiden sich nach Satz I die gegenüberliegenden Seiten des Secksecks $C_2 S_2 P_2 S_1 D_2 A_1$ in den Punkten

$$S = (C_2 S_2,\ S_1 D_2), \quad P_3 = (S_2 P_2,\ D_2 A_1), \quad P_1 = (P_2 S_1,\ A_1 C_2)$$

einer Geraden, die Strahlen $P_1 P_3$ laufen folglich durch den festen Punkt S. Wäre A_2 kein eigentlicher Punkt, so können wir die Figur durch Projection auf eine andere Ebene in eine solche verwandeln, für welche diese Bedingung erfüllt ist, woraus rückwärts folgt, dass $P_1 P_3$ durch S läuft. Dass die Projectivität nur dann eine Perspectivität sein kann, wenn $A_1 = A_3$ sich selbst entspricht, ist ja selbstverständlich.

Nunmehr ist es leicht den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie zu beweisen

II. *Eine projective Beziehung zwischen zwei Geraden g_1 und g_3 einer Ebene ist dadurch eindeutig bestimmt, dass drei Punkten*

A_1, B_1, C_1 von g_1 drei Punkte A_3, B_3, C_3 von g_3 als entsprechend zugewiesen sind.

Setzen wir nämlich (Fig. 4) $g_2 = A_1 B_3$, $S_1 = (B_1 B_3, C_1 C_3)$, $S_2 = (A_1 A_3, C_1 C_3)$, so erfüllt die hierdurch bestimmte Projectivität 2. Stufe jedenfalls die Forderung und liefert zu jedem Punkte P_1 von g_1

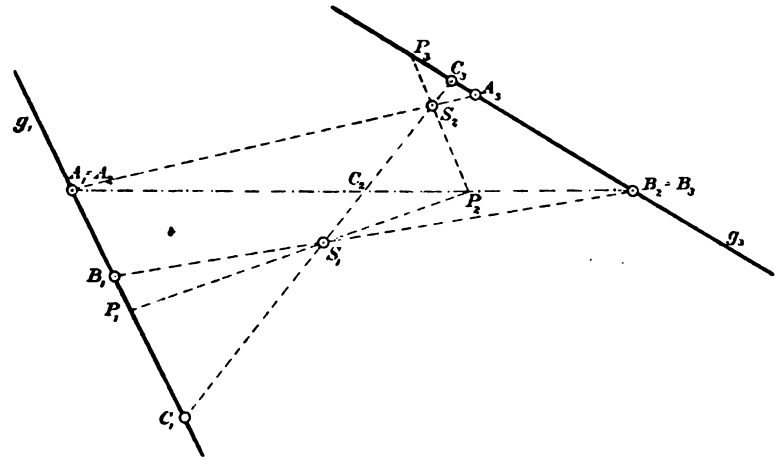


Fig. 4.

den entsprechenden Punkt P_3 von g_3 mit Hülfe eines Punktes P_2 auf g_2. Würde nun bei einer anderen der Forderung genügenden Projectivität dem Punkte P_1 der Punkt P_3' entsprechen, so entspricht bei der aus dieser durch weitere Projection der g_3 auf g_2 von S_2 aus hervorgehenden Projectivität der Punkt A_1 sich selbst, sodass nach Satz 10 $P_1 P_2'$ durch den Punkt $(C_1 C_2, B_1 B_2) = (C_1 C_3, B_1 B_3) = S_1$ laufen muss. Es fällt daher P_2' mit P_2 und folglich auch P_3' mit P_3 zusammen, sodass der Fundamentalsatz vollständig bewiesen ist.

Karlsruhe, am 21. März 1898.

Some Polar Constructions.

By

F. Morley in Haverford.

It is well recognized that the proper means for the construction of a line or point which arises by covariant processes from given points or lines is the 'Geometry of the Ruler'. Especially must reference be made to the general statements of Study, Ternary Forms, p. 26. The chief gain is that all steps of our construction are projective, so that the point or line which is finally obtained is covariant as a matter of course. If, on the other hand, we merely construct the element from our final algebraic expression we have no geometric ground for supposing that the element is covariant. For taking for simplicity points $a, b \ldots$ on a line as the given elements we shall have repetitions of the elementary operations by which we deduce, from a and b, $a \pm b$, ab, and a/b. These points are clearly not covariants of a, b alone; we have to adjoin three arbitrary points 0, 1, ∞, which either have nothing to do with our problem, or, if taken as three of our given points, in general spoil the symmetry.

A construction, by the ruler, of a covariant of 5 points, was given in the Annalen, Bd. 49, p. 596. My object here is to construct the analogous covariant for 7 points; but several simpler constructions are required, for which I know of no reference. These are first given, and are more important than the application made of them, in as much as they present themselves in many similar inquiries.

In many textbooks of Geometry, the word polar is (when speaking of conics) restricted to a line, and the word pole to a point. In Algebra, on the contrary, we speak of polars only. In any free use of the two combined, there then arises an intolerable complication; we have for example a line a_x and a line-conic a_ξ^2; the point $a_x . a_\xi^2$ is algebraically a polar, geometrically a pole. The curve arising from operating with one curve A on another B by 'contravariant differentiation' will here be called the polar of A as to B.

The notion of apolarity occurs so frequently that a notation is

required. The symbol : : is very convenient for this purpose. It seems to be no longer used for proportions, and it at once suggests, to any one who has used the complex variable in geometry, harmonic pairs which are a simple instance of apolar sets. I shall write $A :: B$ to denote that A is apolar with B.

§ 1.

The polar of two points as to three points.

We know the fundamental importance of the 'quadrilateral construction' for the polar of one point as to two others; that is for what is often called the fourth harmonic.

We consider an analogous problem. Given 5 points a, b, c, d, e, on a line, to construct the polar of de as to abc; that is to find the point f such that

$$abc :: def.$$

For simplicity of explanation, place de at the circular points, and take any triangle ξ, η, ζ whose sides meet ∞ at a, b, c. If the angles of this triangle are A, B, C, the equation of de may be taken as

$$\Sigma(\xi^2 - 2\eta\zeta \cos A) = 0. \tag{1}$$

The polar of this as to the sides of the triangle,

$$xyz = 0,$$

is

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C = 0. \tag{2}$$

Clearly this line meets ∞ at the sought point f.

The polar of (2) as to (1) is

$$\Sigma\xi(\cos A - 2 \cos B \cos C) = 0$$

and this is a point on the line through the circumcentre

$$\Sigma\xi \cos A = 0$$

and the orthocentre

$$\Sigma\xi \sec A = 0.$$

Hence if we adopt the name 'Euler line' for the join of the centroid, orthocentre, and circumcentre, we have proved that *the line* (2) *is perpendicular to the Euler line.*

Our construction is then this. We take any triangle whose sides pass through abc. We construct its centroid and orthocentre; and we take the polar of their join as to the points de. The projective statement for the centroid and orthocentre is evident.

A geometric inference should be noticed. When

$$abc :: def$$

and

$$ff' :: de$$

then it is proved at once that

$$abcf' :: d^2e^2.$$

Hence the points at ∞ on the any three lines and their Euler line are symmetrically related to the circular points. Hence:

If a line be parallel to the Euler line of three others, then any one of the 4 lines is parallel to the Euler line of the rest.

§ 2.

The polar of a point-pair as to a line and a conic.

In the construction of § 1, it is clearly not necessary that the points d and e should be separately given; it is enough if we know their *polar system*, that is the involution of which they are the real or imaginary double points. But further we can still use the construction when only a is separately given and the polar systems of bc and de are given. For in the triangle $\xi\eta\zeta$ we know $\infty\cdot\eta\zeta$, that is the middle point μ of the side opposite to ξ; hence we know the centroid. Also we know the perpendicular from ξ on x, and therefore also its polar as to $\eta\zeta$; let this polar, whose equation is

$$y\cos B + z\cos C = 0,$$

cut the side x at a point ν. Then it is proved at once that *the triangles $\xi\mu\nu$ and $\xi\eta\zeta$ have the same orthocentre.* In other words the join of the orthocentre of $\xi\eta\zeta$ to the points where its second polar as to $\xi\eta\zeta$ meets the sides are perpendicular to the respective medians. To state the proof analytically, a median is

$$y\sin B - z\sin C = 0,$$

the corresponding join is

$$2x\cos A - y\cos B - z\cos C = 0,$$

and the polar of (2) as to these two lines is zero identically.

Hence both the centroid and orthocentre of $\xi\eta\zeta$ are known, though η and ζ are not separately given.

Now let a_ξ^2 be a pair of points whose polar system is given, α_x a line and β_x^2 a point-conic. By what has just been proved we know one point on the polar

$$a_\xi^2 \,.\, \alpha_x\beta_x^2,$$

namely the point on the double line of a_ξ^2. To find a second point let b_ξ be a point on the line sought: then

$$b_\xi a_\xi^2 \,.\, \alpha_x\beta_x^2 = 0,$$

or

$$b_\xi a_\xi^2 :: \alpha_x\beta_x^2,$$

or

$$\alpha_x \,.\, b_\xi a_\xi^2 : : \beta_x^2,$$

or

$$a_\xi^2(\alpha_x b_\xi) + b_\xi(\alpha_x a_\xi^2) : : \beta_x^2,$$

If $\alpha_x b_\xi = 0$, then b_ξ and $\alpha_x a_\xi^2 : : \beta_x^2$; thus one point on the line sought is found as follows. Take the polar of α_x as to a_ξ^2, and the polar of this point as to β_x^2. This line meets α_x at a point b_ξ on the line sought.

If the point-pair is on the conic, the two constructed points coincide.

We have then

$$\xi\eta \,.\, (xy - z^2)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 2\alpha x + 2\beta y + \gamma z;$$

thus the sought line is the polar of z as to the given line

$$\alpha x + \beta y + \gamma z,$$

and the line

$$\alpha x + \beta y.$$

Other special cases may be similarly handled.

§ 3.

The polar of three points as to two conics.

It is now easy to construct

$$\xi\eta\zeta \,.\, \alpha_x^2 \beta_x^2,$$

where α_x^2 and β_x^2 are conics whose polar systems are given; and ξ, η, ζ are separately given. For

$$\zeta \,.\, \alpha_x^2 \beta_x^2 = \beta_x^2(\zeta\alpha_x^2) + \alpha_x^2(\zeta\beta_x^2) \,.$$

On the right is a cubic of a pencil which contains two systems of a conic and a line. The polars of $\xi\eta$ as to such a system was constructed in § 2; the intersection of the two such polars is a point on the line sought. By interchanging ξ, η, ζ we get three such points, and the line is determined.

It is easy to see from a little calculation that the three points so found are distinct. A fourth point on the line sought could be got by writing the line in the form

$$\alpha_x^2 \,.\, \xi\eta\zeta \,.\, \beta_x^2 + \beta_x^2 \,.\, \xi\eta\zeta \,.\, \alpha_x^2;$$

that is, we take the polar of α_x^2 as to $\xi\eta\zeta$, and the polar of this point as to β_x^2; and then perform the same process with β_x^2 and α_x^2 interchanged. We thus get two lines meeting on the sought line.

§ 4.

The polar of n points as to a repeated conic.

We denote the points by $a_1, a_2 \ldots a_n$ and the conic by C. We denote also the line a_1, C by C_1 and the constant $a_1 a_2 C$ by C_{12}. The operation $a_1 a_2 \ldots$ applied to any power of C, can be readily effected. Thus

$$\begin{aligned}
a_1 C^2 &= 2CC_1, \\
a_1 a_2 C^2 &= 2(C_1 C_2 + CC_{12}), \\
a_1 a_2 a_3 C^2 &= 2\Sigma C_1 C_{23}, \\
a_1 a_2 a_3 a_4 C^2 &= 2\Sigma C_{12} C_{34}; \\
a_1 C^3 &= 3C^2 C_1, \\
a_1 a_2 C^3 &= 6CC_1 C_2 + 3C^2 C_{12}, \\
a_1 a_2 a_3 C^3 &= 6C_1 C_2 C_3 + 6C\Sigma C_1 C_{23}, \\
a_1 a_2 a_3 a_4 C^3 &= 6\Sigma C_1 C_2 C_{34} + 6C\Sigma C_{12} C_{34}; \\
a_1 C^4 &= 4C^3 C_1, \\
a_1 a_2 C^4 &= 12C^2 C_1 C_2 + 4C^3 C_{12}, \\
a_1 a_2 a_3 C^4 &= 24CC_1 C_2 C_3 + 12C^2 \Sigma C_1 C_{23}, \\
a_1 a_2 a_3 a_4 C^4 &= 24C_1 C_2 C_3 C_4 + 24C\Sigma C_1 C_2 C_{34} + 12C^2 \Sigma C_{12} C_{34}.
\end{aligned}$$

If in particular the points are on the conic, which we can write

$$x = t^2, \quad y = 2t, \quad z = 1,$$

our expressions, equated to zero, give a series of covariant curves whose intersections with C are obtained algebraically by writing $(t - t_\alpha)^2$ for C_α and $(t_\alpha - t_\beta)^2$ for $C_{\alpha\beta}$.

An instance of a class of theorems immediately suggested by these expressions may be given. Let n lines touch a conic and on each of these lines take the polar of the point of contact as to the $n-1$ points where this line is met by the other lines. We thus have $n(n-2)$ points. *These lie on a curve of order* $n-2$; for the curve

$$t_n C_1 C_2 \ldots C_{n-1} = 0$$

meets the tangent C_n on the curve

$$\Sigma C_1 C_2 \ldots C_{n-1} C_{n-1,n} = 0.$$

§ 5.

The polar of 5 points as to a threefold conic.

One of 10 ways of writing this line is

$$a_4 a_5 (C_1 C_2 C_3 + C\Sigma C_1 C_{23}). \tag{3}$$

The line $\Sigma C_1 C_{23}$, or $a_1 a_2 a_3 C^2$, is known by § 3; it is in fact the

polar as to C of the point whose coordinates (referred to $a_1 a_2 a_3$) are C_{23}, C_{31}, C_{12}; and this point lies on the line joining a_1 to the polar of the line $\overline{a_2 a_3}$ as to C.

Also $a_4 a_5 C_1 C_2 C_3$ and $a_4 a_5 C \Sigma C_1 C_{23}$ are known by § 2; hence their intersection, a point on (3), is known.

We know then, by interchanging the 5 points, 10 points on (3).

The construction fails in special cases owing to the coincidence of the 10 points; it fails for instance if the 5 given points are on a line. Once for all, such special cases may be treated as follows. The 5 points lying on a line, draw any other line through a_1, and on it take another point a_1'. We can construct, by this article, the line

$$a_1' a_2 a_3 a_4 a_5 C^3.$$

For two positions of a_1' we have two such lines giving a point. This point is fixed for all positions of a_1' on its line, and therefore is one point on the sought line

$$a_1 a_2 \ldots a_5 C^3.$$

By varying the line through a_1 we oblain a series of peints on the sought line.

We have thus another solution of the problem of my previous note. By taking the 5 points on a conic C we can construct the covariant pair $a_1 a_2 \ldots a_5 C^3$; and by projecting on a line L and taking for C any conic through the projection of the covariant pair we obtain a line meeting L at a point covariant with the 5 points on L. This is not better than the previous solution, but it is more readily extended to the problem of 7 points.

§ 6.

The polar of 7 points as to a fourfold conic.

One of 35 ways of writing the line is

$$a_5 a_6 a_7 \{C_1 C_2 C_3 C_4 + C(2 \Sigma C_1 C_2 C_{34} + C \Sigma C_{12} C_{34})\}. \tag{4}$$

Here we must know the line

$$a_5 (2 \Sigma C_1 C_2 C_{34} + C \Sigma C_{12} C_{34}) \tag{5}$$

Now

$$\Sigma C_1 C_2 C_{34} = a_4 . C_1 C_2 C_3 + C_4 \Sigma C_1 C_{23}.$$

Hence (§ 2) the polar of any point a_5 passes through a known point; and by interchanging $a_1 a_2 a_3 a_4$ we get 4 such points. Thus $a_5 \Sigma C_1 C_2 C_{34}$ is known.

Also we know (3) which is

$$a_5 (\Sigma C_1 C_2 C_{34} + C \Sigma C_{12} C_{34}).$$

and we know $a_5 C$.

But (5) is the polar of $a_5 C$ as to

$$a_5 \Sigma C_1 C_2 C_{34}$$

and

$$a_5 (\Sigma C_1 C_2 C_{34} + C \Sigma C_{12} C_{34}).$$

We know then (5) and therefore the conic

$$2 \Sigma C_1 C_2 C_{34} + C \Sigma C_{12} C_{34}.$$

Hence (§ 3) we know one point on (4), for the quartic in (4) belongs to a pencil which contains two pairs of known conics. And by interchange of a's we know 35 points on (4).

When, owing to special positions of the 7 points, the construction points coincide, we apply the same remedy as in the case of 5 points.

To construct one point covariant with 7 given points on a line L, we make a double use of this article. We first project the 7 points on a conic C and construct the line

$$a_1 a_2 \ldots a_7 C^4.$$

We then project back on L; we have our original seven points and a point-pair. Through the point pair we take any new conic C; and construct anew the line

$$a_1 a_2 \ldots a_7 C^4.$$

This meets L at the point sought.

Concerning the General Equations of the Seventh and Eighth Degrees.*)

By

Eliakim Hastings Moore of Chicago.

Introduction.

We are to consider *primarily* the interrelations of the general equation $F_8(x) = 0$ of the 8th degree after the adjunction of the square root of its discriminant and its total-resolvent equation $G_{15}(y) = 0$ of the 15th degree, and *secondarily* the interrelations of the general equation $F_7(x) = 0$ of the 7th degree after the adjunction of the square root of its discriminant and its total-resolvent equation $H_{15}(z) = 0$ of the 15th degree.

The resolvent function $y = y(x_1, \ldots, x_8)$ of the roots $x_1 \ldots x_8$ of $F_8(x) = 0$ is invariant under an even substitution-group $G^8_{8 \cdot 168}$ of order $8 \cdot 168 = 1344$ on the $x_1 \ldots x_8$. The group $G^8_{8 \cdot 168}$ and the function $y(x_1, \ldots, x_8)$ due to Mathieu were exhibited by him by the use of the Galois imaginaries in his *Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, sur la manière de les former et sur les substitutions qui les laissent invariables* (*Journal de Mathematiques pures et appliquées*, ser. 2, vol. 6, pp. 241—323, 1861. — Cf. pp. 290—294).

Jordan in n°. 426 of his *Traité des substitutions* (1870) exhibited them more clearly by the use of the linear congruence group $LG^8_{8 \cdot 168}$ in 3 indices modulo 2. Further in n°. 516 he showed that under the alternating group $G^8_{\frac{1}{2}81}$ on the $x_1 \ldots x_8$ the 15 conjugate functions $y_1 \ldots y_{15}$ — the roots of $G_{15}(y) = 0$ — permute so as to leave invariant a certain system of 35 triples of the $y_1 \ldots y_{15}$, and that the group $G^8_{\frac{1}{2}81}$ is holoedrically isomorphic with the group $G^{15}_{\frac{1}{2}81}$ of

*) Presented to the Chicago Section of the American Mathematical Society, Dec. 31, 1897, and later slightly enlarged.

this system of 35 triples, viz., using proper notations for the $y_1 \dots y_{15}$, with the linear homogeneous congruence group $LHG^{15}_{\frac{1}{2}81}$ in 4 indices modulo 2.

The resolvent function $z(x_1, \dots, x_7)$ of the roots $x_1 \dots x_7$ of $F_7(x) = 0$ is invariant under an even substitution-group G^7_{168} of order 168 on the $x_1 \dots x_7$. The group G^7_{168} was first met*) in connection with the resolvent equation of degree 7 of the modular equation of degree 8 in the elliptic function theory.

Noether in his memoir *Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung* (*Mathematische Annalen*, vol. 15, pp. 89—110, 1879) applied the *triple system* (Δ_7) in 7 letters $x_1 \dots x_7$ and the *quadruple system* ($\square_8$) in 8 letters $x_1 \dots x_8$ to characterize most aptly in a *purely tactical way* the respective affects of the equations $F_7(x) = 0$, $F_8(x) = 0$ after the adjunction of one root of the respective equations $H_{15}(z) = 0$, $G_{15}(y) = 0$. Noether further studied the group $G^8_{8 \cdot 168}$ in considerable detail.

This present paper, having manifold thought-contact with the sources just cited, *is complete in itself and is as to form almost purely tactical.*

Setting $x_1 \dots x_7 = a \dots g$ and $x_1 \dots x_8 = a \dots h$, after a preliminary study (§ 1) of the *linear***) triple system Δ_{2^k-1} of rank k, I determine (§§ 2, 3, 4) tactically in the two sets I, II of 15 triple systems $\Delta_7 z_1 \dots z_{15}$ conjugate under the alternating $G^7_{\frac{1}{2}71}$ two linear triple or triadic systems Δ^I_{15}, Δ^{II}_{15}, and proceed similarly (§§ 5, 6) in the two sets I, II of 15 quadruple systems $\square_8 y_1 \dots y_{15}$, and prove (§ 6) — in essence, with Jordan, only luminously — that the affect of the total-resolvent $G_{15}(y) = 0$ is the linear triadic system Δ_{15} in the 15 $\square_8 y_1 \dots y_{15}$ and, so, that the groups $G^8_{\frac{1}{2}81}$ and $LHG^{15}_{\frac{1}{2}81}$ are holoedrically isomorphic.

In §§ 7, 8 I exhibit three 8-valued tactical functions

$$U_i \quad V^I_i \quad V^{II}_i \qquad (i = a \dots h)$$

of the 15 roots $\square_8 y_1 \dots y_{15}$ of $G_{15}(y) = 0$.

As affect of the total-resolvent $H_{15}(z) = 0$ we may select any one of the three tactical functions $U_h V^I_h V^{II}_h$ of its 15 roots $\Delta_7 z_1 \dots z_{15}$.

---

*) Definite references are given in the memoir of Noether cited above.

**) There is contact here with my papers: *Concerning Jordan's Linear Groups* (*Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 2, pp. 33—43, 1895), *Tactical Memoranda I—III* (*American Journal of Mathematics*, vol. 18, 264—303, 1896).

It is to be noted that these affects $U_h V_h^I V_h^{II}$ of $H_{15}(z) = 0$ are considerably less simple than the affect Δ_{15} of $G_{15}(y) = 0$ and further that these affects $U_h V_h^I V_h^{II}$ of the resolvent of $F_7(x) = 0$ were obtained only by the mediation of the affect Δ_{15} of the resolvent of $F_8(x) = 0$.

Of the theorem of the holoedric isomorphism of the alternating group $G^8_{\frac{1}{2}\,81}$ *and the linear homogeneous group* $LHG^{15}_{\frac{1}{2}\,81}$, besides the new version of the Jordan proof, I give (§ 6) a *pure group-theoretic proof* based on theorems of my paper *Concerning the Abstract Groups of Order* $k!$ *and* $\frac{1}{2}k!$ *Holohedrically Isomorphic with the Symmetric and the Alternating Substitution-Groups on* k *Letters* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, Dec. 10, 1896; vol. 28, pp. 357—366, 1897).

A third proof is due to Miller: there is but one primitive substitution-group $G^{15}_{\frac{1}{2}\,81}$ and this is holoedrically isomorphic with the alternating group $G^8_{\frac{1}{2}\,81}$ (Miller: *On the Primitive Substitution-Groups of Degree Fifteen: Proceedings of the London Mathematical Society*, June 10, 1897; vol. 28, pp. 533—544, 1897. — Cf. pp. 534, 543), and the linear group $LHG^{15}_{\frac{1}{2}\,81}$ is doubly-transitive and so primitive.

Burnside (*Theory of Groups*, p. 339, 1897), taking the $LHG^{15}_{\frac{1}{2}\,81}$ as the group of isomorphisms*) of the Abelian group of order $16 = 2^4$ and of type (1111) attempted but failed to prove the theorem in question. Considering in effect our tactical function $V^I_{i,\square^I_8}$ (§ 8) of the 15 letters he treated its (intransitive) group $\left(G^{15}_{168}(i, \square^I_8), \S\ 8\right)$ as transitive and found its order to be $\frac{1}{2}\,7!$ instead of 168.

Finally, in an interesting and natural way we are led (§ 9) to give probably essentially the definitive treatment of the Kirkman

*) It is to be noted that in introducing the notion of the group of isomorphisms of a group (loc. cit., p. 223) and especially in applying it in connection with the Abelian group of order p^n and type (111 ... to n units) to the study of the linear groups (loc. cit., pp. 336—339, 342) Burnside should have cited my papers: *The Group of Holoedric Transformation into Itself of a given Group*, and *Concerning Jordan's Linear Groups* (*Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 1, pp. 61—66, 1894, and vol. 2, pp. 33—43, 1895). Cf. the foot-note near the close of § 1 of the present paper.

fifteen school-girls problem (*of the linear triple system* Δ_{15}). Since 1850 this tactical problem has received much attention at the hands especially of English mathematicians, and in this connection the linear*) triple systems in $7, 15, 31, \ldots, 2^k-1$ letters and other interesting tactical systems are first met with. For typical references to the literature of this problem, dating from its first publication in *The Lady's and Gentleman's Diary* for 1850, one may consult Ball's *Mathematical Recreations and Problems* (2d edition, p. 89, 1892).

Among the papers on Kirkman's problem (proper) those of Woolhouse (*On Triadic Combinations of* 15 *symbols*; *The Lady's and Gentleman's Diary*, 1862, pp. 84—88: *On Triadic Combinations* [of 7 and of 15 symbols], *ibid.*, 1863, pp. 79—90), and Power (*On the Problem of the Fifteen School Girls; Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 8, pp. 236—251, 1867), and Carpmael (*Some Solutions of Kirkman's* 15*-school-girl Problem; Proceedings of the London Mathematical Society*, May 12, 1881, vol. 12, pp. 148—156, 1881) are especially rich in tactical methods and results.

In these papers one finds little use of substitutions and no (at least no explicit) use of substitution-groups, although of course the writers had a more or less definite feeling (e. g., Power, loc. cit., pp. 246, 248) as to the corresponding tactical relations. Hence naturally enough the very lengthy elementary tactical proofs of the results stated are not exhibited, and the tactical relations of the various arrangements, even when clearly perceived, are in general not sharply stated.

Reserving for § 9 more definite statements as to Kirkman solution contacts of my work with these papers, I remark here that Woolhouse**) (loc. cit., 1863, pp. 79—82) noticed that there are in 7 letters 30 cyclic***) triple systems Δ_7, all derivable from one by a substitution on its letters, and, treating of their tactical interrelations, reached certain of the results of our §§ 2 and 3, in particular, the tactical separation of the 30 Δ_7 into two sets *I*, *II* of 15 Δ_7; the most important observation, however, that the 15 Δ_7 of the same set are triadically related and so are the elements of a Δ_{15}, escaped him.

Burnside in his paper *On an Application of the Theory of Groups to Kirkman's Problem* (*The Messenger of Mathematics*, Jan. 1894,

*) Cf. § 1. I have however found no statement of the fundamental linear property (§ 1) on which any adequate treatment of the linear system Δ_{2^k-1} must be based.

**) The papers of Woolhouse came to my notice only at the conclusion of my own work.

***) That every Δ_7 is cyclic, that is, is invariant under a cyclic substitution on the 7 letters, Woolhouse did not state.

pp. 137—143) set himself the interesting *group-theoretic problem* to determine those solutions of Kirkman's problem whose corresponding groups G_N^{15} have the maximum order N. Having settled upon certain triple systems Δ_{15} each containing a Δ_7 (p. 140 (I)), he erred in affirming (p. 140) that no one of the Δ_{15} contains a second Δ_7. Owing to this error he lost my type $I\left(V_{i,}^{I}\square_{8}^{I}\right)$ of Kirkman solution with group G_{168}^{15}, and furthermore vitiated his argument to prove that 168 is the maximum order N.

§ 1.

The linear triple system Δ_{2^k-1} in 2^k-1 elements and its corresponding substitution group $G^{2^k-1}_{\Omega(2^k)}$.

A *triple system* Δ_t in t elements is an arrangement of the t elements into triples in such a way that every pair of elements enters into one and only one of the triples. The elements enter the triples and pairs without repetitions. There is no question of order amongst the elements of a triple or pair, nor amongst the triples of a triple system.

A triple system Δ_t may contain triple systems $\Delta_{t'}(t' < t)$. Any two systems $\Delta_{t'}\cdot\Delta_{t''}$ included in a system Δ_t having t''' letters in common ($t''' > 1$) have in common a system $\Delta_{t'''}$ in those letters.

Two triple systems are *equivalent* and belong to the same *class* if their elements may be set in 1—1 correspondence in such a way that under this correspondence the triples of the one system correspond to the triples of the other.

A triple system Δ_t I call *linear* if it has the *fundamental linear property* that in it every triple Δ_3 and external element a lie in and determine a system Δ_7; it has then the more general *linear property* that in it every system $\Delta_{t'}$ and external element a lie in and determine a system $\Delta_{2t'+1}$. It will appear that the degree t must have the form $t = 2^k-1$ and that *all linear systems* Δ_{2^k-1} *form a single* (*actually existing*) *class of systems.*

$t = 3$. There is but one triple system Δ_3 in three letters.

$t = 7$. In seven letters there is *but one* (*the linear*) class of triple systems. The notation may be so fixed that abc, daa', dbb', dcc' are triples; then the remaining triples must be $ab'c'$, $a'bc'$, $a'b'c$. These seven triples

$$abc,\quad daa',\quad dbb',\quad dcc',\quad ab'c',\quad a'bc',\quad a'b'c$$

do in fact form a triple system Δ_7; we denote it by

$$\Delta_7 \left\{ \begin{array}{ccc} & d & \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array} \right\} = \Delta_7 \{abc \,.\, d \,.\, a'b'c'\}.$$

This Δ_7 is obtained from the $\Delta_3 abc$ by *doubling* with respect to the letter d. The $\Delta_7 \{abc \,.\, d \,.\, a'b'c'\}$ is so obtained from any one of the seven triples with respect in each case to any one of the four letters not in the triple. Every triple contains three letters. Every letter lies in three triples. Thus as the triples make a triple system in the letters so the letters make a triple system in the triples. These two systems are equivalent. This is the self-reciprocity of the system Δ_7.

Every system $\Delta_t \{a_1 \ldots a_t\}$ *gives rise by doubling**) *to a system* $\Delta_{2t+1}\{a_1 \ldots a_t \,.\, b \,.\, a_1' \ldots a_t'\}$ whose triples are the triples of the various $\Delta_7 \{a_i a_j a_k \,.\, b \,.\, a_i' a_j' a_k'\}$ arising by doubling the various triples $a_i a_j a_k$ of the $\Delta_t \{a_1 \ldots a_t\}$.

From the system $\Delta_{3=2^2-1}$ *by successive doubling we obtain a sequence of uniquely defined systems*

$$\Delta_{2^k-1} \qquad (k = 3, 4, \ldots).$$

Clearly every linear system Δ_t is so obtainable. Conversely that the general such system Δ_{2^k-1} is *linear* we proceed to prove.

We introduce 2^k letters $a_{x_1, \ldots, x_k}$ where the k suffixes x_i are integers taken modulo 2. For brevity we write $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Further we write

$$0 = \{0, \ldots, 0\}, \quad lX = \{lx_1, \ldots lx_k\},$$

and

$$X + Y = Z, \quad \{x_1, \ldots, x_k\} + \{y_1, \ldots, y_k\} = \{z_1, \ldots, z_k\}$$

if

$$x_i + y_i \equiv z_i \pmod 2 \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Then in the $2^k - 1$ letters $a_X \,(X \neq 0)$ the totality of triples $a_{X_1} a_{X_2} a_{X_3}$ in which $X_1 + X_2 + X_3 = 0$ is obviously a triple system Δ_{2^k-1}. Further it is a linear system Δ_{2^k-1}, for in it any triple $a_{X_1} a_{X_2} a_{X_3}$ doubles from an outside letter a_{X_4} to a system

$$\Delta_7 \{a_{X_1} a_{X_2} a_{X_3} \,.\, a_{X_4} \,.\, a_{X_1+X_4} a_{X_2+X_4} a_{X_3+X_4}\}.$$

Hence this linear Δ_{2^k} may be obtained from any initial triple by successive doubling each time with respect to any letter not in the system already obtained.

---

*) This well-known doubling process first occurs in a paper by Horner: *On Triads of Once-Paired Elements* (*Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 9, pp. 15—18, 1868). He speaks however explicitly only of triple systems which may be arranged „in ascending order" (loc. cit., p. 15).

All triple systems included in a linear system are themselves linear. In the linear Δ_{2^k-1} any k' letters $a_{G_1}, \ldots, a_{G_{k'}}$, lie in and determine a linear $\Delta_{2^{k''}-1}$ $(k'' \leqq k,\ k'' \leqq k')$ which contains all the distinct letters a_X, $X = g_1 G_1 + \cdots + g_{k'} G_{k'}$, where the g_i not all 0 are integers taken modulo 2. If they determine a $\Delta_{2^{k'}-1}$, they form *a set of k' tactically independent letters* of the Δ_{2^k-1}, and their suffix-marks $G_1, \ldots, G_{k'}$ are linearly independent, that is, the only solution of the equation

$$0 = g_1 G_1 + \cdots + g_{k'} G_{k'}$$

is $g_1 \equiv g_2 \equiv \cdots \equiv g_{k'} \equiv 0$ (2). Such sets of *rank k'* exist for every rank $k' \leqq k$. There are in all $2^k - 1$ of rank 1, $(2^k-1)(2^k-2)$ of rank 2, $(2^k-1)(2^k-2)(2^k-2^2)$ of rank 3,

$$\ldots, (2^k-1)(2^k-2^1)(2^k-2^2)\ldots(2^k-2^{i-1}) \text{ of rank } i, \ldots,$$

and

$$\Omega(2^k) = (2^k-1)(2^k-2^1)(2^k-2^2)\ldots(2^k-2^{k-1})$$

of rank k. We notice in particular that

$$\Omega(2^3) = 7.6.4 = 7!/30, \quad \Omega(2^4) = 15.14.12.8 = 8!/2.$$

From a set $\{a_{G_1}, \ldots, a_{G_k}\}$ of rank k by tactical process within the system Δ_{2^k-1} one reaches every letter a_X. Hence

$$X = g_1 G_1 + \cdots + g_k G_k$$

where the g's are integers not all 0 taken modulo 2. Two distinct X's have distinct coefficient-sets $\{g_1, \ldots, g_k\}$. One easily attaches to the coefficient-set $\{g_1, \ldots, g_k\}$ a definite tactical process for the determination within the Δ_{2^k-1} of a_X from $\{a_{G_1}, \ldots, a_{G_k}\}$. $a_{X_1} a_{X_2} a_{X_3}$ is a triple if and only if $X_1 + X_2 + X_3$ vanishes modulo 2 identically in $G_1, \ldots, G_k$.

In particular, the set $\{a_{F_1}, \ldots, a_{F_k}\}$, where F_i has its i^{th} element 1 and its other elements 0 $(i = 1, \ldots, k)$ is of rank k, and

$$X = \{x_1, \ldots, x_k\} = x_1 F_1 + \cdots + x_k F_k.$$

A substitution γ on the $2^k - 1$ letters a_X $(X \neq 0)$ which leaves the system Δ_{2^k-1} invariant permutes amongst themselves the various sets of rank k. There is but one such substitution γ which replaces

$$\{a_{G_1}, \ldots, a_{G_k}\} \quad \text{by} \quad \{a_{G_1'}, \ldots, a_{G_k'}\},$$

for it must replace a_X by $a_{X'}$ where

$$X = g_1 G_1 + \cdots + g_k G_k, \quad X' = g_1 G_1' + \cdots + g_k G_k'.$$

conversely, the substitution so connected with *any* two sets of rank k does leave the system Δ_{2^k-1} invariant, since $X_1' + X_2' + X_3' = 0$ if $X_1 + X_2 + X_3 = 0$.

The linear system Δ_{2^k-1} is then a tactical invariant belonging to a substitution-group $G^{2^k-1}_{\Omega(2^k)}$ of order $\Omega(2^k)$ on the 2^k-1 letters. Its general substitution γ replaces the set $\{a_{F_1},\ldots,a_{F_k}\}$ by $\{a_{G_1},\ldots,a_{G_k}\}$, $G_j=\{g_{1j},\ldots,g_{ij},\ldots g_{kj}\}$ $(j=1,\ldots,k)$, and in general a_X by $a_{X'}$, where

$$X=\{\ldots,x_j,\ldots\},\ X'=\{\ldots,x_j',\ldots\}=\sum_{j=1,k}x_jG_j,$$

that is,

$$x_i'\equiv\sum_{j=1,k}g_{ij}x_j \qquad (i=1,\ldots,k) \tag{2}$$

where the determinant

$$|g_{ij}| \qquad (i,j=1,\ldots,k)$$

does not vanish modulo 2. Hence *the linear triple system* Δ_{2^k-1} *of rank* k *is a defining tactical invariant of the linear homogeneous congruence group**) $LHG^{2^k-1}_{\Omega(2^k)}$ *on* k *indices modulo* 2.

In the sequel we are to study in particular the case $t=15$, $k=4$. The linear triple system Δ_{15} has 15 elements Δ_1, 35 triples Δ_3, 15 triple systems Δ_7; every Δ_1 lies in 7 Δ_3 and in 7 Δ_7; every Δ_3 contains 3 Δ_1 and lies in 3 Δ_7; every Δ_7 contains 7 Δ_1 and 7 Δ_3. Since any Δ_7 doubles from any outside element Δ_1 to the Δ_{15}, two elements not of the Δ_7 have as third element of their triple an element of the Δ_7, and so any substitution leaving the Δ_{15} invariant and the 8 Δ_1 not of a Δ_7 individually invariant is the identity. Every Δ_3 is con-

*) In the paper *Concerning Jordan's Linear Groups*, already cited, I consider (§ 1) the group $\Gamma^{p^n-1}_{\Omega(p^n)}$ of holoedric transformations into itself of the Abelian group G_{p^n} of order p^n (p a prime) generated by n generators each of period n, and note (§ 3) (by use of the Galois field theory) that this group $\Gamma^{p^n-1}_{\Omega(p^n)}$ has substitutions permuting the p^n-1 letters cyclically in one cycle, and obtain (§ 2) for the three linear groups modulo p

$$LG^{p^n}_{p^n\Omega(p^n)},\quad LHG^{p^n \text{ or } p^n-1}_{\Omega(p^n)}=\Gamma^{p^n-1}_{\Omega(p^n)},\quad LFG^{(p^n-1)/(p-1)}_{\Omega(p^n)/(p-1)}$$

as respective defining invariants the three linear tactical configurations

$$LCf[p^n],\quad LHCf[p^n-1],\quad LFCf[(p^n-1)/(p-1)]$$

of which the latter two are self-reciprocal.

For $p=2$ the $LHCf[2^n-1]$ and the $LFCf[2^n-1]$ are identical and have the linear triple system Δ_{2^n-1} of the text as a defining element, (cf. for $n=3$: Noether in Math. Ann., vol. 46, p. 550; 1895), while the $LCf[2^n]$ has as defining element the linear quadruple system $\square_{2^n}$, which for $n=3$ is Noether's quadruple system $\square_8$ and appears in the sequel (§ 5).

ected or *associated* by its $3\,\Delta_1$ with $3 \cdot 6 = 18$ other Δ_3, and so is *parated* from $35 - 1 - 18 = 16$ Δ_3. 7 triples Δ_3 by pairs associated e the 7 triples either of an element Δ_1 or of a triple system Δ_7. triples Δ_3 by pairs separated embrace all the 15 elements; there are such sets (§ 8). 7 such sets without common triple embrace all ie 35 triples and constitute a solution of the Kirkman 15 *school rl problem* for the linear Δ_{15}. There are in all 240 *such solutions* 8), 120 of each of *two essentially distinct types.*

§ 2.

The 30 triple systems Δ_7 in 7 letters and the 30 corresponding substitution-groups G^7_{168}.

The systems Δ_7 in the 7 letters $abcdefg$ are all equivalent and ence conjugate under the symmetric substitution-group $G^7_{7!}$ on the letters.

The $\Delta_7\{abc.d.efg\}$ is invariant under the substitutions

$$s = (abc)(efg), \quad t = (bc)(fg), \quad u = (bf)(cg), \quad v = (ad)(cf).$$

is clear that by means of these substitutions as generators we can place abd respectively by any three letters $a'b'd'$ not of a triple. ence the group $G\{s, t, u, v\}$ so generated is the substitution-group $^7_{168}\{abc.d.efg\}$ of order $\Omega(2^3) = 7.6.4 = 168$ belonging to the linear stem $\Delta_7\{abc.d.efg\}$ (§ 1). The group G^7_{168} contains of course sub-itutions of period 7; one such is $(abdcfge)$ on the face of which ie triples abc, bdf, etc., lie in say the *forward* way.

No other system Δ_7 is invariant under these substitutions. For any stem may be written $\Delta_7\{ab'c'.d.e'f'g'\}$. We suppose it invariant nder s, t, u and v. $t = (bc)(fg)$ leaves a and d invariant and hence ie third letter of the triple $dae = dae'$; hence $e' = e$. The system ay now be written $\Delta_7\{abc'.d.ef'g'\}$. Then $s = (abc)(efg)$ replaces ie triple dae by $dbf = dbf'$; hence $f' = f$. $v = (ad)(cf)$ replaces ie triple dbf by $abc = abc'$; hence $c' = c$. Hence $g' = g$.

Since the generators are even substitutions, this group

$$G^7_{168}\{s, t, u, v\} = G^7_{168}\{abc.d.efg\}$$

a sub-group of index 15 of the alternating group $G^7_{\frac{1}{2}7!}$

There are in all $7!/168 = 30$ systems Δ_7 in 7 letters. Under ie $G^7_{7!}$ they are conjugate. They belong to 30 distinct groups G^7_{168} ub-groups of the $G^7_{\frac{1}{2}7!}$. Under the $G^7_{\frac{1}{2}7!}$ the 30 systems Δ_7 fall into wo sets of 15 conjugate systems.

In 7 letters these are in all $7.6.5/3! = 35$ triples.

Containing any one triple abc there are exactly 6 triple systems

$$\Delta_7\{abc.d.efg\},\quad \Delta_7\{abc.d.egf\},$$
$$\Delta_7\{abc.d.fge\},\quad \Delta_7\{abc.d.feg\},$$
$$\Delta_7\{abc.d.gef\},\quad \Delta_7\{abc.d.gfe\}.$$

Hence again in all there are $35.6/7 = 30$ systems Δ_7. These 30 systems come from the 6 containing abc by the repeated application of the cyclic substitution $(cdefg)$ of period 5.

If $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ is any well-defined tactical function of the n letters $a_1, \ldots, a_n$, and

$$l = \begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ a_{i_1}, \ldots, a_{i_i}, \ldots, a_{i_n} \end{pmatrix}$$

is any substitution on the n letters, then we denote by $\Phi_l(a_1, \ldots, a_n)$ or $\Phi(a_1, \ldots, a_n)_l$ the tactical function $\Phi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$. Thus, for instance, if Φ is any substitution-group, then Φ_l is the transformed group $l^{-1}\Phi l$.

Setting

$$w = (fg),\quad x = (efg),\quad y = (cdefg)$$

we see then that with the $\Delta_7\{abc.d.efg\}$ are conjugate respectively under the $G^7_{\frac{1}{2}7!}$ and under the $G^7_{7!}$ the 15 and the 30 systems

$$\Delta_7\{abc.d.efg\}_{x^i y^j},\quad \Delta_7\{abc.d.efg\}_{w^h x^i y^j}$$
$$(h=0, 1;\ i=0, 1, 2;\ j=0, 1, 2, 3, 4\}$$

and accordingly that the group $G^7_{168}\{abc.d.efg\}$ extends to the $G^7_{\frac{1}{2}7!}$ and to the $G^7_{7!}$ respectively by the sets of right-hand extenders

$$x^i y^j,\ w^h x^i y^j.$$

§ 3.

Fundamental tactical relations of the 30 systems Δ_7.

By consideration of the sets of systems Δ_7 having one or more triples in common we reach a purely tactical separation of the 30 systems into two sets of 15 systems. The tactical relations so discovered are fundamental for the sequel.

Two systems Δ_7 having no triple in common we call *separated*.

We consider the 6 systems (§ 2) having the triple abc in common. The two systems

$$\Delta_7(abc.d.efg\}$$

and

$$\Delta_7\{abc.d.fge\} = \Delta_7\{cab.d.efg\}$$

ıve in common only this triple abc. The two systems

$$\Delta_7\{abc.d.efg\} = \Delta_7\{bdf.a_1.ceg\}$$

ıd

$$\Delta_7\{abc.d.egf\} = \Delta_7\{ceg.a.bdf\}$$

ıve in common the three triples abc, ade, afg containing a. These ro pairs of systems represent all types of pairs of systems having a iple in common.

A system $\Delta' = \Delta\{abc.d.efg\}$ gives rise with respect to one its triples abc to a *triad* $\Delta_3 = T_{abc}$ of systems $\Delta' = \Delta'_{abc}, \Delta'_{bca}, \Delta'_{cab}$, ıving each with each only that triple abc in common. We notice that e substitution $(bc)(fg)$ leaves the system Δ' and the triple abc and the triad T_{abc} invariant, in fact interchanging the systems $\Delta'_{bca}, \Delta'_{cab}$. wo systems of such a triad we call *triadically related*, and indeed *by e triple abc*. Every system belongs to 7 such triads. Every triple ;termines two such triads having no common system. We call them ro *associated triads*.

A system $\Delta' = \Delta\{abc.d, efg\}$ gives rise with respect to one of s letters d to a *duad* of systems,

$$\Delta' = \Delta_7\{abc.d.efg\}, \quad \Delta'_d = \Delta_7\{efg.d.abc\},$$

ıving in common the triad of triples of each system containing the tter d. Two systems of such a duad we call *associated* and indeed y the letter d. Every system belongs to 7 such duads. Every letter ;termines 15 such duads.

Two systems of a duad are associated and belong in three ways ;spectively to two associated triads. Two associated triads determine duads of associated systems.

A system $\Delta' = \Delta_7\{abe.d.efg)$ gives rise with respect to one f its triples abc to three systems $\Delta_a', \Delta_b', \Delta_c'$, each associated with ıd having abc in common with Δ'. Hence $\Delta_a', \Delta_b', \Delta_c'$ form the iad T_{abc} of systems associated with the triad T_{abc} to which Δ' elongs.

A system $\Delta' = \Delta\{abc.d.efg\}$ determines 7 associated systems $'_a \Delta'_b \Delta'_c \Delta'_d \Delta'_e \Delta'_f \Delta'_g$. Any two of these systems $\Delta'_i \Delta'_j$ are triadically ;lated. Every triple ijk of Δ' corresponds to a triad

$$\Delta_3 = T_{ijk} = \Delta'_i \Delta'_j \Delta'_k$$

f triadically related systems. Hence, the 7 systems associated to a iple system $\Delta' = \Delta_7\{abc.d.efg\}$ form by their triads Δ_3 an *asso-ated* (triple, or say) *triadic system* $\Delta_7' = \Delta_7\{\Delta'_a \Delta'_b \Delta'_c . \Delta'_d . \Delta'_e \Delta'_f \Delta'_k\}$. here are amongst the 30 triple systems Δ_7 30 such triadic systems Δ_7'.

With respect to any one system Δ_7 the systems Δ_7 break up into

$$30 = 1 + 14 + 7 + 8,$$

iz., into the initial system, the 14 triadically related systems

belonging to its 7 triads, the 7 associated systems belonging to its 7 duads, and finally 8 separated systems.

If a system Δ' is triadically related to each of two systems Δ'' and Δ''', then Δ'' and Δ''' are triadically related to each other. The three systems may belong to the same triad. If not, $\Delta'\Delta''$ and $\Delta'\Delta'''$ are respectively triadically related by two distinct triples of Δ'. These triples have a letter say a in common. Then Δ' is associated by the letter a to a system $\Delta^{IV} = \Delta'_a$. Δ^{IV} contains the triples underlying the triads $\Delta'\Delta''$ and $\Delta'\Delta'''$. Hence Δ'' and Δ''' are each associated to Δ^{IV}, and so indeed are triadically related to each other, — in fact, by a triple of Δ^{IV} not containing a.

§ 4.

The two equivalent sets of 15 triadically related Δ_7. The corresponding linear triadic systems Δ_{15} and their groups $G^{15}_{\frac{1}{2}7!}$ induced by the alternating group $G^{7}_{\frac{1}{2}7!}$.

Every system Δ' then (§ 3) belongs to and determines uniquely a set of 15 systems Δ_7 — viz., Δ' and its 14 triadically related systems — such that any two of the set are triadically related. The 30 systems Δ_7 fall into two such say *opposite* sets: *I* and *II*. Two opposite systems Δ_7^I and Δ_7^{II} are either separated or associated. Two associated triads T_{ijk} belong to opposite sets: T^I_{ijk}, T^{II}_{ijk}. In each set the 35 triads T_{ijk} constitute a triadic system Δ_{15} in the 15 systems Δ_7 of that set.

Any three systems Δ_7^I not of a triad of the Δ^I_{15} have in common (exactly) one associated system $\Delta_7^{II\,0}$ and hence belong to the triadic system $\Delta_7^{I\,0}$ associated to the system $\Delta_7^{II\,0}$. Hence within the Δ^I_{15} any triad*) $\Delta^I_3 = T^I_{ijk}$ doubles from an outside system Δ^I_7 to a triadic system Δ^I_7. Hence the triadic system Δ^I_{15} is *linear* (§ 1) *of rank* 4.

The transposition (fg) interchanges the two associated systems

$$\Delta_7\{abc.d.efg\}, \quad \Delta_7\{abc.d.egf\}$$

and hence the two opposite sets of triadically related systems respectively determined by then. The same is true for any transposition.

Any substitution l on the letters $a \ldots g$ either leaves the two sets and their triadic linear systems Δ_{15} individually invariant or it interchanges them. Accordingly we have a separation of all substi-

*) A triad T^I_{ijk} meets any outside system Δ^I_7 in a triad of triples having a common letter and belonging to the associated Δ^{II}_7.

utions l into two classes, even and odd, depending upon the tactically roved fact that the various decompositions of l into transpositions nust be either all into an even or all into an odd number of transpositions. The even substitutions constitute the alternating group $G^7_{\frac{1}{2}7!}$ of order $\frac{1}{2}7!$. The group G^7_{168} leaving any Δ_7 invariant contains only even substitutions. No substitution l, except the identity, leaves all the 15 systems of either set individually invariant. For*) any such l is even, and, if not the identity, is under the $G^7_{7!}$ conjugate with one of the substitutions,

$$(ab)(cd),\ (abc),\ (abd)(efg),\ (abcd)(ef),\ (abcde),\ (abcdefg),$$

and no one of these leave invariant either of the two opposite systems

$$\Delta_7\{abc.d.efg\},\quad \Delta_7\{abc.d.egf\}.$$

Hence the substitutions l of the $G^7_{\frac{1}{2}7!}$ induce $\frac{1}{2}7!$ substitutions λ^I on the 15 systems Δ^I_7 and $\frac{1}{2}7!$ substitutions λ^{II} on the 15 systems Δ^{II}_7, which leave the respective systems Δ^I_{15}, Δ^{II}_{15} invariant. These substitutions λ^I, λ^{II} form groups $G^{15\,I}_{\frac{1}{2}7!}$, $G^{15\,II}_{\frac{1}{2}7!}$ subgroups of the groups $G^{15\,I}_{\frac{1}{2}8!}$, $G^{15\,II}_{\frac{1}{2}8!}$ (§ 1) of the linear systems Δ^I_{15}, Δ^{II}_{15}. Tactical affect unctions of the groups $G^{15\,I}_{\frac{1}{2}7!}$, $G^{15\,II}_{\frac{1}{2}7!}$ are given in § 8.

In the linear system Δ^I_{15} of rank 4 any set of four independent ordered Δ^I_7 transforms into another such set by a definite substitution of the group $G^{15\,I}_{\frac{1}{2}8!}$, while *any set of three transforms into another such set by a definite substitution* λ^I *of the* $G^{15\,I}_{\frac{11}{2}7!}$. The latter statement follows immediately from the fact that in the group $G^7_{\frac{1}{2}7!}$ there is exactly one substitution l which transforms any system $\Delta^{II'}_7$ with its any three independent ordered letters a', b', c' into respectively any other system $\Delta^{II''}_7$ with its any three independent ordered letters a'', b'', c'' by the remark that any three independent systems Δ^I_7 have one common associated Δ^{II}_7, with which they are associated by three letters in the Δ^{II}_7 independent.

---

*) I avoid the use of the fact that $G^7_{\frac{1}{2}7!}$ is simple.

The $G_{168}^{7}\{abc\,.\,d\,.\,efg\}$ belonging to a particular system

$$\Delta' = \Delta_7^I\{abc\,.\,d\,.\,efg\}$$

leaves no other system Δ_7 invariant. It contains a substitution of period 2 interchanging the two additional systems Δ_7^I of any triad $T_{ij\lambda}^I$ containing Δ' and a substitution of period 7 permuting cyclically its 7 triples abc etc. and so its 7 triads T_{abc}^I etc. It is accordingly transitive and imprimitive on the remaining 14 systems Δ_7^I, the 7 triads T_{ijk}^I determining a separation into 7 pairs of systems. As to the 15 systems Δ_7^{II} of the opposite set the group $G_{168}^{7}\{abc\,.\,d\,.\,efg\}$ induces the group $G_{168}^{7}\{\Delta_a'\Delta_b'\Delta_c'\,.\,\Delta_d'\,.\,\Delta_e'\Delta_f'\Delta_g'\}$ on the 7 systems Δ_i' of the triadic system $\Delta_7^{II}\{abc\,.\,d\,.\,efg\}$ associated with $\Delta' = \Delta_7^I\{abc\,.\,d\,.\,efg\}$. On the remaining $8\,\Delta_7^{II}$ it induces an holoedrically isomorphic transitive group G_{168}^{8}; this group is transitive since it leaves no Δ_7^{II} invariant and by its substitution of period 7 connects at least 7 transitively; it is holoedrically isomorphic to the G_{168}^{7}, since the identity on the $8\,\Delta_7^{II}$ implies the identity on the $15\,\Delta_7^{II}$ of the linear triadic system Δ_{15}^{II} (§ 1). Of course the group G_{168}^{7} of Δ' permutes the 15 triadic systems Δ_7^I just as it permutes their associated systems Δ_7^{II}.

§ 5.

The 30 quadruple systems $\square_8$ in 8 letters and the corresponding 30 substitution-groups $G_{8.168}^{8}$.

A *quadruple system* $\square_q$ in q elements is an arrangement of the q elements into quadruples in such a way that every triple of elements enters into one and only one of the quadruples. The elements enter the quadruples and the triples without repetition. There is no question of order amongst the elements of a quadruple or triple, nor amongst the quadruples of a quadruple system.

In a quadruple system $\square_q$ in the q letters $a_1, \ldots, a_q$ the quadruples containing any particular letter quâ triples in the remaining letters constitute a triple system Δ_{q-1} in those letters. Any three of these letters not forming a triple of the Δ_{q-1} determine a quadruple of the $\square_q$ whose fourth letter is likewise of these $q-1$ letters.

In the 8 letters $a \ldots h$ all quadruple systems are equivalent to the system

$$\square\{abc\,.\,d\,.\,efg\,.\,h\} = \square\left\{\begin{matrix} d \\ abc \\ efg \\ h \end{matrix}\right\}$$

with the quadruples

$$abch,\ daeh,\ dbfh,\ dcgh,\ afgh,\ ebgh,\ efch,$$
$$defg,\ bcfg,\ aceg,\ abef,\ debc,\ dafc,\ dabg.$$

These 14 quadruples are the triples of $\Delta_7\{abc.d.efg.h\}$ with affixed h and the quadruples of $\Delta_7\{abc.d.efg\}$ complementary to those triples. They separate into 7 pairs of complementary quadruples.

There is thus a 1 — 1 correspondence between the systems Δ_7 in $a \ldots g$ and the systems $\square_8$ in $a \ldots h$. There are 30 $\square_8$ in $a \ldots h$; each is invariant under a group $G^8_{8.168}$ of order

$$8!/30 = 8.168 = 8.7.6.4 = 1344;$$

the 30 groups $G^8_{8.168}$ are distinct, for their 30 sub-groups G^7_{168} leaving h invariant are distinct (§ 2).

Since $\square_8\{abc.d.efg.h\} = \square_8\{efg.h.abc.d\}$, the group $G^8_{8.168}\{abc.d.efg.h\}$ contains the substitution

$$r = (ae)\,(bf)\,(cg)\,(dh),$$

and it is generated by the substitutions r, s, t, u and v (§ 2), since by these substitutions as generators we can replace $habd$ respectively by any four letters $h'a'b'd'$ not of a quadruple. The groups $G^8_{8.168}$ contain only even substitutions.

Further with the $\square_8\{abc.d.efg.h\}$ are conjugate respectively under the $G^8_{\frac{1}{2}81}$ and the G^8_{81} the 15 and the 30 systems

$$\square_8\{abc.d.efg.h\}_{x^iy^j},\quad \square_8\{abc.d.efg.h\}_{w^hx^iy^j},$$
$$(h = 0, 1;\ i = 0, 1, 2;\ j = 0, 1, 2, 3, 4)$$

and accordingly the $G_{8.168}\{abc.d.efg.h\}$ extends to the $G^8_{\frac{1}{2}81}$ and the G^8_{81} respectively by the 15 and the 30 right-hand extenders x^iy^j, $w^hx^iy^j$. —

A linear Δ_{15} determines a quadruple system in the 8 elements not of a Δ_7, for any three of those elements lie in a Δ_7 meeting the given Δ_7 in a Δ_3 and so containing a fourth outside element (§ 1). Hence (by the concluding remarks of § 4) the group $G^8_{8.168}$ of a quadruple system $\square_8$ contains a sub-group G^8_{168} transitive and holoedrically isomorphic to the group G^7_{168} of a triple system Δ_7.

§ 6.

The two equivalent sets of 15 triadically related $\square_8$. The corresponding linear triadic systems Δ_{15}. Holoedric isomorphism of the alternating group $G^{8}_{\frac{1}{2}\,81}$ of degree 8 and the linear homogeneous congruence group

$$G^{15}_{\Omega(2^4)=\frac{1}{2}\,81}$$ with 4 indices modulo 2.

It is convenient to introduce for the *combinations* of the 8 letters $a \ldots h$ and for the *separations* of the 8 letters into combinations and for the corresponding *types* notations C and S with suffixes: for instance,

Combinations: C_a, C_{ab}, C_{abc}, C_{abcd}.

Separations: $S_{abcd.efgh}$, $S_{abc.d.efg.h}$, $S_{ab.cd.ef.gh}$.

Types: C_1, C_2, C_3, C_4; S_{44}, S_{3311}, S_{2222}.

There is no question of order of the combinations of a separation.

Two distinct separations S_{44} determine uniquely and belong to a separation S_{2222} or S_{3311}; we call them respectively *associated* or *separated*, and indeed by the separation S_{2222} or S_{3311}.

Any separation $S_{ab.cd.ef.gh}$ of type S_{2222} belongs to a triad $A_{ab.cd.ef.gh}$ of mutually associated separations S_{44}, viz.,

$$A_{ab.cd.ef.gh} = [S_{abcd.efgh},\ S_{abef.cdgh},\ S_{abgh.cdef}].$$

Any separation $S_{abc.d.efg.h}$ of type S_{3311} belongs to a duad

$$[S_{abcd.efgh},\ S_{abch.defg}]$$

of separated separations S_{44}.

Any quadruple system $\square_8$ is made up of 7 separations S_{44} forming 7 triads A_{2222}. These correspond in the Δ_7 to the 7 triads of triples having a common letter. Any two separations lie in one triad. Any two triads have a common separation. The system of 7 associated separations S_{2222} contains without omission or repetition the 28 combinations C_2. Thus:

	Separations S_{44}	*Separations* S_{2222}
	$S_{habc.defg}$	$S_{ae.bf.cg.dh}$
	$S_{hdae.bcfg}$	$S_{de.bc.fg.ah}$
	$S_{hdbf.aceg}$	$S_{df.ca.ge.bh}$
$\square_8\{abc.d.efg.h\}$	$S_{hdcg.abef}$	$S_{dg.ab.ef.ch}$
	$S_{hafg.debc}$	$S_{da.bg.cf.eh}$
	$S_{hebg.dafc}$	$S_{db.ce.ag.fh}$
	$S_{hefc.dabg}$	$S_{dc.af.be.gh}$.

The 7 separations S_{2222} form a complete set of conjugate separations

under the $G^8_{8.168}\{abe.d.efg.h\}$, and so do the 7 corresponding substitutions $s_{ae.bf.kg.dh} = (ae)(bf)(cg)(dh)$ etc. With the identity these substitutions s_{2222} form a commutative group $G_8{}^8$ of order 8, since the corresponding separations S_{2222} have by triples a common separation S_{44}. This group $G_8{}^8$ is simply transitive and regular. Moreover since $s_{ae.bf.cg.dh}$ belongs to the $G^8_{8.168}\{abc.d.efg.h\}$ the group $G_8{}^8$ is self-conjugate in the $G^8_{8.168}\{abc.d.efg.h\}$; further, the group $G^7_{168}\{abc.d.efg\}$ extends to the $G^8_{8.168}\{abc.d.efg.h\}$ by the substitutions of the $G_8{}^8$ as right-hand extenders, and hence the $G_8{}^8$ extends to the $G^8_{8.168}$ by the substitutions of the G^7_{168} as right — or as left — hand extenders.

The quadruple system $\square_8$ is determined uniquely by such a system of 7 separations S_{2222} containing once every combination C_2 and every two separations S_{2222} having a separation S_{44} in common, and hence also uniquely by such a corresponding $G_8{}^8$. There are then 30 such groups $G_8{}^8$; they are conjugate under the G^8_{81} and each is self-conjugate under exactly the corresponding $G^8_{8.168}$.

The tactical relations (§§ 3, 4) of the $30\,\Delta_7$ yield corresponding tactical relations of the $30\,\square_8$.

Two distinct quadruple systems are either (1) *separated*, having in common no separation S_{44}, or (2) *triadically related*, having in common one separation S_{44}, or (3) *associated*, having in common a triad A_{2222} of associated separations S_{44}.

A separation $S_{abcd.efgh}$ lies in 6 quadruple systems $\square_8$ which fall into two associated triads*) $T_{abcd.efgh}$ of systems, such that two of the same triad T are triadically related and two of different triads T are associated.

A triad $A_{ae.bf.cg.dh}$ of associated separations S_{44} lies in two associated quadruple systems

$$\square_8\{abc.d.efg.h\} \text{ and } \square_8\{efg.d.abc.h\}.$$

The three quadruple systems $\square'_{A_1}\,\square'_{A_2}\,\square'_{A_3}$ respectively associated with a system $\square'$ by three triads $A_1\,A_2\,A_3$ having a separation S'_{44} in common are triadically related by the separation S'_{44}.

Thus the 7 systems $\square_8$ associated with a particular system $\square_8\{abc.d.efg.h\}$ form an associated triadic system $\Delta_7\{abc.d.efg.h\}$ whose 7 triads $T_{habc.defg}$ etc. correspond to the 7 separations $S_{habc.defg}$ etc. of the $\square_8\{abc.d.efg.h\}$.

The 30 systems $\square_8$ fall into two *opposite* sets *I, II* of 15 systems $\square_8^I$, $\square_8^{II}$. Two systems of the same set are triadically related. Two

*) The triads T_{efg} of Δ_7 and $T_{abcd.efgh}$ of $\square_8$ correspond uniquely.

systems of opposite sets are either separated or associated. The two associated triads $T_{abcd.efgh}$ of systems $\square_8$ determined by a separation $S_{abcd.efgh}$ belong one to each set — $T^I_{abcd.efgh}$, $T^{II}_{abcd.efgh}$. If a $\square^I_8$ contains a separation S_{44} it lies in the corresponding triad T^I_{44}.

The two sets are interchanged by any odd substitution on the 8 letters, since any transposition interchanges certain two associated systems. Hence all statements concerning the two sets have two-fold application.

In the 15 systems $\square^I_8$ the 35 triads $T^I_{abcd.efgh}$ constitute a linear triadic system Δ^I_{15}.

Every $\square^{II}_8$ of the Δ^{II}_{15} is associated with 7 $\square^I_8$ forming a Δ^I_7 of the Δ^1_{15}. Every $\square^I_8$ lies in 7 such Δ^I_7 associated respectively with the 7 $\square^{II}_8$ of its own associated Δ^{II}_7.

To three $\square^{II}_8$ forming a triad T^{II} of the Δ^{II}_{15} are respectively associated three Δ^I_7 of the Δ^I_{15} having in common the associated triad T^I. We denote such a triad of Δ^I_7 by the symbol T^I. Every two Δ^I_7 belong to and determine one such triad T^I. The triadic system Δ^I_{15} is thus not only a system of triads T^I of systems $\square^I_8$, but also a system of triads T^I of the triadic systems Δ^I_7. These two systems are equivalent, since the second system is the image of the triadic system Δ^{II}_{15} in the elements $\square^{II}_8$. This is the *self-reciprocity theorem**) *of the linear triadic or triple system* Δ^I_{15}.

The two sets I, II effect a tactical separation of the substitutions l on the 8 letters $a \ldots h$ into even and odd substitutions.

Under the G^8_{81}, the 30 systems $\square_8$ and their 30 groups $G^8_{8\cdot 168}$ are conjugate. Under the $G^8_{\frac{1}{2}81}$ the 15 systems $\square^I_8$ and their 15 groups $G^{8\,I}_{8\cdot 168}$ are conjugate.

No substitution l except the identity leaves all the systems $\square^I_8$ individually invariant. For**) any such l is even, and, if not the identity, is under the G^8_{81} conjugate with one of the substitutions $(ab)(cd)$, $(ab)(cd)(fg)(eh)$, (abc), $(abc)(fg)(eh)$, $(abc)(efg)$, $(abcd)(ef)$, $(abcd)(fegh)$, $(abcde)$, $(abcde)(fgh)$, $(abcdef)(gh)$, $(abcdefg)$, and no one of these leaves invariant either one of the two opposite systems $\square_8\{abc.d.efg.h\}$, $\square_8\{abc.d.egf\,h\}$.

---

*) A particular case, $(p, n) = (2, 4)$, of the self-reciprocity theorems of the linear configurations $LHCf[p^n - 1]$, $LFCf[(p^n-1)/(p-1)]$ referred to near the close of § 1.

**) I avoid the use of the simplicity of the $G^8_{\frac{1}{2}81}$.

Hence the substitutions l of the $G^{8}_{\frac{1}{2}8!}$ induce $\frac{1}{2}8!$ substitutions λ^I on the 15 systems $\square_8^I$ leaving invariant the linear triadic system Δ_{15}^I. These substitutions λ^I form a group $G^{15\,I}_{\frac{1}{2}8!}$ holoedrically isomorphic with the alternating $G^{8}_{\frac{1}{2}8!}$; being of the order $\frac{1}{2}8! = \Omega(2^4)$ this group $G^{15\,I}_{\frac{1}{2}8!}$ is exactly the whole group $LHG^{15\,I}_{\Omega(2^4)}$ of the linear triple or triadic system Δ_{15}^I (§ 1). Then a definite substitution λ^I transforms any set of four independent ordered $\square_8^I$ to any other such set.

The alternating group of degree 8 *and the linear homogeneous congruence group on* 4 *indices modulo* 2 *are*, as has just been proved, *holoedrically isomorphic.*

In any case of holoedric isomorphism between two groups it is convenient to have a correspondence of generators of the two groups.

Now in the congruence group the six substitutions*)

$$E_1 \quad \begin{pmatrix} 1&1&1&.\\ .&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&.&1&1 \end{pmatrix} \qquad E_2 \quad \begin{pmatrix} .&1&.&1\\ .&1&1&.\\ .&.&1&.\\ 1&1&1&. \end{pmatrix} \qquad E_3 \quad \begin{pmatrix} .&1&1&.\\ .&.&1&1\\ 1&.&1&1\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix} \qquad E_4 \quad \begin{pmatrix} 1&1&1&.\\ .&1&.&.\\ .&.&1&.\\ .&1&.&1 \end{pmatrix}$$

$$E_5 \quad \begin{pmatrix} .&1&.&1\\ .&.&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&.&1&1 \end{pmatrix} \qquad E_6 \quad \begin{pmatrix} .&.&1&1\\ .&1&1&.\\ .&.&1&.\\ 1&.&1&. \end{pmatrix}$$

satisfy the relations

$$I = E_1^3 = E_{i+1}^2 = (E_i E_{i+1})^3 = (E_i E_j)^2$$
$$(i, i+1,\ j = 1, 2, \ldots, 6;\ i+1 < j)$$

where I denotes the identity-substitution. Hence**) the substitutions $E_1 \ldots E_6$ generate a group $G\{E_1, \ldots, E_6\}$ holoedrically isomorphic

*) The substitution

$$x_i' \equiv g_{i1}x_1 + g_{i2}x_2 + g_{i3}x_3 + g_{i4}x_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

is denoted by the corresponding matrix of coefficients

$$(g_{ij}) \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

**) Moore: *Concerning the Abstract Groups* ... (loc. cit., theorems B and C).

with the alternating group on 8 letters $a \ldots h$, and indeed by the correspondence of generators

$$\begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \\ (acb) = (ab)(bc) & (ab)(cd) & (ab)(de) & (ab)(ef) & (ab)(fg) & (ab)(gh). \end{array}$$

The congruence group $G^{15}_{\frac{1}{2}\,81}$ and its abstract-alternating sub-group $G^{15}_{\frac{1}{2}\,81}\{E_1, \ldots, E_6\}$ having the same order are identical.

We have then not only a *generational correspondence* between the holoedrically isomorphic congruence and alternating groups, but a *new proof of the isomorphism.*

Of course the generators $E_1 \ldots E_6$ might have been computed by the use of the linear Δ^I_{15} in the 15 systems $\square^I_8$. They were however computed by direct comparative consideration of the congruence and the alternating groups. The entrance to the congruence group was made by the two substitutions

$$C_h : x_1' = x_2,\ x_2' = x_3,\ x_3' = x_4,\ x_4' = x_1 + hx_2 \qquad (h = 0, 1)$$

which in fact are generators. (I find the one-parameter generator C_h

$$C_h : x_i' = -x_{i+1},\ x_k' = x_1 + hx_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

of considerable value in the study of continuous and discontinuous linear groups of k-ary unimodular substitutions; the parameter h is a general quantity in the field to which the coefficients of the substitutions of the group are restricted).

[Additions: July 15, 1898.

A) I exhibit the determination of $E_1, \ldots, E_6$.

In the congruence group we have the relations

$$(*) \qquad I = C_0^4 = C_1^{15} = (C_0 C_1^5)^6 = (C_0 C_1^{10})^4 = (C_0 C_1^9)^6.$$

Endeavoring to determine substitutions c_0, c_1 of the alternating group on the eight indices 12345678 with the relations

$$(*') \qquad i = c_0^4 = c_1^{15} = (c_0 c_1^5)^6 = (c_0 c_1^{10})^4 = (c_0 c_1^9)^6,$$

(where i denotes the identity-substitution), we see that c_1, $c_1^5 = \gamma'$ are of the types

$$c_1 = (12345)\,(678), \qquad c_1^5 = \gamma' = (687),$$

and that a solution $\{c_0, \gamma'\}$ of the relations

$$i = c_0^4 = (c_0\gamma')^6 = (c_0\gamma'^2)^4, \qquad \gamma' = (687),$$

is of the type

$$c_0 = (1276)\,(34), \qquad \gamma' = (687).$$

The corresponding c_1 is then $d(678)$, where d and also $d^3 = c_1^3 = \gamma''$ are cyclic substitutions on the indices 12345. From the relation

$$i = (c_0\gamma''^3)^6$$

we find that

$$\gamma'' = (12354) \text{ or } (12453).$$

Thus every solutions $\{c_0, c_1\}$ of the relations $*'$ is of the type

$$c_0 = (1576)(24), \quad c_1 = (12345)(678).$$

Now these substitutions c_0, c_1 are generators of the alternating group. We find*)

$$c_0 = (1576)(24), \quad c_1 = (12345)(678), \quad a = c_1^6 = (12345),$$
$$b = c_1^{10} = (678), \quad f = b_{c_0^2} = (518), \quad g = f_a = (128)$$
$$h = g_{c_0^2} = (728), \quad k = bh^2 = (68)(72), \quad l = k_a = (68)(73),$$
$$m = kl = (723), \quad n = k_m = (68)(23).$$

Hence

$$e_1 = b = (678) = (68)(87), \quad e_2 = k = (68)(72), \quad e_3 = n = (68)(23),$$
$$e_4 = n_a = (68)(34), \quad e_5 = n_{a^2} = (68)(45), \quad e_6 = n_{a^3} = (68)(51).$$

These $e_1, \ldots, e_6$ are (by the correspondence $68723451 = abcdefgh$) the generators used in my generational determination of the alternating group.

In the congruence group the $E_1, \ldots, E_6$ computed similarly from the C_0, C_1 are the $E_1, \ldots, E_6$ tabulated above. (Since the alternating group $\{e_1, \ldots, e_6\}$ is holoedrically isomorphic to the alternating group $\{e_1^{-1}, \ldots, e_6^{-1}\} = \{e_1, \ldots, e_6\}_{(68)}$, we need not here insist upon the fact that, if two literal substitutions s_1, s_2 on the 8 $a \ldots h$ quâ on the 15 $\square_8^I$ correspond to two linear substitutions S_1, S_2, then $s_1 s_2$ corresponds to $S_2 S_1$).

B) Table of one set of 15 triadically related quadruple systems $\square_8$ with adjoined 4-idic notation $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ (mod. 2).

$\square_8$	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = x_1 x_2 x_3 x_4$	$\square_8$	$x_1 x_2 x_3 x_4$
		abe.f.gcd.h	0 0 0 1
abc.d.efg.h	1 0 0 0	*abd.e.cfg.h*	1 0 0 1
abc.d.fge.h	0 1 0 0	*abf.g.cde.h*	0 1 0 1
abc.d.gef.h	1 1 0 0	*abg.c.fde.h*	1 1 0 1
abd.e.fgc.h	0 0 1 0	*abg.c.efd.h*	0 0 1 1
abf.g.dec.h	1 0 1 0	*abd.e.gcf.h*	1 0 1 1
abe.f.cdg.h	0 1 1 0	*abe.f.dgc.h*	0 1 1 1
abg.c.def.h	1 1 1 0	*abf.g.ecd.h*	1 1 1 1

The *abcdefgh* of the text are the *ebagcdhf* of this table.]

*) If X, Y are elements of a group I denote by X_Y the transform of X by Y,

$$X_Y = Y^{-1} X Y.$$

§ 7.

8-valued tactical functions U_i of the 15 letters of the linear triple system Δ_{15}.

A tactical function F of the n letters of any tactical function F^* is said to be an s-valued function of those letters if under the substitutions of the group G^* belonging to F^* it takes in all s values.

The group $G^{15}_{\frac{1}{2}8!}$ of the linear triple system Δ_{15} is holoedrically isomorphic with the alternating group $G^{8}_{\frac{1}{2}8!}$; hence it has 8 conjugate sub-groups $G^{15}_{\frac{1}{2}7!}$ (and indeed no others) of index 8. An 8-valued function of the 15 letters of the Δ_{15} belongs unter the $G^{15}_{\frac{1}{2}8!}$ to such a group $G^{15}_{\frac{1}{2}7!}$. We shall exhibit three such 8-valued functions.

We distribute to the 15 letters of the system Δ_{15} a *notation* depending upon 8 letters $a \ldots h$, so that our triple system Δ_{15} has now the notation of the triadic system*) $\mathbf{\Delta}^I_{15}$ (§ 6) in the 15 $\square^I_8$. *By tactical process within the* Δ_{15} *we shall* as it were *solve this notation for the letters* $a \ldots h$ *and thereby obtain the desired 8-valued tactical function.*

As a permissible *change of this 8-letter notation* of the Δ_{15} we may at will subject the letters $a \ldots h$ to any *even* substitution.

With this understanding there will be no confusion if we adhere exactly to the phrasings of § 6.

In the Δ_{15} the 15 letters, the 35 triples, and the 15 triple systems Δ_7 (§ 1) are in the $\mathbf{\Delta}^I_{15}$-notation the 15 quadruple systems $\square^I_8$, the 35 triads T^I_{44}, and the 15 triadic systems $\mathbf{\Delta}^I_7$ of § 6.

Two distinct triads T^I_{44} are *associated* or *separated*, i. e., have or do not have a common $\square^I_8$, according as the corresponding separations S_{44} are associated or separated. [The corresponding triads T^I_{44} of systems $\mathbf{\Delta}_7$ are simultaneously associated or separated.]

The triad $T' = T^I_{abcd.efgh}$ is separated from the 16 triads

$$T'_{de} = T^I_{abce.dfgh} \text{ etc.}$$

obtained by interchanging any two letters of the complementary quadruples $abcd$, $efgh$. T'_{de} and T'_{cf} are associated. T'_{de} and T'_{df} are separated.

*) It is of course immaterial which of the two sets of 15 $\square_8$ be used here as set I.

5 mutually separated triads T_{44}^I contain all the 15 systems $\square_8^I$. With spect to one of them $T' = T_{abcd.efgh}$ such a set has the type $T'_{de}\ T'_{df}\ T'_{dg}\ T'_{dh}$, or, in full notations,

$$T^I_{abcd.efgh}\ T^I_{abce.dfgh}\ T^I_{abcf.degh}\ T^I_{abeg.defh}\ T^I_{abch.defg}.$$

e denote this set of 5 separated triads T_{44}^I by U^I_{abc}. There are U^I_{abc}. Every $T^I_{abcd.efgh}$ lies in $8 = 2 \cdot 4$ U^I_{ijk}. Every pair of parated T_{44}^I lies in two U^I_{ijk}.

U^I_{abc} and U^I_{abd} have one triad $T^I_{abcd.efgh}$ in common. U^I_{abc} and U^I_{def} have no triad in common. U^I_{abc} and U^I_{def} have in common the o triads $T^I_{abcg.defh}$, $T^I_{abch.defg}$.

We denote by U^I_{ab} the set of 6 U^I_{ijk}

$$-\ U^I_{abc}\ U^I_{abd}\ U^I_{abe}\ U^I_{abf}\ U^I_{abg}\ U^I_{abh}\ -$$

e only type of 6 U^I_{ijk} having by pairs exactly one triad T_{44}^I in mmon.

U^I_{ab} and U^I_{ac} have U^I_{abc} in common. U^I_{ab} and U^I_{cd} have no U^I_{ijk} common.

We denote by U_a^I the set of 7 U^I_{ij}

$$-\ U^I_{ab}\ U^I_{ac}\ U^I_{ad}\ U^I_{ae}\ U^I_{af}\ U^I_{ag}\ U^I_{ah}\ -$$

e only type of 7 U^I_{ij} having by pairs a U^I_{ijk} in common.

Then *these* U_a^I *are* 8*-valued tactical functions of the* 15 *letters of* Δ_{15}; *their groups are the conjugates under the* $G^{15}_{\frac{1}{2}81}$ *of the* $G^{15}_{\frac{1}{2}71}$ *of* § 4.

§ 8.

-valued tactical functions V_i^I, V_i^{II} of the 15 letters of the linear triple system Δ_{15}.

In the linear Δ_{15} 7 triples Δ_3 by pairs associated are the 7 triples her of an element or of a triple system Δ_7 (§ 1). In the Δ^I_{15}-notation element quadruple system $\square_8^I$ lies in the 7 triads T_{44}^I corresponding its 7 separations S_{44}, while a triadic system Δ_7^I contains the 7 triads T_i^I corresponding to the 7 separations S_{44} of its associated $\square_8^{II}$.

The arrangement U^I_{abc} is (§ 7) a set of 5 mutually separated triads T_i^I, a triadic separation of the 15 systems $\square_8^I$.

Two sets U^I_{ijk} are separated if their C_3-suffixes have exactly one ter in common.

7 mutually separated U^I_{ijk} — involving without omission or repe- ion the 35 triads T_{44}^I — correspond to the 7 triples C_{ijk} of a triple stem Δ_7 in certain 7 of the 8 letters. We denote this set of U^I_{ijk}

by $V^I_{\Delta_7}$ and also (since every Δ_7 determines one $\square_8$ and every $\square_8$ by omission of a letter determines one Δ_7) by $V^I_{i,\square_8}$. Thus

$$V^I_{\Delta_7\{abc.d.efg\}} = V^I_{h,\square_8\{abc.d.efg.h\}}.$$

The set $V^I_{i,\square_8}$ determines the system Δ_{15} completely and is invariant under the sub-group $G^{15}_{168}(i,\square_8)$ of the $G^{15}_{\frac{1}{2}8!}$, which in the $G^{8}_{\frac{1}{2}8!}$ corresponds to the G^{7}_{168} leaving the triple system $\Delta_7(i,\square_8)$ invariant. Hence (by the concluding statements of § 4) according as the $V^I_{h,\square_8\{abc\cdot d\cdot efg\cdot h\}}$ depends *notationally* on a quadruple system $\square_8\{\ \}$ of set I or II the $G^{15}_{168}(h,\square_8)$ leaves invariant the element quadruple system $\square^I_8$ or the triadic system Δ^I_7 associated to the corresponding system $\square^{II}_8$. We say that the $V^I_{i,\square^I_8}$, $V^I_{i,\square^{II}_8}$ are of *type* I, II respectively.

We must show how in the Δ_{15} the set $V^I_{h,\square_8\{abc\cdot d\cdot efg\cdot h\}}$ determines *tactically* the $\square^I_8\{\ \}$ or the $\Delta^I_7\{\ \}$.

$V^I_{h,\square_8\{abc\cdot d\cdot efg\cdot h\}}$ is the set $U^I_{abc}\,U^I_{ade}\,U^I_{afg}\,U^I_{bdf}\,U^I_{beg}\,U^I_{cdg}\,U^I_{cef}$. $U^I_{abc}\,U^I_{ade}$ have no common triad, and every triad of one is associated with three and is separated from two triads of the other. I write for the moment for $T^I_{abcd\cdot efgh}$ simply T^I_{abcd} or T^I_{efgh} etc., so that

$$U^I_{abc} = T^I_{abcd}\,T^I_{abce} \mid T^I_{abcf}\,T^I_{abcg}\,T^I_{abch},$$
$$U^I_{ade} = T^I_{adeb}\,T^I_{adec} \mid T^I_{adef}\,T^I_{adeg}\,T^I_{adeh},$$

where I have already indicated a separation of each set U^I_3 of 5 triads T^I_{44} into $5 = 2 + 3$ triads; this separation whose notational basis is obvious has this tactical basis, — a T^I_{44} of the 2 or the 3 of either U^I_3 is associated with the various T^I_{44} of the 3 or the 2 of the other U^I_3. The distribution of the 15 systems $\square^I_8$ over the two sets $U^I_{abc}\,U^I_{ade}$ is conveniently exhibited by the diagram

```
      * * *
      * * *
* * *
* *   *
* *     *
```

in which the line-triads are those of U^I_{abc} and the column-triads are those of U^I_{ade}. In the 6 separations of U^I_{abc} into a 2 and a 3 with respect to the 6 remaining U^I_3 of the $V^I_{h,\square_8\{abc\cdot d\cdot efg\cdot h\}}$ the triad

$$T^I_{abch} = T^I_{abch\cdot defg}$$

is the only one in each case in the 3. Hence in the $V^I_{h,\square_8\{abc\cdot d\cdot efg\cdot h\}}$ we have tactically determined in each U^I_3 a T^I_{44}: these 7 T^I_{44} correspond to the separations S_{44} of the $\square_8\{abc.d.efg.h\}$ and hence are in the Δ_{15} by pairs associated and so have in common the element quadruple system $\square^I_8\{\ \}$ or lie in the triadic system $\Delta^I_7\{\ \}$, according as the $\square_8\{\ \}$ is of set I or II.

There are in all $240 = 8.30$ such sets $V^I_{\Delta_7}$ or $V^I_{i,\square_8}$. These are of two *essentially distinct* (but reciprocal) *types I, II*. The 120 of each type are conjugate under the $G^{15}_{\frac{1}{2}\,81}$ of the Δ_{15}.

[Addition: July 15, 1898.

The linear Δ_{15} being given in any notation, we may distribute to its 15 letters the 8-letter notation of the linear triadic system Δ_{15}, for instance, by introducing first (by means of *doubling* relations) the 4-partite notation $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ of § 1, and then by using the table at the close of § 6. This is in practice the convenient process.

However we must observe that *from any such 8-letter notation every such notation is derivable by substitution on the 8 letters* $a \ldots h$. For —

The U^I_a of § 6 is a tactically well-defined 8-valued tactical function of the 15 letters of the Δ_{15}. We construct the 8 conjugate functions U and assign them *arbitrarily* the notation $U^I_i (i = a \ldots h)$, and at once tactically determine (by the reversal of the process of § 6) the 28 tactical functions U^I_{ij} and then the 56 U^I_{ijk}, and from the U^I_{ijk} the 240 $V^I_{i,\square_8}$ (§ 8). Of these $V^I_{i,\square_8}$ 120 by eights tactically determine (§ 8) the 15 letters of the Δ_{15} and thus assign to them their 8-letter notation $\square^I_8$. (In this assignment of the 8-letter notation the superscript I receives 8-letter meaning only at this final stage).

Having given to the 8-letter notation in general this tactical basis we need to determine *only notationally* our 8-valued tactical functions V^I_i, V^{II}_i.]

The set of the 8 $V^I_{i,\square_8\{\ \}} (i = a \ldots h)$ related*) to the same $\square^I_8$ or Δ^I_7 involves all 56 U^I_{ijk}. We denote this set by $V^I_{\square_8\{\ \}}$.

The set of the 15 $V^I_{h,\square_8\{\ \}}$ having in notation the same h and the 15 $\square_8\{\ \}$ of set I or II we denote by V^{II}_h or V^{III}_h. These 15 $V^I_{h,\square_8}$ or $V^I_{\Delta_7}$ determine a linear triadic system Δ_{15} depending upon the sets U^I_{ijk} $(i, j, k = a \ldots g)$ just as the Δ_{15} of the 15 Δ_7 in $a \ldots g$ depends upon the triples ijk (§ 4).

*) That every set of 8 $V^I_{i,\square_8\{\ \}}$ which involves all 56 U^I_{ijk} is so related I have not proved.

[As to these $V_i^{I\,I}$ and $V_i^{I\,II}$ $(i = a \ldots h)$ we notice that if 15 systems Δ_7 each in 7 of the 8 letters $a \ldots h$ form a linear triadic system, in which the three systems of a triad have a common triple and every triple actually occurring determines such a triad of systems having by pairs only that triple in common, and in which the three triples common to a system and the respective three systems of a triad (not containing the system) are three triples having a common letter, then the 15 systems Δ_7 involve only 7 of the 8 letters and form one of the two sets of 15 systems Δ_7 in those letters. The proof of this I merely sketch. Two systems Δ_7 involving all 8 letters and having exactly one triple in common are of the type

$$\Delta_7\{abc\,.\,g\,.\,def\},\ \Delta_7\{abc\,.\,h\,.\,efd\} \text{ or } \Delta_7\{abc\,.\,h\,.\,fde\}.$$

A first triad of systems in all 8 letters is of the type

$$\Delta^{(1)} = \Delta_7\{abc\,.\,g\,.\,def\},\quad \Delta^{(2)} = \Delta_7\{abc\,.\,g\,.\,efd\},$$
$$\Delta^{(3)} = \Delta_7\{abc\,.\,h\,.\,fde\}.$$

A second triad containing $\Delta^{(1)}$ is then of the type

$$\Delta^{(1)} = \Delta_7\{aef\,.\,g\,.\,abc\},\quad \Delta^{(4)} = \Delta_7\{aef\,.\,g\,.\,cdb\},$$
$$\Delta^{(5)} = \Delta_7\{aef\,.\,h\,.\,bcd\}.$$

It is now *impossible* to extend these two associated triads to a triadic system $\Delta_7\{\Delta^{(1)}\Delta^{(2)}\Delta^{(3)}\,.\,\Delta^{(4)}\,.\,\Delta^{(5)}\Delta^{(6)}\Delta^{(7)}\}$ in which $\Delta^{(1)}\Delta^{(6)}\Delta^{(7)}$ have the common triple afg. Hence the 15 Δ_7 must involve only 7 of the 8 letters.]

These $V_i^{I\,I}$ and $V_i^{I\,II}$ are our second and third 8-valued tactical functions of the 15 letters of the Δ_{15}.

Thus the 120 $V^I_{i,\square_8}$ of each type separate into 15 sets $V^I_{\square_8}$ of 8 each and again into 8 sets V_i^I of 15 each. $V^{I\text{ or }II}_{\square_8}$ and $V_i^{I\,I\text{ or }II}$ have in common exactly $V^{I\text{ or }II}_{i,\square_8}$.

We have exhibited three 8-valued tactical functions U_i^I, $V_i^{I\,I}$, $V_i^{I\,II}$ of the 15 letters of the Δ_{15}. Any one of these 24 arrangements being made up of all the triads T^I_{44} (with repetitions) determines the Δ_{15} uniquely.

As tactical affect function of the 15 Δ_7^I under the alternating $G^7_{\frac{1}{2}\,7!}$ in the letters $a \ldots g$ (§ 4) we may select U_h^I, $V_h^{I\,I}$ or $V_h^{I\,II}$, whereas as affect of the 15 $\square_8^I$ under the alternating $G^8_{\frac{1}{2}\,8!}$ in the letters $a \ldots h$ (§ 6) we have with Jordan the linear $\mathbf{\Delta}^I_{15}$.

§ 9.

Kirkman's fifteen school-girls problem.

This problem is in effect to determine, *first*, all triple systems Δ_{15} in 15 elements, and, *second*, for every system Δ_{15} all separations of the 15 elements into 5 triples of the system, and, *third*, for every Δ_{15} all separations of the 35 triples into 7 such sets of 5 triples. (In the original problem only those determinations *first*, *second* were sought which led to effective determinations *third*).

It is obvious that *for the linear triple system* Δ_{15} we have in § 8 obtained the complete solution of the problem in a form hardly subject to improvement. Using the 8-letter Δ^I_{15}-notation: There are 56 sets U^I_{ijk} of 5 separated triples of elements $\square^I_8$ conjugate under the $G^{15}_{\frac{1}{2}\,81}$ and respectively invariant under 56 groups G^{15}_{360}. There are 240 sets $V^I_{i,\square}$ of 7 separated U^I_{jkl}; these are of *two essentially distinct types;* the 120 of type I are peculiarly related to the $\square^I_8$-elements and the 120 of type II to the Δ^I_7-triadic systems of the Δ^I_{15}; the 120 of each type are conjugate under the $G^{15}_{\frac{1}{2}\,81}$ and respectively invariant under 120 groups G^{15}_{168}. There are 30 sets $V^I_{\square}$ of 8 separated $V^I_{i,\square}$ $(i = a \ldots h)$ involving all 56 U^I_{jkl}; these are of *two essentially distinct types*; the 15 of type I correspond to the 15 $\square^I_8$-elements and the 15 of type II to the 15 Δ^I_7-triadic systems of the Δ^I_{15}; the 15 of each type are conjugate under the $G^{15}_{\frac{1}{2}\,81}$ and respectively invariant under 15 groups $G^{15}_{8\cdot 168}$.

The principal contacts of the Kirkman problem papers of Woolhouse, Power, and Carpmael — cited and in general terms characterized in the Introduction — with the results of the present theory may in conclusion be briefly indicated.

Woolhouse (1863) and Carpmael (1881) formulated and carried into partial execution each his own plan for a systematic exhaustive enumeration of all classes of Kirkman solutions.

Woolhouse (1862) found, as the only types of Kirkman solution in the 15 letters $h\,1 \ldots 7\;1' \ldots 7'$ which is invariant under the substitution $(h)(1234567)(1'2'3'4'5'6'7')$ and whose Δ_{15} contains a Δ_7 in the letters $1 \ldots 7$, the solutions containing respectively the following separations of the 15 letters into 5 triples:

h 7 7′	h 7 7′	h 7 7′
1 2 4	1 2 4	1 2 4
(1) 3 2′ 5′	(2) 3 4′ 6′	(3) 3 1′ 5′
5 1′ 6′	5 2′ 3′	5 4′ 6′
6 3′ 4′	6 1′ 5′	6 2′ 3′.

We see that the triple systems $\Delta_{15}^{(1)}\Delta_{15}^{(2)}$ of the Woolhouse Kirkman solutions $W^{(1)}W^{(2)}$ are identical and linear, and that $W^{(1)}W^{(2)}$, depending (in the sense of § 8) upon the element h and the system $\Delta_7\{124\,.\,7\,.\,365\}$ respectively, are of our types I II

$$\left(V^I_{i,\square_8 I}V^I_{i,\square_8 II}\ (\S\ 8)\right),$$

and further that the system $\Delta_{15}^{(3)}$ is not linear. Furthermore we know that *for the linear* Δ_{15} *there are no other types of Kirkman solution.*

Woolhouse, recognizing the equivalence (perhaps not the identity) of $\Delta_{15}^{(1)}\Delta_{15}^{(2)}$ exhibited the $W^{(1)}W^{(2)}$ in new notations with identical $\Delta_{15}^{(1)}\Delta_{15}^{(2)}$ and gave tactical discriminations between the $W^{(1)}W^{(2)}$, thus educing the fundamental element of $W^{(1)}$ and the 7 fundamental triples of $W^{(2)}$ (but without noticing that they constitute a Δ_7 of the Δ_{15}). Using our notations: he further tabulated (the) 56 sets U^I_{ijk} and indeed displayed them in a set $V^I_{\square_8 I}$ of 8 separated Kirkman solutions $V^I_{i,\square_8 I}$ of type I connected with a particular element $\square^I_8$, and stated that this could be done with respect to each of the 15 elements. Thus he had the 120 $V^I_{i,\square_8 I}$ of type I well in mind. He affirmed that each $V^I_{i,\square_8 I}$ gives rise (in a manner not indicated) to 8 $V^I_{i,\square_8 II}$ of type II, and thought (erroneously) that the resulting 960 $V^I_{i,\square_8 II}$ are distinct.

Power (1867), working, independently of Woolhouse, with a triple system Δ_{15} (due to Horner and Cape), in fact the linear Δ_{15}, tabulated the 56 U^I_{ijk} and computed (correctly, but without adequate proof) as 240 the number of Kirkman solutions $V^I_{i,\square_8}$.

The University of Chicago, Jan. 23, 1898.

Neue Grundlagen der Gruppen- und Substitutionentheorie.

Von

P. Hoyer in Burg b./Magdeburg.

Einleitung.

In der vorliegenden Abhandlung werde ich darlegen, in welcher Weise die Gruppen- und Substitutionentheorie auf die von mir entwickelte Theorie des Zusammenhanges in Reihen (Math. Ann. 42) zu stützen ist. Es geschieht dies dadurch, dass den Substitutionen gewisse Reihen zugeordnet werden und auf diese Reihen der in meiner Abhandlung „Grundlagen einer analytischen Behandlung der Gruppirungsaufgaben“ (Math. Ann. 50) entwickelte Begriff des charakteristischen Functionensystems einer Reihe übertragen wird; doch soll, da dieser Begriff hier von der Reihenvorstellung unabhängige Bedeutung gewinnt, er unmittelbar im Anschluss an den Substitutionenbegriff entwickelt und vorangestellt werden. Damit gestalten sich die Fragen nach der Beschaffenheit mehrerer Substitutionen oder einer Gruppe derselben zu Fragen nach der Beschaffenheit dieser Reihen bezw. Functionensysteme. Ich werde dies im ersten Theile nachweisen an der Untersuchung des Grades der Transitivität, der Ordnung einer Gruppe und der grössten Anzahl von Elementen, die von den Substitutionen einer Gruppe ungeändert bleiben können, ohne dass die übrigen ungeändert bleiben. Ich werde zeigen, wie durch die Benutzung der Ergebnisse meiner letzten Abhandlung die Fragen nach diesen Zahlen sich zu rein analytischen Fragen nach dem Grade gewisser Determinanten gestalten, und werde alsdann den ersten Theil mit der Entwickelung der Functionalgleichung schliessen, welche die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, dass mehrere gegebene Substitutionen eine Gruppe bilden.

Im zweiten, z. Th. als Anwendung des ersten zu betrachtenden Theil zeige ich sodann, wie die Untersuchung der verschiedenen Formen gleichwerthiger Producte, die sich aus gegebenen Substitutionen bilden lassen, auf's Engste mit der Gruppentheorie verknüpft ist.

Erster Theil.

Von den Substitutionengruppen.

§ 1.

Es sei durch

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_1' a_2' \dots a_N' \\ a_1 a_2 \dots a_N \end{pmatrix}$$

eine Substitution der N-Elemente $a_1, a_2 \dots a_N$ bezeichnet, durch welche die Elemente $a_1, a_2 \dots a_N$ der Reihe nach durch $a_1', a_2' \dots a_N'$ ersetzt werden, wenn $a_1', a_2' \dots a_N'$ dieselben Elemente $a_1 \dots a_N$ in gewisser Reihenfolge sind. Es seien ferner durch $x_1, x_2 \dots x_N$ N unbeschränkt Veränderliche, durch den Buchstaben C mit irgend welchen Indices unbestimmte Constante und durch $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_N$ N von einander verschiedene positive ganze Zahlen bezeichnet. Wir bilden dann die Function

$$\Phi(x_1 x_2 \dots x_N) = \sum_{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)} C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} x_{\alpha_1}^{\lambda_1} x_{\alpha_2}^{\lambda_2} \dots x_{\alpha_m}^{\lambda_m},$$
$$(m \leq N)$$

indem wir die Summation über alle $N(N-1) \dots (N-m+1)$ Verbindungen $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m)$ der Zahlen $1, 2 \dots N$ erstrecken, in denen die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ von einander verschieden sind. Auf diese Function wenden wir die Substitution $\begin{pmatrix} x_1' x_2' \dots x_N' \\ x_1 x_2 \dots x_N \end{pmatrix}$ an, indem wir unter $x_1', x_2' \dots x_N'$ die Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_N$ in derselben Reihenfolge verstehen, in der die Elemente $a_1, a_2 \dots a_N$ durch $a_1', a_2' \dots a_N'$ bezeichnet sind. Dadurch geht die Function $\Phi(x_1 \dots x_N)$ über in $\Phi(x_1' \dots x_N')$. Soll

$$\Phi(x_1 \dots x_N) = \Phi(x_1' \dots x_N') \tag{1}$$

sein, so müssen die Coefficienten $C_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ gruppenweise einander gleich sein. t_m sei die Anzahl dieser Gruppen gleicher Coefficienten. Wählen wir aus jeder dieser Gruppen einen Coefficienten aus, und bezeichnen wir die so erhaltenen Coefficienten kurz durch $C_1, C_2 \dots C_{t_m}$, so erhalten wir als Folge der Gleichung (1) die Gleichung

$$\Phi(x_1 \dots x_N) = \sum_{\alpha=1}^{t_m} C_\alpha \varphi_\alpha^{(m)}(x_1 \dots x_N), \tag{2}$$

in der jede der t_m Functionen $\varphi_\alpha^{(m)}(x_1 \dots x_N)$ $(\alpha = 1 \dots t_m)$ eine Summe von Termen von der Form $x_{\alpha_1}^{\lambda_1} x_{\alpha_2}^{\lambda_2} \dots x_{\alpha_m}^{\lambda_m}$ ist. Die so definirten Functionen $\varphi_\alpha^{(m)}(x_1 \dots x_N)$ $(\alpha = 1 \dots t_m)$ bezeichnen wir als die der

Substitution S_1 entsprechenden Functionen m^{ter} Ordnung und die Veränderlichen $x_1 \ldots x_N$ in ihnen als die den Elementen $a_1 \ldots a_N$ in S_1 entsprechenden Veränderlichen.

Ist

$$S_2 = \begin{pmatrix} a_1'' a_2'' \ldots a_N'' \\ a_1 a_2 \ldots a_N \end{pmatrix}$$

eine zweite Substitution derselben Elemente $a_1 \ldots a_N$, so lassen wir den Elementen $a_1, a_2 \ldots a_N$ in S_2 eine zweite Reihe von Veränderlichen $x_{N+1}, x_{N+2} \ldots x_{2N}$ entsprechen, und können alsdann der Substitution S_2 eine Reihe von Functionen m^{ter} Ordnung von $x_{N+1} \ldots x_{2N}$ in derselben Weise entsprechen lassen, wie wir vorher der Substitution S_1 eine Reihe von Functionen m^{ter} Ordnung von $x_1 \ldots x_N$ entsprechen liessen. Bezeichnen wir nämlich wieder durch $x''_{N+1}, x''_{N+2} \ldots x''_{2N}$ die Veränderlichen $x_{N+1}, x_{N+2} \ldots x_{2N}$ in derselben Reihenfolge, in der die Elemente $a_1, a_2 \ldots a_N$ durch $a_1'', a_2'' \ldots a_N''$ in S_2 bezeichnet sind, und wenden wir darauf die Substitution $\begin{pmatrix} x''_{N+1} x''_{N+2} \ldots x''_{2N} \\ x_{N+1} x_{N+2} \ldots x_{2N} \end{pmatrix}$ an auf die Function $\Phi(x_{N+1} \ldots x_{2N})$, so ergiebt sich als Folge der Gleichung $\Phi(x_{N+1} \ldots x_{2N}) = \Phi(x''_{N+1} \ldots x''_{2N})$ eine Gleichung von der Form:

$$\Phi(x_{N+1} \ldots x_{2N}) = \sum_{\alpha=1}^{t'_m} C_\alpha \varphi^{(m)}_{t_m+\alpha}(x_{N+1} \ldots x_{2N}),$$

in der die Coefficienten $C_\alpha (\alpha = 1 \ldots t'_m)$ von einander verschieden und die Functionen $\varphi^{(m)}_{t_m+\alpha}(x_{N+1} \ldots x_{2N})$ $(\alpha = 1 \ldots t'_m)$ die der Substitution S_2 entsprechenden Functionen m^{ter} Ordnung sind.

Sind daher $S_1, S_2 \ldots S_\varrho$ ϱ Substitutionen der Elemente $a_1, a_2 \ldots a_N$ und lassen wir den Elementen in diesen Substitutionen resp. die ϱ Reihen von Veränderlichen

$$\begin{array}{lll} x_1 & x_2 & \ldots x_N \\ x_{N+1} & x_{N+2} & \ldots x_{2N} \\ \vdots & & \\ x_{(\varrho-1)N+1}, & x_{(\varrho-1)N+2} & \ldots x_{\varrho N} \end{array}$$

entsprechen, so ergiebt sich zu jeder der Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ eine entsprechende Reihe von Functionen m^{ter} Ordnung der entsprechenden Reihe von Veränderlichen. Das System aller auf diese Weise erhaltenen Functionen stellt ein System von Functionen der sämmtlichen Veränderlichen $x_1 \ldots x_{\varrho N}$ dar, und wir bezeichnen dasselbe demgemäss durch

$$\varphi^{(m)}_1(x_1 \ldots x_{\varrho N}),\ \varphi^{(m)}_2(x_1 \ldots x_{\varrho N}) \ \ldots \ \varphi^{(m)}_{\tau_m}(x_1 \ldots x_{\varrho N}).$$

Fügen wir zu den Functionen dieses Systems noch die $N(N-1)\ldots(N-m+1)$ Functionen $\psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}(x_1\ldots x_{\varrho N})$, die wir aus der Gleichung

$$\psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}=\sum_{k=0}^{\varrho-1}x_{kN+\alpha_1}^{\lambda_1}x_{kN+\alpha_2}^{\lambda_2}\ldots x_{kN+\alpha_m}^{\lambda_m}$$

erhalten, wenn wir für $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)$ alle Verbindungen der Zahlen $1\ldots N$ setzen, in denen die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2\ldots\alpha_m$ verschieden von einander sind, so stellt das erhaltene System von $N(N-1)\ldots(N-m+1)+\tau_m$ Functionen *„das charakteristische Functionensystem m^{ter} Ordnung“* dar, das zu den Substitutionen $S_1\ldots S_\varrho$ gehört.

Die Functionen des charakteristischen Functionensystems sind danach Summen, deren Addenden einer Reihe von $\varrho N(N-1)\ldots(N-m+1)$ Producten von der Form $x_{k_1}^{\lambda_1}x_{k_2}^{\lambda_2}\ldots x_{k_m}^{\lambda_m}$ angehören. Wir können jede dieser Functionen als eine lineare homogene Function dieser sämmtlichen Producte ansehen, in der die Coefficienten die Werthe 0,1 haben. Das System dieser Coefficienten ist alsdann die zu den Substitutionen $S_1\ldots S_\varrho$ gehörige *„Charakteristik m^{ter} Ordnung“*.

§ 2.

Jeder Veränderlichen $x_{kN+\alpha}$ in dem charakteristischen Functionensystem m^{ter} Ordnung, das zu den Substitutionen $S_1\ldots S_\varrho$ der Elemente $a_1\ldots a_N$ gehört, entspricht zufolge § 1 ein Element a_α, jedem Product $x_{k_1}^{\lambda_1}x_{k_2}^{\lambda_2}\ldots x_{k_m}^{\lambda_m}$ können wir daher eine Verbindung $a_{k_1'}a_{k_2'}\ldots a_{k_m'}$ der Elemente $a_1\ldots a_N$ entsprechen lassen, in der

$$k_1'\equiv k_1(\text{mod. }N),\ k_2'\equiv k_2(\text{mod. }N)\ldots k_m'\equiv k_m(\text{mod. }N)$$

ist, und jeder Summe solcher Producte endlich können wir einen Complex solcher Verbindungen entsprechen lassen, von denen jede die entsprechende eines Termes der Summe ist. Lassen wir in dieser Weise in dem charakteristischen Functionensystem der Substitutionen $S_1\ldots S_\varrho$ einer jeden der Functionen $\varphi_\alpha^{(m)}(x_1\ldots x_{\varrho N})$ $(\alpha=1\ldots\tau_m)$ einen Complex $A_\alpha^{(m)}$ von Verbindungen der Elemente $a_1\ldots a_N$ entsprechen, so erhalten wir eine Reihe

$$A_1^{(m)}A_2^{(m)}\ldots A_{\tau_m}^{(m)},$$

in deren Gliedern $A_1^{(m)}, A_2^{(m)}\ldots A_{\tau_m}^{(m)}$ somit die Verbindungen ohne Wiederholung m^{ter} Klasse der Elemente $a_1\ldots a_N$ als Elemente enthalten sind. Diese Reihe ist die zu den Substitutionen $S_1\ldots S_\varrho$ gehörige *„Reihe m^{ter} Ordnung“*. Wie aus § 1 meiner Abhandlung „Grundlagen einer analytischen Behandlung der Gruppirungsaufgaben“*)

*) Math. Ann. Bd. 50.

unmittelbar ersichtlich ist, ist das charakteristische Functionensystem dieser Reihe nichts anderes, als das in § 1 definirte charakteristische Functionensystem m^{ter} Ordnung der Substitutionen $S_1 \dots S_\varrho$.

Entspricht die Function $\varphi_\alpha^{(m)}(x_1 \dots x_{\varrho N})$ des charakteristischen Functionensystems der Substitution S_β, so enthält sie zufolge § 1 alle diejenigen Terme, die aus einem ihrer Terme

$$x_{(\beta-1)N+k_1}^{\lambda_1} x_{(\beta-1)N+k_2}^{\lambda_2} \cdots x_{(\beta-1)N+k_m}^{\lambda_m}$$

durch wiederholte Anwendung einer Substitution entstehen, welche die Veränderlichen $x_{(\beta-1)N+1}$, $x_{(\beta-1)N+2} \dots x_{\beta N}$ ebenso vertauscht, wie die Substitution S_β die entsprechenden Elemente $a_1, a_2 \dots a_N$. Ist daher

$$S_\beta = \begin{pmatrix} a_1' a_2' \dots a_N' \\ a_1 a_2 \dots a_N \end{pmatrix}, \quad S_\beta^2 = \begin{pmatrix} a_1'' a_2'' \dots a_N'' \\ a_1 a_2 \dots a_N \end{pmatrix} \dots$$

so enthält das der Function $\varphi_\alpha^{(m)}(x_1 \dots x_{\varrho N})$ entsprechende Glied $A_\alpha^{(m)}$ der Reihe m^{ter} Ordnung alle verschiedenen Verbindungen von der Form

$$a_{k_1} \dots a_{k_m}, \quad a_{k_1}' \dots a_{k_m}', \quad a_{k_1}'' \dots a_{k_m}'', \dots .$$

Bezeichnen wir durch

$$p_1^{(m)}, \quad p_2^{(m)} \dots p_{N(N-1)\cdots(N-m+1)}^{(m)}$$

alle Verbindungen m^{ter} Klasse ohne Wiederholung der Elemente $a_1 \dots a_N$, und wenden wir auf die Reihe dieser Verbindungen die Substitution S_β an, so geht jede Verbindung

$$p_\alpha^{(m)} = a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_m}$$

über in eine andere

$$p_{\alpha'}^{(m)} = a_{k_1}' a_{k_2}' \dots a_{k_m}' .$$

Es entspricht also der Substitution S_β eine Substitution der Elemente $p_1^{(m)}, p_2^{(m)} \dots p_{N(N-1)\cdots(N-m+1)}^{(m)}$. Wird diese Substitution in ihre Circularsubstitutionen zerlegt, so stellen die Elementencomplexe dieser Circularsubstitutionen die der Substitution S_β entsprechenden Glieder in der Reihe $A_1^{(m)} A_2^{(m)} \dots A_{\tau_m}^{(m)}$ dar, d. h. diejenigen Glieder, welche den der Substitution S_β entsprechenden Functionen $\varphi_\alpha^{(m)}(x_1 \dots x_{\varrho N})$ des charakteristischen Functionensystems entsprechen. Daraus geht hervor, dass die Reihe, deren Glieder die Elementencomplexe der Circularsubstitutionen von $S_1 \dots S_\varrho$ selbst sind, nur einen speciellen Fall der Reihe m^{ter} Ordnung darstellt, nämlich die Reihe erster Ordnung. Sind $n_1, n_2 \dots n_m$ die Ordnungen derjenigen Circularsubstitutionen von S_β, welche resp. die Elemente $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots a_{k_m}$ der Verbindung $a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_m}$ enthalten, wenn wieder durch $a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_m}$ eine Verbindung in einem der Substitution S_β entsprechenden Gliede $A_\alpha^{(m)}$ der Reihe m^{ter} Ordnung

bezeichnet wird, so ist die Anzahl der in $A_\alpha^{(m)}$ enthaltenen Verbindungen gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Zahlen

$$n_1, n_2 \ldots n_m.$$

§ 3.

Ist die zu den Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ gehörige Reihe m^{ter} Ordnung transitiv, so kann man zufolge § 2 jede Verbindung ohne Wiederholung m^{ter} Klasse der Elemente $a_1 \ldots a_N$ in jede andere solche Verbindung durch wiederholte Anwendung der Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ überführen, es ist also die durch die Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmte Gruppe mindestens m-fach transitiv. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so sind auch je zwei Verbindungen in der Reihe m^{ter} Ordnung zusammenhängend, d. h. die Reihe m^{ter} Ordnung ist transitiv. In dem charakteristischen Functionensystem der Reihe ist alsdann nur eine Function von den übrigen abhängig*), und die nach Fortnahme einer beliebigen Function des Systems übrigbleibenden Functionen sind von einander unabhängig. Es giebt also im System der Subdeterminanten der Charakteristik nicht verschwindende Determinanten, deren Grad um Eins kleiner ist, als die Anzahl der Functionen des charakteristischen Functionensystems. Ist dagegen die Reihe intransitiv, so sind wenigstens zwei Functionen des charakteristischen Functionensystems von den übrigen abhängig, das System der Subdeterminanten enthält also keine nicht verschwindende Determinante, deren Grad nur um Eins kleiner ist, als die Anzahl der Functionen. Man erhält damit als analytisches Kriterium für die Bestimmung des Grades der Transitivität einer Gruppe den Satz:

Ist der höchste Grad der nichtverschwindenden Subdeterminanten der Charakteristik m^{ter} Ordnung, die zu gegebenen Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ gehört, um Eins kleiner als die Anzahl der Functionen des zugehörigen charakteristischen Functionensystems m^{ter} Ordnung, so ist die durch die Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmte Gruppe mindestens m-fach transitiv; ist ausserdem die Charakteristik m^{ter} Ordnung unter den zu $S_1 \ldots S_\varrho$ gehörenden Charakteristiken diejenige höchster Ordnung, welche dieser Bedingung genügt, so giebt die Zahl m den Grad der Transitivität der Gruppe an.

§ 4.

Ist der Grad der Transitivität der durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmten Gruppe gleich m, so müssen zufolge § 3 die zu $S_1 \ldots S_\varrho$ gehörigen Reihen von der Reihe $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung an aufwärts intransitiv

*) „Grundlagen einer analytischen Behandlung der Gruppirungsaufgaben", § 2.

werden. Zufolge § 2 enthält dann jede transitive Gruppe der Reihe alle diejenigen Verbindungen, die sich aus einer ihrer Verbindungen durch wiederholte Anwendung der Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ herleiten lassen, und auch nur diese Verbindungen. Dies gilt also auch von der Reihe N^{ter} Ordnung. Die Verbindungen, welche die Elemente der Reihe N^{ter} Ordnung bilden, sind die sämmtlichen Permutationen der Elemente $a_1 \ldots a_N$. Da es nur eine Substitution der Gruppe giebt, die eine solche Permutation in eine andere überführt, so ist die Anzahl der Elemente jeder transitiven Gruppe der Reihe N^{ter} Ordnung gleich der Anzahl der Substitutionen der Gruppe, also gleich der Ordnung ν der Gruppe, und die Anzahl r_N der transitiven Gruppen der Reihe N^{ter} Ordnung ist folglich gleich dem Index i der Gruppe $= \frac{N!}{\nu}$. Bezeichnet ferner ν_α die Ordnung der Substitution S_α, so enthält zufolge § 2 jedes S_α entsprechende Glied der Reihe N^{ter} Ordnung ν_α Permutationen, da ν_α das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von den Ordnungen der Circularsubstitutionen von S_α ist. Die Anzahl der S_α entsprechenden Glieder ist mithin $\frac{N!}{\nu_\alpha}$, und ebenso gross ist also die Anzahl der S_α entsprechenden Functionen $\varphi_\beta^{(N)}(x_1 \ldots x_{\varrho N})$ im charakteristischen Functionensystem N^{ter} Ordnung. Ausser diesen

$$\frac{N!}{\nu_1} + \frac{N!}{\nu_2} + \cdots + \frac{N!}{\nu_\varrho}$$

Functionen $\varphi_\beta^{(N)}(x_1 \ldots x_{\varrho N})$ enthält das charakteristische Functionensystem N^{ter} Ordnung noch $N!$ Functionen $\psi_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_N}^{(N)}(x_1 \ldots x_{\varrho N})$ (§ 1), so dass die Anzahl aller Functionen des charakteristischen Functionensystems N^{ter} Ordnung gleich

$$N! + \frac{N!}{\nu_1} + \frac{N!}{\nu_2} + \cdots + \frac{N!}{\nu_\varrho}$$

ist.

Bezeichnet nun allgemein r die Anzahl der transitiven Gruppen des charakteristischen Functionensystems einer beliebigen Reihe, n die Anzahl der Functionen des Systems, so ist stets der höchste Grad der nicht verschwindenden Subdeterminanten der Charakteristik gleich $n - r$. Denn lässt man aus jeder transitiven Gruppe eine Function fort, so sind die übrigbleibenden Functionen linear unabhängig, es giebt also nicht verschwindende Subdeterminanten der Charakteristik vom Grade $n - r$. Lässt man aber weniger als r Functionen fort, so finden sich unter den übrigen die Functionen wenigstens einer transitiven Gruppe vollständig vor, und da diese linear abhängig von einander sind, so ist jede Subdeterminante der Coefficienten der übrigbleibenden Functionen, deren Grad gleich der Anzahl dieser Functionen

ist, also überhaupt jede Subdeterminante, deren Grad grösser als $n-r$ ist, gleich Null. Wenden wir dies auf die Reihe N^{ter} Ordnung an, so ergiebt sich als analytisches Criterium für die Bestimmung des Index, bezw. der Ordnung einer Gruppe dem Vorangehenden zufolge der Satz:

Bezeichnet k den höchsten Grad der nicht verschwindenden Subdeterminanten der Charakteristik N^{ter} Ordnung, die zu gegebenen Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ von N Elementen gehört, so ist der Index der durch diese Substitutionen bestimmten Gruppe

$$i = N! + \frac{N!}{\nu_1} + \frac{N!}{\nu_2} + \cdots + \frac{N!}{\nu_\varrho} - k$$

wenn $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_\varrho$ die resp. Ordnungen der Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ sind.

§ 5.

Gehen wir von der Reihe N^{ter} Ordnung zurück zu Reihen niedrigerer Ordnung, so wird im allgemeinen die Anzahl der transitiven Gruppen abnehmen, bis sie schliesslich für die Reihe m^{ter} Ordnung gleich 1 wird, wenn die durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmte Gruppe m-fach transitiv ist. Denn gehören die beiden Verbindungen $a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_\mu}$ und $a_{\beta_1} \ldots a_{\beta_\mu}$ zwei verschiedenen transitiven Gruppen der Reihe μ^{ter} Ordnung an ($\mu \leqq N$), so gehören auch zwei Verbindungen von der Form $a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_\mu} a_{\alpha_{\mu+1}}$ und $a_{\beta_1} \ldots a_{\beta_\mu} a_{\beta_{\mu+1}}$ zwei verschiedenen transitiven Gruppen der Reihe $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung an, da eine Ueberführung von $a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_\mu} a_{\alpha_{\mu+1}}$ in $a_{\beta_1} \ldots a_{\beta_\mu} a_{\beta_{\mu+1}}$ durch wiederholte Anwendung der Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ auch eine Ueberführung von $a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_\mu}$ in $a_{\beta_1} \ldots a_{\beta_\mu}$ in sich schliesst. Es ist also jedenfalls die Anzahl der transitiven Gruppen der Reihe μ^{ter} Ordnung nicht grösser, als die der Reihe $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Enthält ferner die durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmte Gruppe $e_1^{(\mu)}$ Substitutionen, welche die Elemente $a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_\mu}$ ungeändert lassen, so enthält jede transitive Gruppe der Reihe N^{ter} Ordnung, die eine Verbindung von der Form $a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_\mu} a_{\alpha_{\mu+1}} \ldots a_{\alpha_N}$ enthält, genau $e_1^{(\mu)}$ Verbindungen, in denen die ersten μ Elemente die Verbindung $a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_\mu}$ bilden. Da es nun $(N-\mu)!$ Verbindungen $a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_\mu} a_{\alpha_{\mu+1}} \ldots a_{\alpha_N}$ giebt, in denen die Reihe der ersten μ Indices die Reihe der Zahlen $\alpha_1 \ldots \alpha_\mu$ ist, so giebt es $\frac{(N-\mu)!}{e_1^{(\mu)}}$ solche Verbindungen enthaltende transitive Gruppen der Reihe N^{ter} Ordnung, welche wir als entsprechend der die Verbindung $a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_\mu}$ enthaltenden transitiven Gruppe der Reihe μ^{ter} Ordnung ansehen.

Ist ferner $a_{\beta_1} \ldots a_{\beta_\mu}$ eine zweite Verbindung dieser transitiven Gruppe, so enthält auch jede ihr entsprechende transitive Gruppe der

Reihe N^{ter} Ordnung Verbindungen $a_{\beta_1} \ldots a_{\beta_\mu} a_{\beta_{\mu+1}} \ldots a_{\beta_N}$, in denen also die Reihe der ersten μ Indices die Reihe der Zahlen $\beta_1 \ldots \beta_\mu$ ist, d. h. die Bestimmung der einer transitiven Gruppe der Reihe μ^{ter} Ordnung entsprechenden transitiven Gruppen der Reihe N^{ter} Ordnung ist unabhängig von der Wahl der Verbindung $a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_\mu}$. Gleiches gilt folglich auch von der Anzahl der Substitutionen, die die Elemente $a_{\alpha_1}, \ldots a_{\alpha_\mu}$ einer Verbindung der transitiven Gruppe einer Reihe ungeändert lassen, dem „*Exponenten*" der transitiven Gruppe. Ist nun r_μ die Anzahl der transitiven Gruppen der Reihe μ^{ter} Ordnung, und sind $e_1^{(\mu)} \ldots e_{r_\mu}^{(\mu)}$ die Exponenten dieser transitiven Gruppen, so ergiebt sich für die Anzahl aller transitiven Gruppen der Reihe N^{ter} Ordnung oder den Index der durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmten Gruppe

$$i = \sum_{\alpha=1}^{r_\mu} \frac{(N-\mu)!}{e_\alpha^{(\mu)}}$$

oder für die Exponenten $e_1^{(\mu)} \ldots e_{r_\mu}^{(\mu)}$ besteht die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \sum_{\alpha=1}^{r_\mu} \frac{1}{e_\alpha^{(\mu)}} = \frac{i}{(N-\mu)!}.$$

Ist die durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmte Gruppe m-fach transitiv, so liefert diese Formel für $\mu = m$ die bekannte Formel

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{e^{(m)}} = \frac{i}{(N-m)!} = \frac{N(N-1)\ldots(N-m+1)}{\nu},$$

wenn ν die Ordnung der Gruppe ist und $e^{(m)}$ die Anzahl der Substitutionen, die m Elemente ungeändert lassen. Ist anderseits

$$e_1^{(\mu)} = e_2^{(\mu)} = \ldots = e_{r_\mu}^{(\mu)} = 1,$$

giebt es also in der durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmten Gruppe ausser der Identität keine Substitution, welche μ Elemente ungeändert lässt, so wird

$$\text{(c)} \qquad r_\mu = \sum_{\alpha=1}^{r_\mu} \frac{1}{e_\alpha^{(\mu)}} = \frac{i}{(N-\mu)!}$$

und aus (b) folgt alsdann

$$\text{(d)} \qquad e^{(m)} = \frac{(N-m)!}{r_\mu (N-\mu)!}.$$

Ist dagegen eine der Zahlen $e_1^{(\mu)} \ldots e_{r_\mu}^{(\mu)}$ von 1 verschieden, so giebt es in der durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmten Gruppe ausser der Identität Substitutionen, welche μ Elemente ungeändert lassen, alsdann ist

$$r_\mu > \sum_{\alpha=1}^{r_\mu} \frac{1}{e_\alpha^{(\mu)}},$$

also:

(e) $$r_\mu > \frac{i}{(N-\mu)!}.$$

Wir erhalten somit als analytisches Kriterium für die Bestimmung der grössten Anzahl von Elementen, die durch die Substitutionen einer Gruppe ungeändert bleiben können, ohne dass auch die übrigen Elemente ungeändert bleiben, sowie für die Bestimmung der Anzahl der Substitutionen, welche m Elemente einer mindestens m-fach transitiven Gruppe ungeändert lassen, den Satz:

Bezeichnet $r_\mu (\mu = 1 \ldots N)$ die Anzahl der transitiven Gruppen einer Reihe μ^{ter} Ordnung, die zu gegebenen Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ gehört, so ist

$$r_\mu (N-\mu)! > r_N,$$

oder

$$r_\mu (N-\mu)! = r_N,$$

je nachdem die durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmte Gruppe ausser der Identität Substitutionen, die μ Elemente ungeändert lassen, besitzt, oder nicht besitzt. Ist die Gruppe mindestens m-fach transitiv und ist $e^{(m)}$ die Anzahl der Substitutionen der Gruppe, die m Elemente ungeändert lassen, so folgt aus $r_\mu (N-\mu)! = r_N$ zur Bestimmung von $e^{(m)}$ die Gleichung

$$e^{(m)} = \frac{(N-m)!}{r_\mu (N-\mu)!}.$$

Dabei ist, wie in § 4 gezeigt wurde, durch die Anzahl n_μ der Functionen des charakteristischen Functionensystems μ^{ter} Ordnung und den höchsten Grad k_μ der nicht verschwindenden Subdeterminanten der Charakteristik μ^{ter} Ordnung die Anzahl $r_\mu = n_\mu - k_\mu$ $(\mu = 1 \ldots N)$ der transitiven Gruppen der Reihe μ^{ter} Ordnung bestimmt.

§ 6.

Die Elemente jeder transitiven Gruppe der Reihe N^{ter} Ordnung werden von allen solchen Permutationen der Elemente $a_1 \ldots a_N$ gebildet, die durch die Substitutionen der durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmten Gruppe in einander übergehen. Es müssen also die Elemente derjenigen transitiven Gruppe, welche unter ihren Elementen die Permutation $a_1 a_2 \ldots a_N$ enthält, die der Substitutionengruppe entsprechende Permutationengruppe bilden, durch die also die Substitutionengruppe selbst unmittelbar gegeben ist. Die Bestimmung der transitiven Gruppen der Reihe aber erfolgt analytisch durch Aufstellen der Gleichungen, die

zwischen den unbestimmten Constanten C stattfinden müssen, damit die Identität

$$(1) \qquad \sum_{(\alpha_1 \cdots \alpha_N)} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_N} \psi_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}(x_1 \ldots x_{\varrho N}) = \sum_{\alpha=1}^{\tau_N} C_\alpha \varphi_\alpha (x_1 \ldots x_{\varrho N})$$

zwischen den Functionen des charakteristischen Functionensystems N^{ter} Ordnung besteht. Das Bestehen dieser Gleichung verlangt, dass die Coefficienten C gruppenweise einander gleich sind. Alsdann bestimmt jede Gruppe gleicher Coefficienten der Functionen ψ durch ihre Indices die Elemente einer der transitiven Gruppen der Reihen N^{ter} Ordnung, und die dieser Coefficientengruppe gleiche Gruppe der Coefficienten der Functionen φ bestimmt ebenso die Glieder dieser transitiven Gruppe. Ist daher

$$C_{1\,2 \ldots N} = C_{\alpha_1' \alpha_2' \cdots \alpha_N'} = \cdots = C_{\alpha_1^{(\nu-1)}\, \alpha_2^{(\nu-1)} \cdots \alpha_N^{(\nu-1)}}$$

$$= C_{\alpha'} = C_{\alpha''} = \cdots = C_{\alpha^{(\mu)}}$$

diejenige Gruppe gleicher Coefficienten, welche den Coefficienten $C_{1\,2 \ldots N}$ enthält, so wird die durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmte Substitutionengruppe gebildet von den Substitutionen

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_N \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_N \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} a_{\alpha_1'} & a_{\alpha_2'} & \ldots & a_{\alpha_N'} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_N \end{pmatrix}, \ldots$$

$$\ldots S_\nu = \begin{pmatrix} a_{\alpha_1^{(\nu-1)}} & a_{\alpha_2^{(\nu-1)}} & \ldots & a_{\alpha_N^{(\nu-1)}} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_N \end{pmatrix}$$

und in der entsprechenden Permutationengruppe werden die den Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ entsprechenden Permutationencomplexe, von denen jeder die durch die Potenzen einer dieser Substitutionen in einander übergehenden Permutationen enthält, gebildet von den Gliedern

$$A_{\alpha'}^{(N)}, \; A_{\alpha''}^{(N)}, \ldots A_{\alpha^{(\mu)}}^{(N)}$$

der Reihe N^{ter} Ordnung, wobei μ zur Abkürzung

$$= \frac{\nu}{\nu_1} + \frac{\nu}{\nu_2} + \cdots + \frac{\nu}{\nu_\varrho}$$

gesetzt ist. Da nun die Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ selbst in der durch sie bestimmten Substitutionengruppe enthalten sind, so ergiebt sich hieraus unmittelbar als analytisches Kriterium dafür, dass mehrere Substitutionen eine Gruppe bilden, der Satz:

Sollen die Substitutionen

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_{\alpha_1'} & a_{\alpha_2'} & \dots & a_{\alpha_N'} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} a_{\alpha_1''} & a_{\alpha_2''} & \dots & a_{\alpha_N''} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots S_\varrho = \begin{pmatrix} a_{\alpha_1^{(\varrho)}} & a_{\alpha_2^{(\varrho)}} & \dots & a_{\alpha_N^{(\varrho)}} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}$$

der N Elemente $a_1\, a_2 \dots a_N$ eine Gruppe bilden, so muss zwischen den Functionen des zugehörigen charakteristischen Functionensystems N^{ter} Ordnung eine Identität bestehen von der Form

$$\sum_{k=1}^{\varrho} \psi_{\alpha_1^{(k)}\, \alpha_2^{(k)} \dots \alpha_N^{(k)}} (x_1 \dots x_{\varrho N}) = \sum_{k=1}^{\tau_N} C_k\, \varphi_k (x_1 \dots x_{\varrho N}),$$

in der die Grössen C Constante bedeuten und die Summation über sämmtliche, den Substitutionen $S_1 \dots S_\varrho$ entsprechenden Functionen φ und ψ erstreckt ist; und umgekehrt, wenn man die Constanten C in dieser Gleichung so bestimmen kann, dass dieselbe identisch besteht, so bilden auch die Substitutionen $S_1 \dots S_\varrho$ eine Gruppe. Die Constanten C können dann keine anderen Werthe, als $0, 1$ haben, und die Indices der nicht verschwindenden unter ihnen stimmen mit den Indices derjenigen Glieder der Reihe N^{ter} Ordnung überein, welche die den einzelnen Substitutionen $S_1 \dots S_\varrho$ entsprechenden Permutationencomplexe in der entsprechenden Permutationengruppe enthalten.

Zweiter Theil.

Von den Productformen der Substitutionen.

§ 7.

Die verschiedenen Formen gleichwerthiger Producte, die durch Versetzen von Factoren sich in einander umwandeln lassen, bilden schon lange Gegenstand substitutionentheoretischer Untersuchungen. Dagegen scheint eine andere hierher gehörige, meines Erachtens nicht minder interessante Frage bisher völlig unbeachtet geblieben zu sein, nämlich die Frage nach den verschiedenen möglichen Formen, in denen eine gegebene Substitution sich als Product gegebener Substitutionen $S_1 \dots S_\varrho$ darstellen lässt. Der Ausdruck „Product gegebener Substitutionen" ist dabei im weitesten Sinne zu verstehen, d. h. es können die Substitutionen $S_1 \dots S_\varrho$ beliebig oft wiederholt und in beliebiger Reihenfolge vorkommen. Es ist nun ohne Weiteres klar, dass die Anzahl solcher Productformen von gleichem Werthe unendlich gross ist, denn man kann in jede solche Form aus den gegebenen Substitutionen gebildete identische, d. h. der Einheit gleiche Producte be-

liebig oft und in beliebiger Reihenfolge einschalten oder zu ihr hinzufügen. Es kann sich daher nur darum handeln, ein Gesetz aufzustellen, das *die Entstehung der Gesammtheit dieser Formen aus einer endlichen Anzahl von Formen*, die man füglich als „Stammformen" bezeichnen kann, erkennen lehrt. Dass solche Stammformen in endlicher Anzahl existiren müssen, ist a priori einzusehen. Man könnte für dieselben z. B. alle aus den gegebenen Substitutionen zu bildenden identischen Producte wählen, die keine identischen Unterproducte enthalten. Die Bestimmung der Anzahl aber solcher Stammformen ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Es soll nun gezeigt werden, dass bei richtiger Wahl des Systems der Stammformen, m. a. W. bei richtiger Bestimmung des Gesetzes der Entstehung aller gleichwerthigen Productformen aus Stammformen, die Anzahl der letzteren mit der Ordnung der durch die gegebenen Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmten Gruppe in einfacher Beziehung steht, sodass durch die eine Zahl die andere unmittelbar gegeben ist. Dieses Gesetz liefert uns der Begriff der substitutionentheoretischen Congruenz, der im folgenden Paragraphen entwickelt werden soll.

§ 8.

Zwei aus gegebenen Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ gebildete Productformen Π_1, Π_2 heissen einander „*congruent*" ($\Pi_1 \cong \Pi_2$), wenn sie sich mittelst der folgenden beiden (beliebig oft und in beliebiger Reihenfolge anzuwendenden) Operationen in einander umwandeln lassen:

1) Einschalten (bezw. Hinzufügen) oder Unterdrücken eines der Einheit gleichen Products von Potenzen derselben Substitution, die unter den gegebenen Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ enthalten ist.

2) Vertauschen von auf einander folgenden, der Einheit gleichen Producten gegen einander.

Congruente Productformen sind somit auch stets von gleichem Werthe, aber umgekehrt sind gleichwerthige Productformen nicht immer congruent.

Ist eine Productform Π congruent einem Product $S_\alpha^a S_\beta^b \ldots$, wo die Exponenten $a, b, \ldots$ ganze Vielfache der resp. Ordnungen $\nu_\alpha, \nu_\beta \ldots$ der Substitutionen $S_\alpha, S_\beta \ldots$ sind, so heisst Π der Einheit congruent ($\Pi \cong 1$). Aus $\Pi \cong 1$ folgt somit auch $\Pi = 1$, aber nicht nmgekehrt.

Ist $\Pi_1 \cong \Pi_2$, so ist $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \cong 1$, wenn unter Π_2^{-1} das Product der inversen Factoren von Π_2 in umgekehrter Reihenfolge verstanden wird. Denn Π_1 kann zuf. Vor. in Π_2 mittelst der Operationen 1 und 2 umgewandelt werden, und folglich kann, nachdem dies in dem Product $\Pi_1 \Pi_2^{-1}$ geschehen ist, dieses Product durch Anwendung der Operation 1 in eine Potenz S_α^a umgewandelt werden, in der a ein Vielfaches der

Ordnung ν_α von S_α ist. Ist umgekehrt $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \cong 1$, so ist auch $\Pi_1 \cong \Pi_2$. Denn zuf. Vor. kann $\Pi_1 \Pi_2^{-1}$ durch die Operationen 1 und 2 in $S_\alpha^{\nu_\alpha}$, also $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \Pi_2$ in $S_\alpha^{\nu_\alpha} \Pi_2 \cong \Pi_2$ umgewandelt werden, m. a. W. aus $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \cong 1$ folgt durch Multiplication mit Π_2 die Congruenz $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \Pi_2 \cong \Pi_2$. Diese aber geht durch Unterdrücken von $\Pi_2^{-1} \Pi_2$ auf Grund der Operation 1 über in $\Pi_1 \cong \Pi_2$.

Ist $\Pi_1 = \Pi_2$ und $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \cong \Pi_0$, so folgt aus dem Vorangehenden $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \Pi_0^{-1} \cong 1$, oder $\Pi_1 (\Pi_0 \Pi_2)^{-1} \cong 1$, es ist also $\Pi_1 \cong \Pi_0 \Pi_2$. Alle gleichwerthigen Productformen sind also congruent Producten aus *einer* solchen Form und den Formen der der Einheit gleichen Producte. Da nun die verschiedenen Werthe der aus den gegebenen Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ zu bildenden Productformen gegeben sind durch die Substitutionen der durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmten Gruppe, so bleibt noch übrig, ein System der Einheit gleicher Productformen aufzustellen, aus denen die Gesammtheit dieser (aus $S_1 \ldots S_\varrho$ gebildeten) Formen nach einem einfachen Gesetz entstanden gedacht werden kann. Es soll nun ein solches System der Einheit gleicher Formen aufgestellt werden, wobei sich zeigen wird, dass die Anzahl der Glieder derselben ebenfalls durch die Ordnung ν der durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmten Gruppe gegeben ist.

§ 9.

Ersetzt der erste Factor einer aus Potenzen der gegebenen Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ gebildeten Productform Π die Permutation $p_1 = a_1 a_2 \ldots a_N$ durch p_2, der zweite p_2 durch p_3 u. s. f., so kann jede solche Permutationenfolge $p_m p_{m+1}$ einem ganz bestimmten Gliede derjenigen transitiven Gruppe $\mathfrak{G}$ der zu $S_1 \ldots S_\varrho$ gehörigen Reihe N^{ter} Ordnung angehörig gedacht werden, deren Elemente von den Permutationen der durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmten Permutationengruppe gebildet werden (§ 6). Gehört nämlich auch die Folge $p_m p_{m+1}$ zweien oder mehrern Gliedern von $\mathfrak{G}$ an, so entspricht unter diesen doch nur eines der Substitution S_α, deren Potenz in Π die Folge $p_m p_{m+1}$ bewirkt, und diesem Gliede wird alsdann $p_m p_{m+1}$ angehörig gedacht. Jeder Productform Π entspricht also eine ganz bestimmte auf $\mathfrak{G}$ bezogene Summe von Elementenpaaren $P = p_1 p_2 + p_2 p_3 + \cdots$, die wir, da das letzte Element jedes Paares mit dem ersten des folgenden übereinstimmt, kurz eine „continuirliche Summe" nennen und durch $\log \Pi$ bezeichnen wollen. Umgekehrt können wir jeder solchen auf $\mathfrak{G}$ bezogenen, continuirlichen und mit $p_1 = a_1 a_2 \ldots a_N$ beginnenden Summe von Elementenpaaren eine ganz bestimmte Productform Π von Potenzen der Substitutionen $S_1 \ldots S_\varrho$ entsprechen lassen, indem wir jedem Paar $p_m p_{m+1}$ der Summe eine, die Folge $p_m p_{m+1}$ bewirkende Potenz derjenigen Substitution entsprechen lassen, welcher das die Elemente

p_m, p_{m+1} enthaltende*) Glied von $\mathfrak{G}$ entspricht. Das Zeichen $\log \Pi$ hat also für jede aus Potenzen von $S_1 \ldots S_\varrho$ gebildete Productform Π einen bestimmten Sinn, und wird umgekehrt eine beliebige auf $\mathfrak{G}$ bezogene continuirliche und mit p_1 beginnende Summe durch $\log \Pi$ bezeichnet, so stellt Π eine ganz bestimmte aus Potenzen von $S_1 \ldots S_\varrho$ gebildete Productform dar.

Wir beschränken uns nun auf die Betrachtuug solcher Productformen, deren Werth gleich Eins ist. Die Gesammtheit derselben wird offenbar gebildet von der Gesammtheit der Formen, deren Logarithmen Cyklen sind. Für diese Formen gelten ferner, wie aus dem Vorangehenden unmittelbar folgt, die Sätze: „der Logarithmus eines Products der Einheit gleicher Formen ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Formen“ und „der Logarithmus einer Potenz einer der Einheit gleichen Form ist gleich dem Product aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis“. Dabei ist wieder, wenn der Exponent negativ ist, unter Π^{-s} das Product sämmtlicher inversen Factoren von Π^s in umgekehrter Reihenfolge zu verstehen.

Ist $\Pi \underline{\sim} 1$, so ist $\log \Pi = 0$, und umgekehrt. Denn durch die Operation 1 werden in $\log \Pi$ nur solche Permutationenfolgen eingeschaltet, oder unterdrückt, die jede für sich gleich Null sind, es gilt also für jedes durch die Operation 1 aus Π entstandene Product Π' die Gleichung $\log \Pi' = \log \Pi$. Durch die Operation 2 aber wird im Logarithmus einer Productform weder die Gesammtheit der Permutationenfolgen, noch ihre Zugehörigkeit zu den Gliedern von $\mathfrak{G}$ geändert. Es ist also allgemein, wenn $\Pi \underline{\sim} \Pi'$ ist, auch $\log \Pi = \log \Pi'$. Ist $\Pi \underline{\sim} 1$, so ist $\Pi \underline{\sim} S_\alpha^{\nu_\alpha}$, wo ν_α die Ordnung von S_α ist. Also ist dann $\log \Pi = \log S_\alpha^{\nu_\alpha}$, und da die Summe der durch S_α bewirkten Permutationenfolgen wieder einen Cyklus innerhalb desselben Gliedes von $\mathfrak{G}$ bildet, ist $\log S_\alpha^{\nu_\alpha} = 0$. Die Umkehrung ist nicht so einfach zu beweisen. In meiner Programmabhandlung „Ueber Reihen, Liniengebilde und Substitutionen“ habe ich bei der Betrachtung der auf eine Reihe bezogenen Summen von Elementenpaaren Fundamentalsysteme von Elementenpaaren eingeführt**). Durch die Paare eines solchen Fundamentalsystems kann jede auf die Reihe bezogene Summe dar-

*) Man beachte, dass bei der Beziehung einer Summe von Elementenpaaren auf eine Reihe jedes Paar einem *bestimmten* Gliede der Reihe angehörig gedacht wird.

**) Jahresbericht des Victoriagymnasiums zu Burg, Ostern 1897, Seite 11 unten und Seite 6 ff. Ist $A = p_{a_1} p_{a_2} \ldots p_{a_k}$ irgend ein Reihenglied, so stellt z. B. die Reihe der Paare $p_{a_1} p_{a_2}, p_{a_2} p_{a_3}, \ldots p_{a_{k-1}} p_{a_k}$ eine Zerlegung von A in ein Fundamentalsystem von Elementenpaaren dar. Dann ist irgend ein Elementenpaar von A

$$p_{a_n} p_{a_{n+m}} = p_{a_n} p_{a_{n+1}} + p_{a_{n+1}} p_{a_{n+2}} + \cdots + p_{a_{n+m-1}} p_{a_{n+m}}$$

oder

$$p_{a_{n+m}} p_{a_n} = p_{a_{n+m}} p_{a_{n+m-1}} + p_{a_{n+m-1}} p_{a_{n+m-2}} + \cdots + p_{a_{n+1}} p_{a_n}.$$

gestellt werden, indem jedes Elementenpaar durch eine ihm gleiche, demselben Reihengliede angehörige Summe von Paaren des Fundamentalsystems ersetzt wird. Geschieht dies in $\log \Pi$ und geht dadurch $\log \Pi$ über in $\log \Pi'$, so ist $\Pi' \underline{\underline{\sim}} \Pi$. Denn wird in $\log \Pi$ das Paar $p_m p_{m+1}$ durch eine gleiche, demselben Reihengliede wie $p_m p_{m+1}$ angehörende Summe von Elementenpaaren ersetzt, so wird in Π die die Folge $p_m p_{m+1}$ bewirkende Potenz von S_α durch ein gleichwerthiges Product von Potenzen derselben Substitution S_α ersetzt, d. h. Π erfährt eine Umwandlung durch die Operation 1. Ist $\log \Pi = 0$, also auch $\log \Pi' = 0$, so ist $\log \Pi'$ aus entgegengesetzten Paaren zusammengesetzt*). Dann enthält also $\log \Pi'$ unter den auf das erste Paar $p_1 p_2$ folgenden Paaren ein Paar $p_2 p_1$. Folgt dieses unmittelbar auf $p_1 p_2$, so kann man $p_1 p_2 + p_2 p_1$ in $\log \Pi'$ fortlassen, und $\log \Pi'$ wird dadurch in $\log \Pi''$ umgewandelt, wo $\Pi'' \underline{\underline{\sim}} \Pi'$ ist, da Π'' aus Π' durch Fortlassen zweier auf einander folgenden, einander aufhebenden Potenzen derselben Substitutionen entsteht. Folgt $p_2 p_1$ nicht unmittelbar auf $p_1 p_2$, so sei $p_{m+1} p_m$ das erste Paar in $\log \Pi'$, zu dem es in der Reihe der vorangehenden Paare ein entgegengesetztes giebt. Dann ist $\log \Pi$ von der Form:

$$\log \Pi' = p_1 p_2 + p_2 p_3 + \cdots + p_m p_{m+1} + \cdots + p_{m+1} p_m + \cdots.$$

Entweder folgt nun dieses Paar $p_{m+1} p_m$ unmittelbar auf $p_m p_{m+1}$ — dann erhält man wieder durch Unterdrücken beider Paare $\log \Pi'' = \log \Pi$ und $\Pi'' \underline{\underline{\sim}} \Pi'$ — oder $p_{m+1} p_m$ folgt nicht unmittelbar auf $p_m p_{m+1}$. Dann ist die Aufeinanderfolge der Paare in $\log \Pi'$ von dem Paare $p_m p_{m+1}$ an die folgende:

$$p_m p_{m+1} + p_{m+1} p_{m+2} + \cdots + p_{m+i} p_{m+1} + p_{m+1} p_m + \cdots + p_{m+2} p_{m+1} + \cdots.$$

Alsdann bilden die den Paaren

$$p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_{m+i} p_{m+1}$$

entsprechenden Factoren in Π' für sich ein der Einheit gleiches Product, und ebenso die den Paaren

$$p_{m+1} p_m \cdots p_{m+2} p_{m+1}$$

entsprechenden Factoren. Durch Vertauschen dieser beiden Producte (Operation 2) und Fortlassen der Factoren, die den alsdann unmittelbar auf einander folgenden Paaren $p_m p_{m+1}$, $p_{m+1} p_m$ entsprechen (Operation 1), geht wieder Π' über in $\Pi'' \underline{\underline{\sim}} \Pi'$. So fortfahrend muss man einmal zu einer Productform $\Pi^{(k)} \underline{\underline{\sim}} \Pi$ gelangen, die ein Product von Potenzen einer einzigen Substitution ist. Da nun alle diese Formen $\Pi' \ldots \Pi^{(k)}$,

*) ib. S. 11 unten. Es ist nämlich jeder aus den Paaren $p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}, p_{\alpha_2} p_{\alpha_3} \cdots p_{\alpha_{k-1}} p_{\alpha_k}$, die durch Zerlegung desselben Reihengliedes erhalten sind, zusammengesetzter Cyklus aus entgegengesetzten Paaren zusammengesetzt.

schon weil die zugehörigen Logarithmen Cyklen sind, den Werth Eins haben, so folgt hieraus, dass $\Pi \underline{\underline{\sim}} 1$ sein muss.

Ist nun $\Pi_1 = \Pi_2 = 1$ und $\log \Pi_1 = \log \Pi_2$, also $\log \Pi_1 - \log \Pi_2 = 0$, so ergiebt sich aus dem Vorangehenden $\log (\Pi_1 \Pi_2^{-1}) = 0$, $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \underline{\underline{\sim}} 1$, $\Pi_1 \underline{\underline{\sim}} \Pi_2$. Es gehören also nicht nur zu congruenten, der Einheit gleichen Producten gleiche Logarithmen, sondern umgekehrt bedingt auch die Gleichheit der Logarithmen zweier der Einheit gleichen Productformen die Congruenz dieser Formen.

§ 10.

Wie ich bereits in meiner Abhandlung „Ueber den Zusammenhang in Reihen etc.“*) nachgewiesen habe, kann man die sämmtlichen Cyklen einer Reihe durch eine dem Grade des Zusammenhanges $\mathfrak{G}$ der Reihe gleiche Anzahl von Cyklen als lineare homogene Functionen mit ganzzahligen Coefficienten darstellen. Da man nun die Cyklen eines solchen „primitiven Cyklensystems“ der hier betrachteten Reihe $\mathfrak{G}$ offenbar stets so wählen kann, dass dieselben im obigen Sinne continuirliche, mit $p_1 = a_1 a_2 \ldots a_N$ beginnende (und folglich auch schliessende) Cyklen sind, so kann man dieselben als ein System von g Logarithmen $\log \Pi_1 \ldots \log \Pi_g$ ebensovieler der Einheit gleicher Productformen $\Pi_1 \ldots \Pi_g$ ansehen. Alsdann ergiebt sich für jede der Einheit gleiche Productform Π:

$$\log \Pi = e_1 \log \Pi_1 + \cdots + e_g \log \Pi_g,$$

wo $e_1 \ldots e_g$ ganze Zahlen sind, und daraus

$$\Pi \underline{\underline{\sim}} \Pi_1^{e_1} \ldots \Pi_g^{e_g}.$$

Da ferner die Glieder eines primitiven Cyklensystems linear von einander unabhängig sind, so kann zwischen $\Pi_1 \ldots \Pi_g$ keine Gleichung der Form

$$k_1 \log \Pi_1 + \cdots + k_g \log \Pi_g = 0$$

bestehen, wo $k_1 \ldots k_g$ ganze Zahlen sind, also besteht auch zwischen $\Pi_1 \ldots \Pi_g$ keine Congruenz von der Form:

$$\Pi_1^{k_1} \ldots \Pi_g^{k_g} \underline{\underline{\sim}} 1.$$

Dagegen besteht zwischen je $g + 1$ Productformen eine Congruenz dieser Form, da die Logarithmen derselben sich als lineare homogene ganzzahlige Functionen von $\log \Pi_1 \ldots \log \Pi_g$ darstellen lassen. Man kann daher die in Betracht kommende Zahl g auch definiren als die grösste Anzahl der Einheit gleicher Productformen, zwischen denen keine Congruenz der angegebenen Form besteht. Bezeichnet w die Wiederholung in $\mathfrak{G}$, n die Anzahl der Glieder von $\mathfrak{G}$, so ist

$$g = w - n + 1^{**}).$$

*) Math. Annalen Bd. 42, § 4.

**) ibidem § 3.

Da nun $\mathfrak{G}$, wenn die Ordnung der durch $S_1 \ldots S_\varrho$ bestimmten Gruppe wieder durch ν bezeichnet wird, ν verschiedene Elemente enthält, nämlich die ν den Substitutionen der Gruppe entsprechenden Permutationen, und da jedes dieser Elemente ϱ mal in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, so folgt $w = \nu(\varrho - 1)$. Da ferner jeder Substitution S_α $\frac{\nu}{\nu_\alpha}$ Glieder in $\mathfrak{G}$ entsprechen, wenn wieder ν_α die Ordnung von S_α bezeichnet, so folgt

$$n = \frac{\nu}{\nu_1} + \frac{\nu}{\nu_2} + \cdots + \frac{\nu}{\nu_\varrho},$$

folglich

$$g = \nu(\varrho - 1) - \frac{\nu}{\nu_1} - \frac{\nu}{\nu_2} - \cdots - \frac{\nu}{\nu_\varrho} + 1.$$

Es ergeben sich daraus die folgenden beiden Sätze, mit denen wir die vorliegende Abhandlung schliessen, und von denen der erste sich auf die Darstellung der der Einheit gleichen Productformen bezieht, der zweite die Abhängigkeit der Ordnung einer Gruppe von der soeben definirten, für die Congruenztheorie in Betracht kommenden Zahl g darthun soll:

1. *Hat die durch ϱ gegebene Substitutionen von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_\varrho$ bestimmte Gruppe die Ordnung ν, so giebt es unter den der Einheit gleichen Productformen, die man aus den gegebenen Substitutionen bilden kann, stets*

$$g = \nu(\varrho - 1) - \frac{\nu}{\nu_1} - \frac{\nu}{\nu_2} - \cdots - \frac{\nu}{\nu_\varrho} + 1$$

Productformen $\Pi_1, \ldots \Pi_g$, die keiner Congruenz von der Form

$$\Pi_1^{e_1} \Pi_2^{e_2} \ldots \Pi_g^{e_g} \equiv 1$$

genügen, durch die aber jede aus den gegebenen Substitutionen zu bildende, der Einheit gleiche Productform Π in der Form darstellbar ist:

$$\Pi \equiv \Pi_1^{e_1} \Pi_2^{e_2} \ldots \Pi_g^{e_g}.$$

2. *Bezeichnet g die grösste Anzahl der Einheit gleicher Productformen, die man aus ϱ gegebenen Substitutionen bilden kann und zwischen denen keine Congruenz von der Form*

$$\Pi_1^{e_1} \Pi_2^{e_2} \ldots \Pi_g^{e_g} \equiv 1$$

besteht, so hat die durch die gegebenen Substitutionen bestimmte Gruppe die Ordnung

$$\nu = (g-1) : \left(\varrho - 1 - \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} - \cdots - \frac{1}{\nu_\varrho}\right).$$

Burg b./Magdeb., 19. Dec. 1897.

Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung 6ten Grades mit einer Gruppe 360ster Ordnung.

Von

L. Lachtin in Moskau.

Einleitung.

Im Jahre 1889 erschien eine Arbeit von Valentiner, in dänischer Sprache, unter dem Titel „De endelige Transformations-Gruppers Theori“ *). In dieser Arbeit weist der Autor in einfacher jedoch sehr scharfsinniger Form das Vorhandensein einer Collineationsgruppe 360ster Ordnung nach, welche mit einer Gruppe gerader Vertauschungen von 6 Elementen isomorph ist. —

Obgleich Valentiner die Endformeln der von ihm betrachteten Collineationsgruppe nicht völlig zu Ende geführt hat, so ist es ungeachtet dessen mit Hülfe seiner Methode nicht schwierig die Collineationen zu berechnen. —

Die Erzeugenden der Valentiner'schen Collineationsgruppe 360ster Ordnung sind folgende:

$$(1)\qquad S:\quad \begin{aligned} \mu\bar{x}_1 &= \varepsilon^2 x_1,\\ \mu\bar{x}_2 &= \varepsilon^3 x_2,\\ \mu\bar{x}_3 &= x_3, \end{aligned}$$

wo

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}};$$

$$(2)\qquad T:\quad \begin{aligned} \mu\bar{x}_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3,\\ \mu\bar{x}_2 &= b_1x_1 + b_2x_2 + c_2x_3,\\ \mu\bar{x}_3 &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \end{aligned}$$

wo:

*) Mémoires de l'Académie Royale de Copenhague 6me Série Classe des Sciences. Vol. V; No. 2.

$$(3)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}},\ b_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}\mp\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}},\ c_3 = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \\ b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ c_1 = \dfrac{\sqrt{7-\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{2\sqrt{5}},\ c_2 = \dfrac{\sqrt{7-\sqrt{5}\mp\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{2\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Die Collineation S ist fünfter Ordnung und T zweiter Ordnung. Berechnen wir mit Hülfe der Formeln (1), (2), (3) die Collineation:

$$(4)\qquad T_1 = S^2TS^3TS^2TS^3,$$

so erhalten wir:

$$(5)\quad T_1:\ \begin{cases} \mu\bar{x}_1 = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\,x_1 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\,x_2 + \dfrac{\pm\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\,x_3, \\ \mu\bar{x}_2 = -\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\,x_1 - \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\,x_2 - \dfrac{\pm\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\,x_3, \\ \mu\bar{x}_3 = \dfrac{\pm\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\,x_1 - \dfrac{\pm\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\,x_2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,x_3. \end{cases}$$

Die Collineationen S und T_1 sind die Erzeugenden einer Ikosaedergruppe G_{60}, welche in die Gruppe G_{360} als eine Untergruppe eintritt. –

Die Gruppe G_{360} enthält 6 gleichberechtigte Ikosaeder-Untergruppen. Man erhält diese aus G_{60} mit Hülfe der Transformationen:

$$(6)\qquad 1,\ T,\ TS,\ TS^2,\ TS^3,\ TS^4.$$

Die von Valentiner begonnene Arbeit wurde von Wiman fortgesetzt, welcher im Jahre 1896 in den Mathematischen Annalen (Bd. 47) eine Abhandlung unter dem Titel „Ueber eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen" veröffentlichte.

Wiman fand sämmtliche Formeln, welche bezüglich der Collineationsgruppe G_{360} invariant sind. Von diesen lautet die Form niedrigster Ordnung:

$$(7)\quad F(x_1, x_2, x_3) = x_3^6 + 15x_1x_2x_3^4 - 15x_1^2x_2^2x_3^2 - 10x_1^3x_2^3 - \\ - 3\sqrt{3}(x_1^5 - x_2^5)x_3\ ^*).$$

Die Curve:

$$(8)\qquad F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

hat keine singulären Punkte. Vom Geschlecht 10. Ausser der Form (7), sind noch folgende Formen vorhanden, welche bezüglich der Gruppe G_{360} invariant sind:

1. Die Hesse'sche Covariante $H(x_1, x_2, x_3)$ der Form (7) von der Ordnung 12.

---

*) Diese Formel unterscheidet sich nur unwesentlich von der Wiman'schen Originalformel.

2. Die *geränderte* Hesse'sche Determinante $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ von der Ordnung 30.
3. Die Jacobi'sche Determinante der Formen F, H und Φ. Diese Covariante $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ ist von der 45sten Ordnung.

Die Covarianten befinden sich in Abhängigkeit von einander in Form:

$$\Psi^2 = (\mu H^5 + \lambda \Phi^2)\Phi, \tag{9}$$

wo λ und μ constante Grössen sind. Die Curven:

$$H(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{und} \quad \Psi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

passiren jeden ihrer Durchschnittspunkte mit der Curve (8) nur ein einziges Mal; jedoch die Curve

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

berührt die Curve (8) in 90 Punkten.

Die von Valentiner und Wiman erhaltenen Resultate führten mich auf den Gedanken, dass eine Gleichung 6ten Grades mit der Gruppe 360ster Ordnung vorhanden sei, deren Wurzeln rationale Functionen der Integrale einer gewissen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit 3 singulären Punkten sind. Ich glaube, dass hier der Schlüssel zur Lösung von Gleichungen 6ten Grades zu suchen sei, analog der Lösung von Gleichungen 5ten Grades, wie sie von Prof. Klein angegeben wurde. Ich habe die Absicht, hier die bis jetzt von mir gefundenen Resultate auseinanderzulegen*) und hoffe ich in der Folge diese Frage ausführlicher zu bearbeiten.

§ 1.

Fundamental-Gleichungssystem.

Betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0, & (8) \\ \dfrac{c_0 \Phi^2(x_1, x_2, x_3)}{H^5(x_1, x_2, x_3)} = x, & (10) \end{cases}$$

in welchem c_0 eine constante vorläufig willkürliche Grösse, und x ein veränderlicher Parameter ist.

---

*) Die vorliegende Arbeit war schon beendet, als ich aus einem Brief von Prof. Klein, von der Existenz eines schon früher, im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. V, erschienenen Referats von Prof. Fricke erfuhr. Am Schluss dieses Referats führt Prof. Fricke fast genau dieselbe Gleichung 6ten Grades an, welche von mir ein wenig später gefunden wurde. Prof. Fricke bearbeitet hauptsächlich den transcendenten Charakter dieser Frage, ohne die Differentialresolvente und einige andere Eigenheiten der Aufgabe zu berühren. Daher glaube ich annehmen zu dürfen, dass gegenwärtige Mittheilung nicht ganz ohne Nutzen für die mathematische Litteratur sein dürfte.

Die linke Seite der Gleichung (10) ist eine homogene Function der nullten Dimension in x_1, x_2, x_3.

Indem wir nun anstatt der homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 die nichthomogenen:

$$u_1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_3} \tag{11}$$

einführen, bringen wir die Gleichungen (8) und (10) in die Form:

$$\begin{cases} F(u_1, u_2) = 0, \\ \dfrac{c_0 \Phi^2(u_1, u_2)}{H^5(u_1, u_2)} = x. \end{cases} \tag{12}$$

Solche Gleichungen nannte ich in meiner früheren, in russischer Sprache erschienenen Arbeit „*Fundamental-Gleichungssystem*". Dasselbe ist analog den Gleichungssystemen, die von Klein eingeführt sind; vergl. etwa „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen" Bd. I S. 737. Solche Gleichungssysteme sind als eine natürliche Verallgemeinerung der Schwarz'schen Gleichungen zu betrachten.

Die Eigenschaften der Gleichungen (12) sind folgende:

1) Die Gleichungen (12) gestatten 360 Paar Lösungen. Diese Lösungspaare sind vermittelst linearer nicht homogener Substitutionen verbunden, welche der Collineationsgruppe G_{360} entsprechen. Diese linearen nicht homogenen Transformationen bilden eine Gruppe, die wir mit dem Symbol g_{360} bezeichnen wollen.

2) Jedes Lösungspaar u_1, u_2 der Gleichungen (12) erfährt bei den Umgängen in der Ebene des variablen x die Transformationen der Gruppe g_{360}.

3) Die Functionen u_1, u_2, welche ein Lösungspaar der Gleichungen (12) repräsentiren, besitzen nur drei kritische Punkte: $x = 0$, $x = \infty$ und noch einen endlichen kritischen Punkt. Die Wahl der constanten Grösse c_0 ist am vortheilhaftesten so zu treffen, dass der dritte kritische Punkt $x = 1$ wird. Wir wollen daher der constanten c_0 einen solchen Werth beilegen.

4) Bei Anwendung der Formel (9) lässt sich die zweite der Gleichungen (12) wie folgt aufstellen:

$$\frac{c_1 \Psi^2(u_1, u_2)}{\Phi(u_1, u_2) H^5(u_1, u_2)} = x - 1, \tag{13}$$

wo c_1 eine constante ist.

5) Die Functionen u_1, u_2 sind eindeutig auf ein und derselben Riemann'schen Fläche ausgebreitet R_{360} vom Geschlecht 10, wobei diese Fläche aus 360 Blättern besteht. Die Blätter sind untereinander zu je 4 bei $x = 0$, zu je 2 bei $x = 1$ und zu je 5 bei $x = \infty$ verbunden.

6) Jedem einzelnen Blatte der Fäche R_{360} entspricht eine der Collineationen der Gruppe G_{360}. Führen wir durch die Fläche R_{360} 20 Querschnitte, so verwandeln wir dieselbe in eine einfach zusammenhängende. Diese einfach zusammenhängende Fläche kann auf der Ebene in Form eines in 360 weisse und 360 schwarze Dreiecke getheilten Polygons F_{360} abgebildet werden, ähnlich wie bei Klein auf S. 370 der „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen" Bd. I. Die weissen Dreiecke des Polygons F_{360} entsprechen den oberen, die schwarzen den unteren Halbebenen der Fläche R_{360}. Die Seiten des Polygons F_{360} sind paarweise äquivalent. Auf der Fig. 1 sind nur einige Vierecke des Polygonennetzes F_{360} dargestellt, wobei die ihnen entsprechenden Formeln der Collineationen den Vierecken selbst beigedruckt sind.

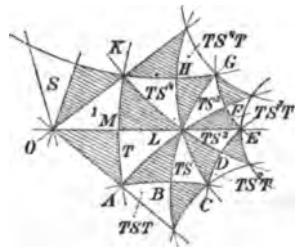


Fig. 1.

§ 2.

Differentialresolvente dritter Ordnung.

Betrachten wir nachstehende drei Ausdrücke:

$$(14)\quad y_1 = u_1 \sqrt[3]{\frac{\Psi(u_1, u_2)}{H^4(u_1, u_2)}}, \quad y_2 = u_2 \sqrt[3]{\frac{\Psi(u_1, u_2)}{H^4(u_1, u_2)}}, \quad y_3 = \sqrt[3]{\frac{\Psi(u_1, u_2)}{H^4(u_1, u_2)}}.$$

Jeder linearen nicht homogenen Substitution der Grössen u_1, u_2 entspricht eine lineare homogene Substitution der Grössen y_1, y_2, y_3.

Bei den Umgängen in der Ebene des variablen x erfahren die Grössen (14) lineare homogene Transformationen, welche eine gewisse Gruppe bilden; die Ordnung dieser Gruppe ist:

$$3 \cdot 360.$$

Die Grössen (14) bilden das Fundamentalsystem der Integrale einer gewissen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationellen Coefficienten in Bezug auf x. Dieselbe lässt sich in folgender Weise darstellen:

$$(15)\qquad p_0 \frac{d^3y}{dx^3} + p_1 \frac{d^2y}{dx^2} + p_2 \frac{dy}{dx} + p_3 y = 0.$$

Eine solche Gleichung bezeichne ich als Differentialresolvente für das Fundamentalgleichungssystem (12).

§ 3.

Primformen.

Aus den Gleichungen (12), (13), (14) ergeben sich:

$$(16)\qquad \begin{cases} \mathsf{H}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{c_0 c_1^2}\, x(x-1)^2, \\ \Phi(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{c_0^3 c_1^5}\, x^3(x-1)^5, \\ \Psi(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{c_0^4 c_1^8}\, x^4(x-1)^8. \end{cases}$$

Es sei eine gewisse ganze homogene Form $\mathsf{X}(y_1, y_2, y_3)$, in welcher y_1, y_2, y_3 das Fundamentalsystem der Integrale der Gleichung (15) bilden, gleich dem Radical einer gewissen Potenz n einer rationellen Function des variablen x; in dem Falle bezeichne ich eine solche Form, analog der von Prof. Fuchs eingeführten Bezeichnung, als „*Primform vom Index n*".

Die Formeln (16) zeigen, dass

$$\mathsf{H}(y_1, y_2, y_3), \quad \Phi(y_1, y_2, y_3), \quad \Psi(y_1, y_2, y_3)$$

Primformen vom Index 1 sind.

§ 4.

Berechnung der Coefficienten der Differentialresolvente.

Es sei α irgend ein kritischer Punkt der Integrale der Gleichung (15). Bekanntlich existirt ein Fundamentalsystem von Integralen, welche im Gebiete des Punktes α durch folgende Formeln ausgedrückt werden können:

$y' = (x-\alpha)^{r_1}\mathsf{P}_1(x-\alpha)$, $y'' = (x-\alpha)^{r_2}\mathsf{P}_2(x-\alpha)$, $y''' = (x-\alpha)^{r_3}\mathsf{P}_3(x-\alpha)$;

hierin sind

$$\mathsf{P}_1(x-\alpha), \quad \mathsf{P}_2(x-\alpha), \quad \mathsf{P}_3(x-\alpha)$$

holomorphe Functionen im Gebiete des Punktes $x = \alpha$, welche bei $x = \alpha$ nicht verschwinden können, während r_1, r_2, r_3 die Wurzeln einer gewissen cubischen, sogenannten „determinirenden Fundamentalgleichung" bezeichnen. Mittelst der Formeln (14), (15), (16) lassen sich die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung für jeden der kritischen Punkte: 0, 1, ∞ auffinden.

Die Berechnung ergiebt:

$$(17)\qquad \begin{cases} 1.\ \text{für } x = 0\text{:}\quad r_1 = \frac{1}{3},\quad r_2 = \frac{7}{12},\quad r_3 = \frac{1}{12}; \\ 2.\ \text{für } x = 1\text{:}\quad r_1 = \frac{2}{3},\quad r_2 = \frac{7}{6},\quad r_3 = \frac{1}{6}; \\ 3.\ \text{für } x = \infty\text{:}\quad r_1 = \frac{1}{3},\quad r_2 = -\frac{1}{15},\quad r_3 = -\frac{4}{15}. \end{cases}$$

Substituiren wir in die Gleichung (15):

$$y = x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} v. \tag{18}$$

Die Function v wird das Integral einer Differentialgleichung, ähnlich (15) sein.

Aus den Formeln (17) und (18) ergeben sich die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen für die transformirte Differentialgleichung:

$$\begin{cases} 1.\ \text{für } x = 0: & \varrho_1 = 0, & \varrho_2 = \frac{1}{4}, & \varrho_3 = -\frac{1}{4}; \\ 2.\ \text{für } x = 1: & \varrho_1 = 0, & \varrho_2 = \frac{1}{2}, & \varrho_3 = -\frac{1}{2}; \\ 3.\ \text{für } x = \infty: & \varrho_1 = \frac{4}{3}, & \varrho_2 = \frac{14}{15}, & \varrho_3 = \frac{11}{15}. \end{cases} \tag{19}$$

Sind uns einmal die Grössen der Wurzeln determinirender Fundamentalgleichungen bekannt und behalten wir im Auge, dass v eine algebraische Function ist, so ist uns die Möglichkeit geboten, die Coefficienten derjenigen Gleichung zu berechnen, welcher diese Function genügt. Jene Gleichung lässt sich wie folgt darstellen:

$$x^2(x-1)^2 \frac{d^3v}{dx^3} + (6x-3)x(x-1)\frac{d^2v}{dx^2} + \tag{20}$$
$$+ \left\{\frac{518}{75}x^2 - \frac{8513}{1200}x + \frac{15}{16}\right\}\frac{dv}{dx} + \left\{\frac{616}{675}x - \frac{4389}{4320}\right\} v = 0.$$

Hierbei sind die Wurzeln des Fundamentalgleichungsystems (12) Quotienten der Integrale der Gleichung (20).

Von Interesse dürfte noch folgende Bemerkung sein: Wenn wir die Gleichung (15) durch Substitution

$$y = x(x-1)\varphi \tag{21}$$

transformiren, so finden wir eine neue Differentialgleichung, deren Integrale Riemann'sche φ-Functionen sind. Demzufolge sind die Wurzeln des Fundamentalgleichungsystems (12) auch Quotienten Riemann'scher φ-Functionen.

§ 5.

Algebraische Resolvente sechsten Grades.

Die Form zweiten Grades:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + \frac{1 \mp i\sqrt{15}}{2} x_1 x_2 \tag{22}$$

ist invariant bezüglich der Collineationen der Ikosaedergruppe G_{60}.

Die Transformation des Kegelschnittes:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{23}$$

mittelst Collineationen der Gruppe G_{360} ergiebt im Ganzen sechs verschiedene Kegelschnitte, welche wir wie folgt bezeichnen wollen:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f^{(0)}(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$
$$f^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f^{(4)}(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Diese Gleichungen ergeben sich aus der Gleichung (23) durch Transformation der Letzteren mittelst der Collineationen:

$$1, T, TS, TS^2, TS^3, TS^4. \tag{6}$$

Betrachten wir den Ausdruck:

$$\omega = \varkappa \frac{\{f(y_1, y_2, y_3)\}^6}{\mathsf{H}(y_1, y_2, y_3)}, \tag{24}$$

in welchem $\varkappa$ vorläufig eine willkürlich angenommene Zahl ist, so ist diese Formel bezüglich y_1, y_2, y_3 der nullten Dimension homogen. Man kann sie in Form von:

$$\omega = \varkappa \frac{\{f(u_1, u_2)\}^6}{\mathsf{H}(u_1, u_2)} \tag{25}$$

darstellen.

Bei allen möglichen Umgängen in der Ebene des variablen x, lässt die Function (25) nur sechs verschiedene Bedeutungen zu:

$$\left\{\begin{array}{ll} \omega_\infty = \varkappa \dfrac{\{f(u_1, u_2)\}^6}{\mathsf{H}(u_1, u_2)}, & \omega_0 = \varkappa \cdot \dfrac{\{f^{(0)}(u_1, u_2)\}^6}{\mathsf{H}(u_1, u_2)}, \\ \omega_1 = \varkappa \cdot \dfrac{\{f^{(1)}(u_1, u_2)\}^6}{\mathsf{H}(u_1, u_2)}, & \omega_2 = \varkappa \cdot \dfrac{\{f^{(2)}(u_1, u_2)\}^6}{\mathsf{H}(u_1, u_2)}, \\ \omega_3 = \varkappa \cdot \dfrac{\{f^{(3)}(u_1, u_2)\}^6}{\mathsf{H}(u_1, u_2)}, & \omega_4 = \varkappa \cdot \dfrac{\{f^{(4)}(u_1, u_2)\}^6}{\mathsf{H}(u_1, u_2)}. \end{array}\right. \tag{26}$$

Die Grössen $\omega_\infty, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ sind Wurzeln einer gewissen Gleichung sechsten Grades, die Gruppe dieser Gleichung ist von der 360sten Ordnung. Wir wollen nun die den Wurzeln dieser Gleichung entsprechende Riemann'sche Fläche mit dem Symbol R_6 bezeichnen. Diese Fläche gehört zum nullten Geschlecht. Nachdem wir nun im Polygon F_{360} — Fig. 1 — den Collineationen (6) entsprechende Vierecke vermerkt haben, erhalten wir eine Fläche $OABCDEFGHK0$, welche wir mit dem Symbol F_6 bezeichnen. Genannte Fäche ist für die Fläche R_6 von derselben Bedeutung, welche das Polygon F_{360} für die Fläche R_{360} hat. Die äquivalenten Seiten des Polygons F_6 sind:

$$OA \text{ und } OK, \quad AB \text{ und } CB, \quad CE \text{ und } KG, \quad EF \text{ und } GF.$$

Deformiren wir das Polygon F_6 im Raume dergestalt, dass die äquivalenten Seiten desselben aneinanderstossen, so erhalten wir im Resultate eine geschlossene Fläche des Geschlechtes 0, welch' Erstere in sechs weisse und ebensoviele schwarze Dreiecke getheilt ist. Dieser

Fläche kann die Form einer Sphäre gegeben werden. Endlich liefert uns die stereographische Projection in der Sphäre dieser Ebene eine solche Lage der einzelnen Gebiete, wie sie in Fig. 2 dargestellt ist. Zur grösseren Uebersicht sind die entsprechenden Punkte in Fig. 1 und 2 mit gleichen Buchstaben bezeichnet. Fig. 2 ist eine Abbildung der Riemann'schen Fläche R_6.

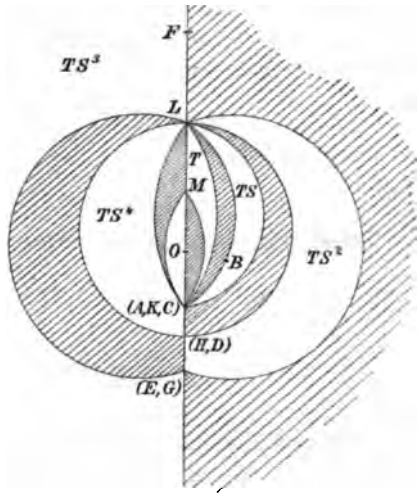


Fig. 2.

Eine genauere Betrachtung dieser Figur zeigt uns, dass die Blätter in der Fläche R_6 unter einander in folgender Weise verbunden sind:

1. Bei $x = \infty$ sind fünf Blätter durch einen fünffachen Punkt (L) mit einander verbunden und nur ein einziges läuft isolirt.

2. Bei $x = 0$ sind vier Blätter mit einander durch den vierfachen Punkt (A, K, C), die übrigen zwei Blätter durch einen zweifachen Windungspunkt (E, G) verbunden.

3. Bei $x = 1$ sind je zwei Paar Blätter mit einander in zwei Windungspunkten verbunden und die übrigen zwei besonders gelagert.

Hieraus folgt die nachstehende Form für die Gleichung, welcher die Grössen (26) genügen:

$$(27)\qquad (a\omega+b)^4(c\omega+d)^2 : (e\omega^2+f\omega+g)^2(h\omega^2+k\omega+l) : (m\omega+n)^5(p\omega+q) = x : (x-1) : 1.$$

Bei entsprechender Wahl der Constanten $\varkappa$ in der Formel (24) können wir es so einrichten, dass $a = b$ wird. Nach Bestimmung der Coefficienten der Gleichung*) (27) und nach Einführung dieser Grössen in dieselbe Gleichung finden wir:

$$(28)\qquad (\omega+1)^4\left(\omega+\frac{11\pm 3\sqrt{15}\,i}{2}\right)^2 : \left(\omega^2+\frac{35\pm 9\sqrt{15}\,i}{10}\,\omega-\frac{11\pm 3\sqrt{15}\,i}{10}\right)^2\left(\omega^2+\frac{40\pm 6\sqrt{15}\,i}{5}\,\omega+25\right) : \pm 2^8 3^4 5^{-3}\sqrt{15}\,i\,\omega = x : (x-1) : 1^{**}).$$

*) Diese Coefficienten sind nach einer bereits von Klein angewandten Methode berechnet; vergl. S. 745 u. 751 der „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen" Bd. I.

**) Diese Gleichung kommt der von Prof. Fricke S. 56, V. Bd. des „Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung" fast gleich.

Diese Gleichung sechsten Grades entspricht einer Substitutionsgruppe 360ster Ordnung. Wurzeln derselben Gleichung sind rationelle Functionen der Integralquotienten der Gleichung (20).

Aus den Formeln (24) und (16) folgt, dass die Wurzeln der Gleichung (28) sich wie folgt darstellen lassen:

$$\omega = \varkappa c_0 c_1^2 x^{-1}(x-1)^{-2} f^6(y_1, y_2, y_3). \tag{29}$$

Gesetzt, dass:

$$c_1\sqrt{\varkappa c_0}\, f^3(y_1, y_2, y_3) = z, \tag{30}$$

so finden wir, dass z die Wurzel der Gleichung

$$\left\{z^2 + x(x-1)^2\right\}^2 \left\{z^2 + \frac{11 \pm 3\sqrt{15}\, i}{2}\, x(x-1)^2\right\} = 2^4 3^{\frac{9}{4}} 5^{-\frac{5}{4}} e^{\pm\frac{\pi i}{4}} x^3 (x-1)^5 z. \tag{31}$$

ist.

Diese Gleichung sechsten Grades entspricht ebenfalls einer Gruppe der 360sten Ordnung und sie ist durch Integrale der Differentialresolvente (20) lösbar.

Die Form $f(y_1, y_2, y_3)$ selbst dient als Integral einer gewissen linearen Differentialgleichung sechster Ordnung. Deshalb lässt sich aus der Formel (30) die Folgerung ziehen, dass das cubische Radical der Wurzel der Gleichung (31) ein Integral einer linearen Differentialgleichung sechster Ordnung ist.

Moskau im März 1898.

Sur les faisceaux de formes binaires cubiques, pour lesquels on donne une forme du faisceau syzygétique déterminé par la jacobienne.

Par

Luigi Berzolari à Turin.

(Lettre adressée à M. Oskar Bolza, à Chicago).

La lecture de Votre intéressant travail: *Die cubische Involution und die Dreitheilung und Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen*, imprimé dans le dernier cahier des *Mathem. Annalen* (Bd. 50, pag. 68), m' a suggéré quelques simples remarques relativement au problème: *trouver toutes les involutions cubiques, dont on donne les éléments de diramation*, dont Vous avez donné une solution transcendante (par les fonctions elliptiques) dans le § 2, et puis une autre solution analytico-géométrique dans une note au § 6 (pag. 89—90) On peut résoudre la même question par un procédé purement algébrique, qui se prête même aussi à la solution d'un problème un peu plus général que celui proposé.

En conservant toutes les notations de Votre travail, soit

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \tag{1}$$

un faisceau de formes binaires cubiques. En désignant par des indices les *Ueberschiebungen*, posons

$$\vartheta = (f_1, f_2)_1, \qquad J = (f_1, f_2)_3,$$
$$H_\vartheta = (\vartheta, \vartheta)_2, \quad i_\vartheta = (\vartheta, \vartheta)_4, \quad j_\vartheta = (\vartheta, H)_4,$$

en sorte que l'on aura, comme on sait,

$$J^2 = 6 i_\vartheta. \tag{2}$$

La condition pour que les deux éléments x et y appartiennent à une même forme du faisceau (1) est

$$6\vartheta_x^2 \vartheta_y^2 + J(xy)^2 = 0,$$

en sorte que le faisceau résulte parfaitement déterminé quand on connait le rapport $\vartheta : J$. Il contient en outre quatre formes douées d'un élément double: les quatre *éléments doubles* sont les racines de la jacobienne ϑ, tandis que les quatre *éléments de diramation* sont les racines du covariant

$$J\vartheta + 3H_\vartheta, \tag{3}$$

qui appartient au faisceau syzygétique déterminé par ϑ.

Cela rappelé, supposons donnée une forme particulière F de ce faisceau syzygétique, de manière que, en désignant par λ et μ deux nombres donnés, on doive avoir identiquement

$$\lambda J\vartheta + \mu H_\vartheta - F = 0, \tag{4}$$

et proposons-nous de trouver tous les faisceaux (1), qui satisfont à cette condition.

En posant

$$\varphi = \frac{\vartheta}{J},$$

on aura

$$H_\vartheta = J^2 H_\varphi, \qquad i_\vartheta = J^2 i_\varphi,$$

et, d'après des formules connues de la théorie des formes biquadratiques et en appliquant la relation (2),

$$(\varphi, H_\varphi)_2 = \frac{1}{36}\varphi, \qquad (H_\varphi, H_\varphi)_4 = \frac{1}{216}.$$

En posant

$$P = \lambda J^2\varphi + \mu J^2 H_\varphi - F, \tag{5}$$

l'identité (4) devient $P = 0$, de laquelle on déduit que l'on doit avoir identiquement $(P, \varphi)_2 = 0$, c'est-à-dire

$$\lambda J^2 H_\varphi + \frac{1}{36}\mu J^2\varphi - (F, \varphi)_2 = 0.$$

En éliminant H_φ entre celle-ci et $P = 0$, on a l'identité

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{36}\mu^2\right) J^2\varphi + \mu(F, \varphi)_2 - \lambda F = 0, \tag{6}$$

qui, étant *linéaire* par rapport aux coefficients de la forme inconnue φ, permet de déterminer φ comme fonction rationnelle de J^2. On pourrait déduire de (6) la valeur de φ sous la forme d'un déterminant, et ensuite, d'après un calcul un peu prolixe, l'exprimer au moyen de F et de J^2. Mais on arrive bien plus vite au but en remarquant que la forme φ définie par (6) doit appartenir au faisceau syzygétique déterminé par la forme donnée F. Posons donc

$$\varphi = aF + bH_F,$$

a et b étant deux constantes que nous déterminerons. En substituant cette expression dans (6) et en annulant les coefficients de F et de H_F, on trouve la formule cherchée

$$\varphi = \lambda \frac{\left(\lambda^2 - \frac{1}{36}\mu^2\right) J^2 F - \mu H_F}{\left(\lambda^2 - \frac{1}{36}\mu^2\right)^2 J^4 - \frac{1}{6}\mu^2 i_F}. \tag{7}$$

Maintenant on n'a plus qu'à déterminer J^2. De la relation (5) on tire

$$\lambda J^2 (P, \varphi)_4 - \mu J^2 (P H_\varphi)_4 - (P, F)_4$$
$$= [\lambda^2 (\varphi, \varphi)_4 - \mu^2 (H_\varphi, H_\varphi)_4] J^4 - 2\lambda J^2 (F, \varphi)_4 + (F, F)_4,$$

de laquelle et de $P = 0$ il s'ensuit

$$\left(\lambda^2 - \tfrac{1}{36}\mu^2\right) J^4 - 12\lambda J^2 (F, \varphi)_4 + 6 i_F = 0.$$

En remplaçant $(F, \varphi)_4$ par l'expression que l'on déduit de (7), on obtient l'équation cherchée, à savoir

$$\left(\lambda^2 - \tfrac{1}{36}\mu^2\right)^3 J^8 - \left(6\lambda^2 + \tfrac{1}{3}\mu^2\right)\left(\lambda^2 - \tfrac{1}{36}\mu^2\right) i_F J^4 + 12\lambda^2 \mu j_F J^2 - \mu^2 i_F^2 = 0. \tag{8}$$

On peut donc énoncer le théorème:

Il y a, en général, quatre faisceaux de formes binaires cubiques, pour lesquels une forme particulière $\lambda J\mathfrak{H} + \mu H_{\mathfrak{H}}$ du faisceau syzygétique déterminé par la jacobienne $\mathfrak{H}$ coïncide avec une forme donnée F. Les quatre valeurs du rapport $\mathfrak{H} : J$ sont fournies par (7), *en y substituant au lieu de J^2 les racines de l'équation* (8).

Dans le cas que Vous avez considéré, où la forme proposée est (3), on a $\lambda = 1$, $\mu = 3$; par conséquent *les faisceaux ayant des éléments de diramation donnés sont fournis par la formule*

$$\varphi = \frac{4(J^2 F - 4 H_F)}{3 J^4 - 8 i_F}, \tag{9}$$

en substituant à J^2 les racines de l'équation

$$3J^8 - 48 i_F J^4 + 256 j_F J^2 - 64 i_F^2 = 0.$$

Si l'on pose

$$J^2 = -8p, \quad i_F = 2g_2, \quad j_F = 6g_3,$$

celle-ci coïncide avec l'équation (18) de Votre travail, de laquelle dépend la trisection des périodes de la fonction $\wp u$ de Weierstrass,

tandis que par les mêmes substitutions on déduit la formule (9) en divisant membre à membre les relations (19) et (20) que Vous avez trouvées pour la solution du problème actuel.

En revenant au cas général, où λ et μ ont des valeurs quelconques, on ne peut appliquer entièrement la méthode exposée quand la forme donnée F doit être la hessienne H_φ de la jacobienne du faisceau (1): alors, en effet, tant λ que (on le voit aisément) le dénominateur de la fraction que l'on a dans le second membre de (7), s'évanouissent, et la formule (7) perd tout significat. Dans ce cas, comme il doit être identiquement

$$J^2 H_\varphi - F = 0, \tag{10}$$

on en déduit, comme plus haut,

$$J^2\varphi - 36(F, \varphi)_2 = 0,$$

laquelle, étant linéaire et *homogène* par rapport aux coefficients de φ, nous donne φ à un facteur constant près. Si l'on pose de nouveau

$$\varphi = aF + bH_F,$$

et si l'on fait la substitution, on déduit

$$aJ^2 - 6bi_F = 0, \quad 36a - bJ^2 = 0,$$

d'où

$$J^4 = 216\, i_F, \tag{11}$$

$$a : b = 6i_F : J^2 = J^2 : 36.$$

On aura donc

$$\varphi = mJ^2F + 36mH_F, \tag{12}$$

m désignant une constante à déterminer. On la détermine en remarquant que de (12) et de la relation connue

$$(H_F, H_F)_2 = \tfrac{1}{3} j_F F - \tfrac{1}{6} i_F H_F,$$

il vient

$$H_\varphi = 12\, m^2 (i_F J^2 + 36 j_F) F;$$

en sorte que, d'après les relations (10) et (11), on obtient enfin

$$\varphi = \pm \frac{\pm\sqrt{6i_F}F + 6H_F}{6\sqrt{2}\sqrt{i_F^2 \pm j_F\sqrt{6i_F}}}, \tag{13}$$

où, dans les termes de la fraction du second membre, se correspondent entre eux les signes supérieurs et les signes inférieurs.

La formule (13) *donne la solution explicite du problème de trouver les quatre faisceaux de formes binaires cubiques, pour lesquels la hessienne de la jacobienne est une forme biquadratique donnée* F.

Permettez-moi encore une remarque. Le dénominateur de (7), considéré comme fonction du paramètre J^2, s'annule pour les deux valeurs

$$J^2 = \pm \frac{\mu}{\lambda^2 - \frac{1}{36}\mu^2} \sqrt{\frac{1}{6} i_F}.$$

Les deux formes binaires biquadratiques, que l'on obtient du numérateur de (7) *en y remplaçant* J^2 *par ces valeurs, sont, quels que soient* λ *et* μ, *le couple de formes qui, dans le faisceau syzygétique déterminé par la forme donnée* F, *sont en même temps séparées harmoniquement par* F *et par sa hessienne, et apolaires entre elles.*

Turin, le 21 mars 1898.

Zur Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung auf elliptische mittels einer Transformation dritten Grades.

Nachtrag.

Von

Oskar Bolza in Chicago.

In meiner unter obigem Titel im 50. Bande dieser Annalen erschienenen Arbeit habe ich auf pag. 316 den Satz bewiesen: „Deutet man die sechs Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ geometrisch durch sechs Punkte eines Kegelschnitts, so besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines zur Irrationalität

$$\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)}$$

gehörigen, durch eine Transformation dritten Grades auf ein elliptisches Integral reducirbaren Integrals erster Gattung darin, dass es einen Kegelschnitt giebt, welcher durch drei der Punkte (z. B. $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$) hindurchgeht, und gleichzeitig dem Dreieck der drei übrigen ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) eingeschrieben ist; es giebt dann allemal auch einen zweiten Kegelschnitt, der dem Dreieck $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ umgeschrieben und dem Dreieck $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ eingeschrieben ist.“

Herr G. Humbert hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass er diesen Satz bereits in seiner Arbeit: *Sur les surfaces de Kummer elliptiques**) bewiesen hat.

Indem ich dies hiermit nachtrage, möchte ich noch einige auf den allgemeinen Fall der Reduction bezügliche Bemerkungen an die Arbeit von Herrn Humbert knüpfen.

Die Jacobi'sche Methode**) liefert bekanntlich für die Reducirbarkeit des Integrals

$$(1) \qquad \int \frac{(x-\delta)\,dx}{\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)}}$$

*) American Journal of Mathematics. Vol. XVI, pag. 238, (1894).

**) Fundamenta nova, Art. 4.

auf ein elliptisches mittels einer Transformation n^{ten} Grades

$$y = \frac{U}{V} \tag{2}$$

als nothwendige und hinreichende Bedingungen ein Gleichungssystem von der Form

$$\begin{aligned} U - \lambda_0 V &= R_0 T_0^2, \\ U - \lambda_1 V &= R_1 T_1^2, \\ U - \lambda_2 V &= R_2 T_2^2, \\ U - \lambda_3 V &= R_3 T_3^2, \end{aligned} \tag{3}$$

wo die R_i, T_i, Polynome in x sind und

$$R_0 R_1 R_2 R_3 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6) = R. \tag{4}$$

Für ein ungerades n ergiebt sich hieraus nur *eine* Art der Zerlegung von R, nämlich in einer cubischen und drei lineare Factoren.

Für *gerades* n dagegen sind zunächst *drei Zerlegungsarten* möglich entsprechend den Gleichungen

$$6 = 6 + 0 + 0, \quad 6 = 4 + 2 + 0 + 0, \quad 6 = 2 + 2 + 2 + 0. \tag{5}$$

Andererseits ist nun Herr Humbert durch Studium der zu dem hyperelliptischen Gebilde gehörigen Kummer'schen Fläche auf dasselbe Gleichungssystem (3) geführt worden, mit dem Unterschied jedoch, dass für gerades n nur die letzte der drei Zerlegungen (5) auftritt.

Der scheinbare Widerspruch löst sich folgendermassen: Wir wollen die obige Reduction n^{ten} Grades *zerlegbar* nennen, wenn es möglich ist, sie zusammenzusetzen aus einer Reduction niedrigeren Grades auf ein elliptisches Integral und aus einer Transformation dieses elliptischen Integrals, *unzerlegbar* dagegen, wenn dies nicht möglich ist; ist ein Integral überhaupt reducirbar, so ist es auch durch eine unzerlegbare Transformation reducirbar.

Bezeichnen nun $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$, $2\omega_4$ ein System von primitiven Perioden des reducirbaren Integrals, 2Ω, $2\Omega'$ ein Paar primitiver Perioden des elliptischen Integrals, so hat man bekanntlich ein System von Gleichungen

$$\omega_\lambda = a_\lambda \Omega + b_\lambda \Omega' \qquad (\lambda = 1, 2, 3, 4)$$

wobei a_λ, b_λ ganze Zahlen sind. Das Criterium für die Unzerlegbarkeit der Reduction besteht dann, wie leicht zu zeigen, darin, dass der grösste gemeinsame Theiler der Determinanten

$$a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda$$

gleich 1 ist. Gerade diese letztere Voraussetzung wird aber bei dem Weierstrass-Picard'schen Satze, welchen Herr Humbert seinen Untersuchungen zu Grunde legt, ausdrücklich gemacht (vgl. Herrn Poincaré's Beweis des Satzes, Americ. Journ. of Math. Vol. VIII, pag. 293).

Betrachten wir jetzt andererseits den Jacobi'schen Ansatz (3) unter der Annahme eines geraden n für eine der beiden ersten Zerlegungen (5), nehmen also z. B. $R_2 = 1$, $R_3 = 1$ an, so folgen durch Elimination von U uad V zwei Gleichungen

$$\beta_0^2 T_2^2 - \gamma_0^2 T_3^2 = R_0 T_0^2,$$
$$\beta_1^2 T_2^2 - \gamma_1^2 T_3^2 = R_1 T_1^2$$

wobei: $R_0 R_1 = R$. Da nun aber nach Voraussetzung U und V keinen gemeinsamen Theiler haben, so gilt dasselbe auch für T_2, T_3 und weiterhin $\beta_0 T_2 - \gamma_0 T_3$, $\beta_0 T_2 + \gamma_0 T_3$. Daraus ergiebt sich aber durch Wiederholung des Jacobi'schen Schlusses ein System von Gleichungen von der Form

$$\beta_0 T_2 - \gamma_0 T_3 = R_0' T_0'^2,$$
$$\beta_0 T_2 + \gamma_0 T_3 = R_0'' T_0''^2,$$

wobei:

$$R_0' R_0'' = R_0, \quad T_0' T_0'' = T_0;$$

ebenso

$$\beta_1 T_2 - \gamma_1 T_3 = R_1' T_1'^2,$$
$$\beta_1 T_2 + \gamma_1 T_3 = R_1'' T_1''^2,$$

wobei:

$$R_1' R_1'' = R_1, \quad T_1' T_1'' = T_1.$$

Diese Gleichungen, zusammen mit der Identität

$$x - \delta = \text{Const.} \frac{V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}}{T_0 T_1 T_2 T_3} = \text{Const.} \frac{T_3\frac{dT_2}{dx} - T_2\frac{dT_3}{dx}}{T_0' T_1' T_2' T_3'}$$

sagen aber aus, dass *die Reduction* (2) *unseres Integrals* (1) *sich zerlegt in eine Reduction vom Grade* $\frac{n}{2}$ *und eine Transformation zweiten Grades des elliptischen Integrals.* Hat man es also mit einer unzerlegbaren Reduction zu thun, so sind in der That die beiden ersten Zerlegungen (5) auszuschliessen, und es bleibt, in Uebereinstimmung mit Herrn Humbert nur die dritte:

$$6 = 2 + 2 + 2 + 0$$

übrig.

Freiburg i. B., den 3. Juni 1898.

Ueber die Theorie der symmetrischen S-Functionen mit einem einfachen Nebenpunkte.

(Mit einer Figurentafel.)

Von

Friedrich Schilling in Karlsruhe i. B.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 482
§ 1. Das specielle Beispiel $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 1$ 485
§ 2. Analytische Definition der S-Functionen mit einfachem Nebenpunkt . 489
§ 3. Allgemeine Eigenschaften der S-Functionen mit einfachem Nebenpunkt 491
§ 4. Der specielle Fall $\lambda = \mu = \nu = 0$ 493
§ 5. Die „symmetrischen" S-Functionen mit einfachem Nebenpunkt . . . 495
§ 6. Die drei Methoden zur Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt 498
§ 7. Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und reellen Winkeln nach der *ersten* Methode 500
§ 8. Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und reellen Winkeln nach der *zweiten* Methode 502
§ 9. Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt, zwei reellen und einem rein imaginären oder einem reellen und zwei rein imaginären Winkeln 506
§ 10. Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und drei rein imaginären Winkeln 508
§ 11. Existenzsätze der allgemeinen Function $S(x, \alpha)$ im Hauptfalle. . . . 510
§ 12. Die symmetrischen S-Functionen und ihre Kreisbogendreiecke. . . . 512
§ 13. Das Verhalten der symmetrischen S-Functionen beim Uebergang zum zweiten Grenzdreieck 515
§ 14. Ueberblick über alle Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt für beliebig vorgegebene Exponenten λ, μ, ν 518

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit möchte ich den Hauptinhalt der Untersuchungen wiedergeben, die ich in meiner Habilitationsschrift: „*Geometrisch-analytische Theorie der symmetrischen S-Functionen mit einem einfachen Nebenpunkt*“*) veröffentlicht habe, wegen der Einzelheiten der analytischen oder geometrischen Ableitungen sei dagegen auf diese ausführliche Darstellung verwiesen.

*Unter einem gewöhnlichen Kreisbogendreieck verstehen wir einen einfach zusammenhängenden Bereich in einer Ebene oder auf einer Kugel, der, allgemein zu reden, von drei ein Dreieck bildenden Kreisbogen begrenzt wird und in seinem Innern keinen Verzweigungspunkt und auf seinem Rande mit Ausnahme der Ecken keinen Windungspunkt***) enthält.* Es sei ein specielles Kreisbogendreieck mit den Ecken a_1, b_1, c_1 und den Winkeln $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ gegeben (Fig. 1). Die Ecken sollen bei positivem Umlaufen in der Reihenfolge c_1, b_1, a_1 cyklisch auf einander folgen. Wir denken die Kreisbogenseite $c_1 b_1$ über den Eckpunkt b_1 hinaus längs ihres Kreises als Einschnitt in den Bereich

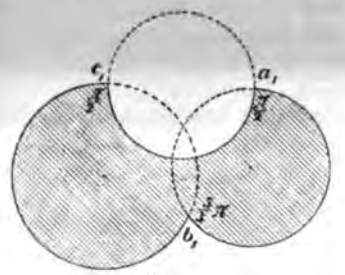


Fig. 1.

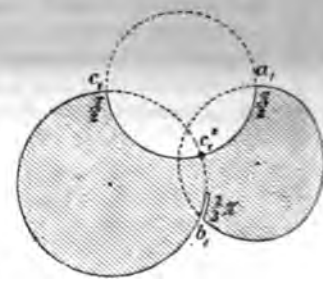


Fig. 2.

hinein fortgesetzt. Den so entstehenden neuen Bereich stellt die Fig. 2 dar, in der wir der besseren Uebersicht wegen die beiden Ufer des Einschnittes etwas von einander getrennt gezeichnet haben. Der Bereich besitzt in den Ecken a_1, b_1, c_1 bez. die Winkel $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$. Der Endpunkt d_1 des Einschnittes soll als „einfacher Knotenpunkt“ bezeichnet werden. Unser Bereich ist gleichfalls von Bogen nur dreier Kreise begrenzt; wir nennen ihn ein „Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt“.

*) Nova Acta Leopoldina, Halle a./S. 1897, Bd. 71, pag. 207—300. Diese Arbeit soll in der Folge kurz als „Habilitationsschrift“ citirt werden.

**) Unter einem Windungspunkte auf dem Rande eines Kreisbogenpolygons verstehe ich allgemein den Scheitel eines Winkels, der entweder von π verschieden ist oder aber, falls er gleich π ist, von zwei sich berührenden Kreisbogen gebildet wird.

Aus diesem Beispiel schöpfen wir folgende allgemeine Definitionen:

Ein Punkt auf dem Rande eines von Kreisbogen begrenzten Bereiches ist stets dann und nur dann als ein „einfacher Knotenpunkt" zu bezeichnen, wenn die in d_1 zusammenlaufenden Kreisbogen der Begrenzung **demselben** *Kreise angehören und den Winkel 2π mit einander bilden.*

*Allgemein gesprochen verstehen wir unter einem „Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt" einen einfach zusammenhängenden Bereich, der von Bogen dreier Kreise begrenzt wird und in seinem Innern keinen Verzweigungspunkt, auf seinem Rande mit Ausnahme eines einfachen Knotenpunktes d_1 und dreier Ecken a_1, b_1, c_1 mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ keinen Windungspunkt besitzt**).

Wir wollen die auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegene Halbebene eines Argumentes z kurz als die „Halbebene P" bezeichnen. Die Aufgabe, die Halbebene P (Fig. 3) so auf die Fläche eines gewöhnlichen Kreisbogendreiecks mit den Winkeln $\lambda_0\pi$, $\mu_0\pi$, $\nu_0\pi$ abzubilden, dass die Ecken des letzteren bez. dreien auf der Begrenzung der Halbebene P gelegenen „singulären Punkten a, b, c" entsprechen, wird bekanntlich durch die Schwarz'sche s-Function gelöst. Dieselbe lässt sich definiren als Particularlösung der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung:

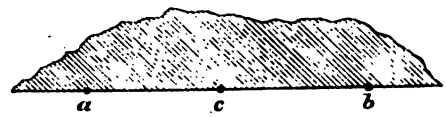


Fig. 3.

$$(1)\qquad \frac{\frac{d^3s}{dz^3}}{\frac{ds}{dz}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2s}{dz^2}}{\frac{ds}{dz}}\right)^2 = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} \cdot \left[\frac{1-\lambda_0^2}{2}\cdot\frac{(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{1-\mu_0^2}{2}\cdot\frac{(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{1-\nu_0^2}{2}\cdot\frac{(c-a)(c-b)}{z-c}\right].$$

Die Grössen λ_0, μ_0, ν_0 nennen wir die den singulären Punkten a, b, c zugehörigen „Exponenten".

Es soll die Aufgabe dieser Arbeit sein, *diejenigen „symmetrischen S-Functionen" näher zu studiren, deren jede die Halbebene P so auf die Fläche eines Kreisbogendreiecks mit einfachem Knotenpunkt und den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ abbildet, dass den singulären Punkten a, b, c der Halbebene P die Ecken a_1, b_1, c_1 des Kreisbogendreiecks entsprechen.* Der Knotenpunkt d_1 stellt das Abbild eines gleichfalls auf der Axe des Reellen gelegenen vierten singulären Punktes d dar. Letzteren bezeichnen wir als „*einfachen Nebenpunkt*". Der zu ihm gehörende

*) Ist ein Winkel des Kreisbogendreiecks rein imaginär, so ist die ihm entsprechende Ecke verloren gegangen und an ihre Stelle ein sich unendlich oft zwischen den zwei betreffenden Kreisbogen der Begrenzung windendes Kreisband getreten.

Exponent ist gleich 2 entsprechend dem Winkel 2π des Bereiches im Punkte d_1.

In seiner Arbeit „Ueber einige Abbildungsaufgaben“*) hat Herr H. A. Schwarz die allgemeine Aufgabe behandelt, die Fläche einer Halbebene auf die Fläche einer von Kreisbogen begrenzten Figur abzubilden. Nach dem allgemeinen, daselbst abgeleiteten Resultate muss die dies leistende Function $S(z)$ einer Differentialgleichung der folgenden Form genügen:

$$\frac{S'''}{S''} - \frac{3}{2}\left(\frac{S''}{S'}\right)^2 = R(z), \tag{2}$$

wo $R(z)$ eine noch zu bestimmende rationale Function von z bezeichnet. In der genannten Arbeit des Herrn H. A. Schwarz sind bereits alle Mittel angegeben, die Function $R(z)$ zu berechnen. Es geschieht dies mit Hülfe der Reihenentwickelungen der S-Function in der Nähe der singulären Punkte. Man findet, wie wir nicht näher ausführen wollen:

$$R(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)} \cdot \left[\frac{1-\lambda^2}{2}\frac{(a-b)(a-c)(a-d)}{z-a} + \frac{1-\mu^2}{2}\frac{(b-c)(b-a)(b-d)}{z-b} + \frac{1-\nu^2}{2}\frac{(c-a)(c-b)(c-d)}{z-c} - \frac{3}{2}\frac{(d-a)(d-b)(d-c)}{z-d} + A\right]. \tag{2'}$$

Die von z unabhängige reelle Grösse A, der accessorische Parameter, ist eine Function des Nebenpunktes d, die im § 2 bestimmt wird.

Wenn wir im Beispiel unserer Fig. 2 den Einschnitt in den Bereich längs des zugehörigen Kreises weiter und weiter fortsetzen, so wird schliesslich der Knotenpunkt d_1 die Seite $a_1 c_1$ im Punkte c_1^* erreichen (Fig. 4). In diesem Augenblicke zerfällt der Bereich in ein Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt $a_1 b_1 c_1^*$ mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{\pi}{2}$, *das zweite Grenzdreieck*, und in ein Zweieck $c_1 c_1^*$ mit zwei gleichen Winkeln $\frac{\pi}{2}$.

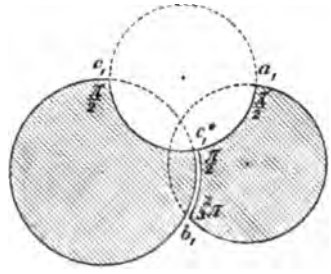


Fig. 4.

Was wird bei diesem Grenzübergang aus unserer abbildenden Function S, die wir als Function von z und d aufzufassen haben? Es liegt zunächst nahe zu vermuthen, dass sie in der Grenze ihren Sinn verliere. Doch dies trifft keineswegs zu. Anstatt indess die betreffenden allgemeinen Resultate meiner Arbeit bereits hier anzuführen, ziehe ich es vor, um

*) Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 70 (1869), p. 105—120; Ges. Abhandlungen Bd. II, p. 78, Berlin 1890.

sogleich eine Vorstellung von dem Verhalten der S-Functionen bei dem erwähnten Grenzübergang zu gewähren, im ersten Paragraphen ein einfaches Beispiel zu behandeln.

Gerade wegen der bei diesem Grenzübergang hervortretenden besonderen Eigenschaft dürften es die S-Functionen verdienen, dass ihnen neben dem Interesse, das die neuen Functionen als solche erwecken, in noch höherem Masse Aufmerksamkeit geschenkt wird.

§ 1.

Das specielle Beispiel $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 1$.

Man versehe die schlichte Ebene der complexen Variabeln S längs der Axe des Reellen vom Punkte $d_1 = -\varrho$, wo ϱ den Ungleichungen $0 < \varrho < \infty$ genügen möge, bis nach $+\infty$ mit einem Einschnitt. Der so entstandene Bereich (Fig. 5) sei als specieller Fall eines Kreisbogendreiecks mit einfachem Knotenpunkt angesehen, und zwar mögen als Ecken der Punkt $b_1 = \infty$ und die auf dem positiven Ufer des Einschnittes liegenden Punkte $a_1 = 0$, $c_1 = 1$, ferner als Knotenpunkt der Punkt d_1 gelten. Den Winkeln an den Ecken a_1, b_1, c_1 entsprechend sind die Exponenten λ, μ, ν bez. gleich 1, 2, 1.

(S)-Ebene

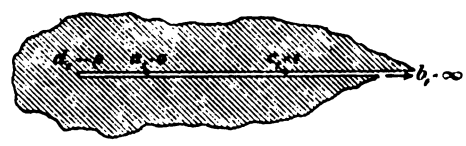


Fig. 5.

Wir stellen uns die Aufgabe, die auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegene Halbebene (x) (Fig. 6), die wir in der Folge kurz als Halbebene $\mathfrak{P}$ bezeichnen wollen, so auf diesen Bereich abzubilden, dass die Ecken a_1, b_1, c_1 bez. den Punkten $a = 0$, $b = \infty$, $c = 1$ auf der Begrenzung der Halbebene (x) entsprechen. Da die Abbildung auch in der Umgebung der Punkte 0 und 1 eine conforme ist, so besitzen letztere nicht mehr singulären Charakter; doch ist unserem Zwecke diese Eigenart des ausgewählten Beispiels nicht nachtheilig.

Halbebene $\mathfrak{P}$ der (x)-Ebene.

Fig. 6.

Die abbildende Function $S(x)$ wird durch die Formel gegeben:

$$S = [(\sqrt{1+\varrho} - \sqrt{\varrho})x + \sqrt{\varrho}]^2 - \varrho, \tag{3}$$

die inverse Function durch die Formel:

$$x = \frac{\sqrt{S+\varrho} - \sqrt{\varrho}}{\sqrt{1+\varrho} - \sqrt{\varrho}}. \tag{4}$$

Den Wurzeln $\sqrt{\varrho}$ und $\sqrt{1+\varrho}$ ist das positive Vorzeichen zu geben. $\sqrt{S+\varrho}$ in der letzten Formel hat für alle Punkte des Bereiches der Fig. 5 eine nicht negative *zweite* Coordinate und für die Punkte seiner auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegenen Halbebene eine nicht negative, für die Punkte seiner auf der negativen Seite der Axe des Reellen gelegenen Halbebene eine nicht positive *erste* Coordinate.

I. Es möge jetzt der Einschnitt des Kreisbogendreiecks der Fig. 5 sich mehr und mehr zusammenziehen, bis schliesslich der Knotenpunkt d_1 mit der Ecke a_1 zusammenfällt.

Dementsprechend ergiebt sich:

$$\lim_{\varrho=0} S = s_1 = x^2. \tag{3'}$$

Das Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt ist ohne irgend welche Singularität in ein solches ohne Knotenpunkt übergegangen; dasselbe besitzt die Exponenten $\lambda_1 = \lambda + 1 = 2$, $\mu_1 = \mu = 2$, $\nu_1 = \nu = 1$ *und sei als erstes Grenzdreieck bezeichnet. Entsprechend wird die abbildende Function* $s_1 = x^2$, *d. h. diejenige s-Function, welche die Halbebene* $\mathfrak{P}$ *in der bestimmten Weise auf das erste Grenzdreieck abbildet.*

II. Der Einschnitt möge sich längs der Axe des Reellen in den Bereich hinein weiter und weiter fortsetzen, bis schliesslich der Knotenpunkt d_1 die Ecke b_1 erreicht, d. h. ϱ möge ∞ werden. In diesem Augenblick ist unser ursprünglicher Bereich in das Kreisbogendreieck $a_1 b_1 c_1$ ohne Knotenpunkt mit den Exponenten $\lambda_2 = \lambda = 1$, $\mu_2 = \mu - 1 = 1$, $\nu_2 = \nu = 1$ (d. h. in die auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegene Halbebene) und in die auf der negativen Seite der Axe des Reellen gelegene Halbebene zerfallen. Es ergiebt sich für endliche Werthe x:

$$\lim_{\varrho=\infty} S = \lim_{\varrho=\infty} \frac{\left[\left(\sqrt{\frac{1}{\varrho}+1}-1\right)x+1\right]^2-1}{\frac{1}{\varrho}} = x. \tag{3''}$$

Lässt man ferner erst x und dann ϱ unendlich werden oder umgekehrt, so wird S entschieden unendlich. Dagegen lässt sich kein bestimmter Grenzwerth S angeben, wenn man x und ϱ *gleichzeitig* gegen ∞ convergiren lässt.

Noch klarer gestattet der entsprechende Grenzübergang in der Formel (4) diese Verhältnisse zu überblicken. Uns interessiren allein diejenigen Werthe, die S innerhalb des Bereiches der Figur 5 annehmen kann. Wir wissen, für die Punkte S auf der positiven Seite der Axe des Reellen ist dem reellen Bestandtheile des Ausdrucks $\sqrt{\frac{S}{\varrho}+1}$ das positive Vorzeichen zu geben. Für sie wird daher:

$$(4') \qquad \lim_{\varrho=\infty} x = \lim_{\varrho=\infty} \frac{\sqrt{\frac{S}{\varrho}+1}-1}{\sqrt{\frac{1}{\varrho}+1}-1} = S.$$

Für die Punkte S auf der negativen Seite der Axe des Reellen ist dem reellen Bestandtheile des Ausdrucks $\sqrt{\frac{S}{\varrho}+1}$ das negative Vorzeichen zu geben. Für sie wird daher:

$$(4'') \qquad \lim_{\varrho=\infty} x = \infty.$$

Das Eigenartige des zweiten Grenzüberganges beruht demnach geometrisch darin, dass die Punkte der negativen Halbebene der Figur 5 *in der Grenze ihr Abbild sämmtlich in demselben Punkte* $x = \infty$ *finden, während die Punkte der positiven Halbebene den gleichwerthigen Punkten der Halbebene* $\mathfrak{P}$ *entsprechen.*

Das in der Grenze bleibende Dreieck $a_1 b_1 c_1$, d. h. die auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegene Halbebene, ist also der allein noch in Betracht kommende Theil des zerfallenden Bereiches der Figur 5. Dementsprechend berücksichtigen wir auch analytisch nur die für endliche Werthe x gefundene Grenzfunction $\lim S = s_2 = x$ und vervollständigen sie durch die *willkürliche* Festsetzung, dass dem Werth $x = \infty$ allein der Werth $S = \infty$ entsprechen soll.

Auch bei dem zweiten Grenzübergang geht das Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt, freilich unter Abschnürung eines Theiles des Bereiches, in ein solches ohne Knotenpunkt, das zweite Grenzdreieck, über, dasselbe besitzt die Exponenten $\lambda_2 = \lambda = 1$, $\mu_2 = \mu - 1 = 1$, $\nu_2 = \nu = 1$. *Die abbildende Function wird* $s_2 = x$, *d. h. diejenige s-Function, welche die Halbebene* $\mathfrak{P}$ *in der bestimmten Weise auf das zweite Grenzdreieck abbildet.*

Dem Knotenpunkt d_1 entspricht der im Intervalle von $-\infty$ bis 0 der Axe des Reellen in der (x)-Ebene gelegene Nebenpunkt:

$$(5) \qquad d = \frac{\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}-\sqrt{1+\varrho}}.$$

Dem Uebergang vom ersten Grenzdreieck zu den Kreisbogendreiecken mit Knotenpunkt bis zum zweiten Grenzdreieck entspricht die continuirliche Wanderung des Nebenpunktes d auf der Axe des Reellen von 0 *bis* $-\infty$.

Die Formel (3) vermittelt also den Uebergang von der Function $s_1 = x^2$ zur Function $s_2 = x$, der abgesehen von der Umgebung des Punktes $x = \infty$ durchaus stetig ist.

In ihrem Gesammtverlauf bildet die Function S die schlichte Ebene des Argumentes x auf die zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit zwei einfachen Verzweigungspunkten an den Stellen d_1 und ∞ ab. *Wird*

ϱ unendlich, so vereinigen sich beide Verzweigungspunkte unter gleichzeitiger Abschnürung des einen Blattes).*

---

*) An die Stelle des Parameters ϱ, der den Ungleichungen $0 \leqq \varrho \leqq +\infty$ genügt, führen wir einen Parameter p ein vermöge der Gleichung:

$$\varrho = \frac{(p-1)^2}{4p}$$

und setzen in Uebereinstimmung mit den für ϱ gültigen Ungleichungen fest, dass p den Ungleichungen $1 \geqq p \geqq 0$ genügen soll. Dann nehmen die Formeln (3) und (5) folgende einfache Gestalten an:

$$S = px^2 - (p-1)x, \tag{3*}$$

$$d = \frac{p-1}{2p}. \tag{5*}$$

Da indess die besonders wichtige Formel (4) durch Einführung von p nicht wesentlich einfacher wird, haben wir im Text von letzterer keinen Gebrauch gemacht.

Die Formel (3*) giebt jedoch Anlass, folgende allgemeinere Function zu betrachten:

$$S_n = px^{n+1} - (p-1)x^n, \tag{3**}$$

woselbst n eine beliebige, positive ganze Zahl sei. Für jeden Werth von p innerhalb des für diese Grösse festgesetzten Intervalles bildet die Function S_n die Halbebene $\mathfrak{P}$ gleichfalls auf ein Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt ab. Letzteres besitzt wieder die Ecken $a_1 = 0$, $b_1 = \infty$, $c_1 = 1$ und die Exponenten $\lambda = n$, $\mu = n+1$, $\nu = 1$. Der zugehörige Nebenpunkt ergiebt sich als Wurzel der Gleichung $\frac{dS_n}{dx} = 0$ durch die Formel:

$$d = \frac{n \,.\, (p-1)}{(n+1) \,.\, p}. \tag{5**}$$

Die Formel (3**) vermittelt in ganz entsprechender Weise wie im Falle $n = 1$ des Textes den Uebergang von der Function $s_{1,n} = x^{n+1}$ zur Function $s_{2,n} = x^n$ dadurch, dass p von 1 bis 0 stetig abnimmt. In ihrem Gesammtverlauf bildet die Function S_n die schlichte Ebene des Argumentes x auf die $(n+1)$-blättrige Riemann'sche Fläche ab, die im Punkte ∞ einen $(n+1)$-fachen, im Punkte 0 einen n-fachen, im Punkte $d_1 = -\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(p-1)^{n+1}}{p^n}$ einen einfachen Verzweigungspunkt besitzt. Wird $p = 1$, so vereinigt sich der einfache Verzweigungspunkt d_1 ohne weitere Singularität mit dem n-fachen Verzweigungspunkte 0 zu dem $(n+1)$-fachen Verzweigungspunkte an der Stelle 0. Wird dagegen $p = 0$, so vereinigt sich der einfache Verzweigungspunkt d_1 *unter gleichzeitiger Abschnürung eines einzelnen Blattes* mit dem $(n+1)$-fachen Verzweigungspunkt ∞, so dass eine n-blättrige Riemann'sche Fläche mit den beiden n-fachen Verzweigungspunkten 0 und ∞ übrig bleibt. *Die Function S_n vermittelt daher, wie wir auch kurz sagen können, den Uebergang von der $(n+1)$-blättrigen Riemann'schen Fläche mit den beiden $(n+1)$fachen Verzweigungspunkten 0 und ∞ zu der n-blättrigen Riemann'schen Fläche mit den beiden n-fachen Verzweigungspunkten 0 und ∞.*

§ 2.

Analytische Definition der S-Functionen mit einfachem Nebenpunkt.

Wir bezeichnen die reellen Theile der in der folgenden Untersuchung auftretenden Grössen λ, μ, ν (mit oder ohne unteren Index) mit λ', μ', ν', ihre imaginären Theile mit $i\lambda''$, $i\mu''$, $i\nu''$. In die vorkommenden Differentialgleichungen treten nur die Quadrate der Grössen λ, μ, ν ein. Dies schafft uns die Berechtigung zur folgenden Festsetzung: Jede der Grössen λ, μ, ν soll (falls sie nicht gleich 0 ist) so gewählt sein, dass, wenn ihre erste Coordinate nicht verschwindet, diese positiv ist, wenn die erste Coordinate aber verschwindet, dann die zweite positiv ist.

Den Ausgangspunkt unserer allgemeinen Untersuchung bildet die gewöhnliche Differentialgleichung 3. Ordnung:

$$\frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2}\left(\frac{S''}{S'}\right)^2 = R(s), \tag{2}$$

wo

$$R(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$\cdot\left[\frac{1-\lambda^2}{2}\cdot\frac{(a-b)(a-c)(a-d)}{s-a} + \frac{1-\mu^2}{2}\cdot\frac{(b-c)(b-a)(b-d)}{s-b}\right.$$
$$\left. + \frac{1-\nu^2}{2}\cdot\frac{(c-a)(c-b)(c-d)}{s-c} - \frac{3}{2}\frac{(d-a)(d-b)(d-c)}{s-d} + A\right]$$

ist. In ihr bezeichnen a, b, c, d die „singulären Punkte", $\lambda, \mu, \nu, 2$ sind die zu ihnen gehörenden, im allgemeinen complexen „Exponenten", A ist der „accessorische Parameter". Wir setzen voraus, dass die Punkte a, b, c, d sämmtlich im Endlichen gelegen sind.

Ferner nehmen wir zunächst an, dass d von a, b, c verschieden ist. Wir machen den für die Umgebung der singulären Stelle d gültigen Ansatz:

$$S = \delta \log(s-d) + (s-d)^{-2} + \delta_1(s-d)^{-1} + \delta_2 + \delta_3(s-d) + \cdots \tag{6}$$

Die Coefficienten δ, δ_1, δ_2, δ_3 ... seien von s unabhängige Grössen. Durch einfache Ausrechnung ergiebt sich zunächst:

$$\frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2}\left(\frac{S''}{S'}\right)^2 = -\frac{3}{2}\frac{1}{(s-d)^2} + \frac{3}{2}\frac{\delta_1}{s-d} - \left(4\delta + \frac{9}{8}\delta_1^2\right) + \cdots,$$

wo in jedes folgende Glied ein neuer Coefficient δ_i linear eintritt. Wir entwickeln auch die rechte Seite der Differentialgleichung (2) nach Potenzen von $(s-d)$ und führen hierbei folgende Abkürzungen ein:

$$\xi = (d-b)(d-c) + (d-c)(d-a) + (d-a)(d-b),$$

$$\eta = \frac{1-\lambda^2}{2}(a-b)(a-c) + \frac{1-\mu^2}{2}(b-c)(b-a) + \frac{1-\nu^2}{2}(c-a)(c-b),$$

$$\eta_2 = \lambda^2(a-b)(a-c)(d-b)(d-c) + \mu^2(b-c)(b-a)(d-c)(d-a) + \nu^2(c-a)(c-b)(d-a)(d-b),$$

$$\zeta = \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

Die Coefficientenvergleichung beider Potenzreihen ergiebt die Gleichung:

$$\delta = -\frac{\zeta^2}{8}\cdot\left\{\left[A-\eta+\frac{1}{2}\xi\right]^2-\eta_2\right\}.$$

Wir verlangen jetzt, dass der Coefficient δ verschwindet, d. h. dass das logarithmische Glied im Ansatz (6) fortfällt. Diese Forderung besagt mit anderen Worten: Der singuläre Punkt d soll nach der Bezeichnungsweise des Herrn Klein ein „einfacher Nebenpunkt" der Differentialgleichung sein.

Dann erhalten wir die folgende Bedingungsgleichung für den accessorischen Parameter A:

$$A = \eta - \frac{1}{2}\xi + \sqrt{\eta_2}. \tag{7}$$

Wir stellen nunmehr folgende Definition auf:

1. *Eine Function des Argumentes z ist eine „S-Function mit einfachem Nebenpunkt", wenn sie für bestimmte Werthe der Grössen $a, b, c, d, \lambda, \mu, \nu$ einer solchen Differentialgleichung* (2) *genügt, deren accessorischer Parameter A die Bedingung* (7) *erfüllt.*

In der ganzen folgenden Untersuchung setzen wir als selbstverständlich voraus, dass der accessorische Parameter A der Differentialgleichung (2) die Bedingung (7) befriedigt.

Der Umstand, dass die Bedingung (7) eine Quadratwurzel enthält, findet seinen Ausdruck in dem Satze:

2. *Für jeden derjenigen beiden Werthe des Nebenpunktes d, für welche η_2 verschwindet, ergiebt sich bei gegebenen Werthen $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ nur eine einzige Differentialgleichung, für jeden anderen Werth des Nebenpunktes d dagegen zwei verschiedene Differentialgleichungen, deren Particularlösungen S-Functionen sind.*

Fällt in der Differentialgleichung (2) d im speciellen Falle mit einem der singulären Punkte, etwa mit a, zusammen, so geht die Gleichung in die folgende über:

$$\frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2}\left(\frac{S''}{S'}\right)^2 = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} \cdot \left\{\frac{1-(\lambda\pm 1)^2}{2}\cdot\frac{(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{1-\mu^2}{2}\cdot\frac{(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{1-\nu^2}{2}\cdot\frac{(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}, \tag{2*}$$

wo auf der rechten Seite, der Wurzel der Bedingung (7) entsprechend, das obere oder das untere Vorzeichen gültig ist.

Wir verstehen unter $\{\lambda - 1\}$ die Grösse $1 - \lambda$, wenn $\lambda' < 1$, $\lambda - 1$, wenn $\lambda' > 1$, $i|\lambda''|$, wenn $\lambda' = 1$ ist. Die Vergleichung der Differentialgleichung (2*) mit der Differentialgleichung (1) ergiebt den Satz:

3. *Ist d mit a zusammengefallen, so definirt die sich ergebende Differentialgleichung* (2*), *je nachdem das obere oder untere Vorzeichen auf ihrer rechten Seite gilt, s-Functionen mit den Exponenten $\lambda + 1$, μ, ν oder s-Functionen mit den Exponenten $\{\lambda - 1\}$, μ, ν. Entsprechendes gilt, wenn d mit b oder c zusammenfällt.*

§ 3.

Allgemeine Eigenschaften der S-Functionen mit einfachem Nebenpunkt.

Ich übergehe es hier alle diejenigen Eigenschaften der S-Functionen zusammenzustellen, die sich leicht aus der Differentialgleichung (2) ergeben und ihre Analoga in der Theorie der s-Functionen finden. Nur folgende beiden Sätze möchte ich der späteren Anwendung wegen anführen:

4. *Ist S_0 eine Particularlösung der Differentialgleichung* (2), *so stellt sich das allgemeine Integral S derselben als gebrochene lineare Function von S_0 mit beliebigen, doch von z unabhängigen Coefficienten dar:*

$$S = \frac{\alpha S_0 + \beta}{\gamma S_0 + \delta}.$$

5. *Führt das Argument z einen vollen positiven Umlauf um einen der singulären Punkte a, b oder c aus, so geht ein Zweig S_0^* einer beliebigen Particularlösung S_0 in einen neuen Zweig über, der sich bez. durch eine gebrochene lineare Substitution* A, B *oder* Γ *mit von z unabhängigen Coefficienten aus S_0^* ergiebt.*

Wir geben den Punkten a, b, c jetzt die speciellen Werthe $0, \infty, 1$. Indem wir zugleich an Stelle von z und d bez. x und r einführen, erhalten wir:

$$\frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2}\left(\frac{S''}{S'}\right)^2 = \frac{1}{x(x-1)} \cdot \left\{ -\frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1-\mu^2}{2} + \frac{1-\nu^2}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2}\frac{r(r-1)}{(x-r)^2} + \frac{A_1}{x-r} \right\}, \tag{8}$$

wo

$$A_1 = -r + \frac{1}{2} + \sqrt{f(r)}, \tag{9}$$

und

$$f(r) = \mu^2 r^2 - (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2) r + \lambda^2 \tag{10}$$

ist.

Damit der Werth $r = \infty$ nicht eine Ausnahmestellung einnimmt, setzen wir $r = \frac{r_1}{r_2}$ und betrachten an Stelle der Function $f(r)$ die Form $\varphi(r_1, r_2) = r_2^2 \cdot f(r)$ oder:

(10*) $$\varphi(r_1, r_2) = \mu^2 r_1^2 - (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2) r_1 r_2 + \lambda^2 r_2^2.$$

Wir legen fernerhin allein die einfachere, wenn auch weniger symmetrisch gebaute Differentialgleichung (8) mit der Bedingung (9) unserer Untersuchung zu Grunde, wodurch ihrer Allgemeinheit keinerlei Abbruch geschieht

Es sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

I. Der specielle Fall. *Die Form $\varphi(r_1, r_2)$ verschwindet identisch*, d. h. es ist $\lambda = \mu = \nu = 0$. Diesen Fall besprechen wir sogleich im nächsten Paragraphen näher.

II. Der Hauptfall. *Die Gleichung $\varphi(r_1, r_2) = 0$ besitzt zwei von einander getrennte Wurzeln:*

$$r^* = \frac{r_1^*}{r_2^*} \text{ und } r^{**} = \frac{r_1^{**}}{r_2^{**}}.$$

Es ist:

(11) $$r^* \text{ bez. } r^{**} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 \pm \sqrt{(\lambda+\mu+\nu)(\lambda-\mu-\nu)(\lambda-\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu)}}{2\mu^2}$$

$$= \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 \mp \sqrt{(\lambda+\mu+\nu)(\lambda-\mu-\nu)(\lambda-\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu)}}.$$

Die Wurzel der rechten Seite soll den Hauptwerth annehmen. Die oberen Vorzeichen gelten für die Grösse r^*, die unteren für die Grösse r^{**}.

Wir deuten zweckmässig den Parameter r auf einer *zweiblättrigen Riemann'schen Fläche*, deren einzige Verzweigungspunkte die Punkte r^* und r^{**} sind. Verschwindet einer der Exponenten λ, μ, ν, so ist der zugehörige singuläre Punkt nothwendig eine Wurzel der Gleichung $\varphi(r_1, r_2) = 0$ und umgekehrt, d. h.

6. *An einer der Stellen $0, \infty, 1$ liegt ein Verzweigungspunkt der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche stets dann und nur dann, wenn bez. λ, μ oder ν gleich Null ist.*

III. Der Ausnahmefall. Die Gleichung $\varphi(r_1, r_2) = 0$ besitzt eine Doppelwurzel r^{***}. Dann muss einer der Factoren des unter dem Wurzelzeichen der Gleichung (11) stehenden Ausdrucks verschwinden.

7. *Der Ausnahmefall tritt stets dann und nur dann ein, wenn die Bezeichnung der Exponenten* (nicht ohne Rücksicht auf die zu Anfang des § 2 gemachte Festsetzung) *sich so wählen lässt, dass die Gleichung besteht $\lambda = \mu + \nu$. Diese Annahme über die Bezeichnung der Exponenten wollen wir im Ausnahmefalle im Folgenden stets als erfüllt voraussetzen.* Es ist dann:

(12) $$r^{***} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Die Bedingung (9) zerfällt jetzt in die beiden:

$$(9^a) \qquad A_1 = -r + \frac{1}{2} + \mu\left(r - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

oder:

$$(9^b) \qquad A_1 = -r + \frac{1}{2} - \mu\left(r - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Wir haben im Ausnahmefalle (im Gegensatze zum Hauptfalle) für gegebene Exponenten λ, μ, ν zwei analytisch völlig von einander verschiedene Bedingungen (9^a) und (9^b). Dementsprechend deuten wir jetzt zweckmässig den Parameter r auf *zwei einblättrigen Riemann'schen Flächen*, die nur im Punkte $r = r^{***}$ zusammenhängen.

8. *Ist speciell* $\nu = 0$ (und damit $\lambda = \mu$), *so ist der Punkt* 1 *der Doppelpunkt; an den Stellen* 0 *und* ∞ *dagegen kann der Doppelpunkt bei unserer Festsetzung niemals liegen.*

Die der Bedingung (9^a) oder (9^b) entsprechenden Differentialgleichungen unterscheiden wir bez. als solche *vom Typus A oder B.* Sie gehen indess für $r = r^{***} = \frac{\lambda}{\mu}$ in dieselbe specielle Differentialgleichung mit dem Parameter:

$$(9^c) \qquad A_1 = -\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}$$

über. Wir nennen diese die Differentialgleichung des *Uebergangsfalles.*

9. *Die Function* $S = x^{-\lambda}(x-1)^r$ *stellt*, wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugt, *eine Particularlösung der Differentialgleichung des Uebergangsfalles dar.*

§ 4.

Der specielle Fall $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Die Differentialgleichung (8) nimmt die folgende einfache Form an:

$$(8^*) \qquad \frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2}\left(\frac{S''}{S'}\right)^2$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} \cdot \left\{ -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{r(r-1)}{(x-r)^2} + \frac{\frac{1}{2} - r}{x-r} \right\}.$$

10. *Die Function:*

$$(13) \qquad S_0 = \frac{r-1}{r} \log \frac{x-1}{r-1} - \log \frac{x}{r} + \frac{i\pi}{r}$$

stellt, wie man sich wieder durch Einsetzen leicht überzeugt, ein particuläres Integral der Differentialgleichung (8^*) *dar.*

Wir setzen fernerhin voraus, der Nebenpunkt r gehöre der Axe des Reellen an (vgl. Satz 14) und genüge überdies den Ungleichungen:

$$1 \leqq r \leqq +\infty.$$

Um einen bestimmten Zweig S_0^* der Function S_0 abzusondern, setzen wir fest: Das Argument x soll alle Werthe der Halbebene $\mathfrak{P}$ (Fig. 6) annehmen können, und es sollen für sämmtliche Logarithmen ihre Hauptwerthe gewählt werden.

Setzen wir daher:

$$x = R \cdot e^{i\varphi},$$

wo

$$0 \leqq R \leqq \infty$$

und

$$0 \leqq \varphi \leqq \pi$$

ist, und

$$x - 1 = \varrho \cdot e^{i\psi},$$

so bestimmen sich zunächst die Grössen ϱ und ψ eindeutig durch die Gleichungen

$$\varrho = \sqrt{1 + R^2 - 2R\cos\varphi}$$

$$\cos\psi = \frac{R\cos\varphi - 1}{\varrho}$$

und die Ungleichungen:

$$0 \leqq \varrho \leqq +\infty,$$

$$0 \leqq \psi \leqq \pi.$$

Der Zweig S_0^* wird dann, nach unserer Festsetzung in seinen reellen und imaginären Bestandtheil zerlegt, durch die Formel gegeben:

$$(13^*) \qquad S_0^* = \frac{r-1}{r} \cdot \log\frac{\varrho}{r-1} - \log\frac{R}{r} + \left[\frac{r-1}{r} \cdot \psi - \varphi + \frac{\pi}{r}\right] i.$$

Um den Werth des Knotenpunkts d_1 zu berechnen, haben wir $x = r$ (d. h. $R = r$, $\varphi = 0$) einzusetzen. Wir bekommen:

$$d_1 = \frac{\pi i}{r},$$

d. h. in Worten:

11. *Der Knotenpunkt d_1 ist stets rein imaginär, er wandert auf der Axe des Imaginären continuirlich von πi nach* 0, *wenn r sich continuirlich von* 1 *bis* $+\infty$ *auf der Axe des Reellen bewegt.*

12. *Die Abbildung, welche der Zweig S_0^* bei allgemeiner Lage des Punktes r im Intervall von* 1 *bis* $+\infty$ *der Axe des Reellen von der Halbebene $\mathfrak{P}$ entwirft*, ist, wie man sich mit Hülfe der Gleichung (13^*) leicht überzeugt, *ein Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt und den Winkeln $\lambda\pi = \mu\pi = \nu\pi = 0$ in der folgendermassen zu beschreibenden speciellen Lage: Die Kreisbogenseite $a_1 b_1$ ist die Axe des Reellen, die Seite $a_1 c_1$ die Parallele zu ihr durch den Punkt $i\pi$, die zusammenfallenden Bogen $b_1 d_1$ und $c_1 d_1$ endlich werden durch diejenige Hälfte der*

Parallelen zur Axe des Reellen durch den Punkt $d_1 = \frac{\pi i}{r}$ *gegeben, deren Punkte keinen* **positiven** *reellen Bestandtheil haben.* (Fig. 7.)

13. *Fällt* r *mit einem der singulären Punkte* 1 *und* ∞, *etwa mit* 1, *zusammen, so zerfällt gewissermassen unser Bereich wieder in* 2 *Theile, nämlich in ein Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt* a_1, b_1, c_1^* *mit den*

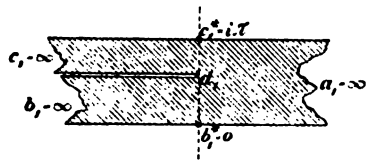


Fig. 7.

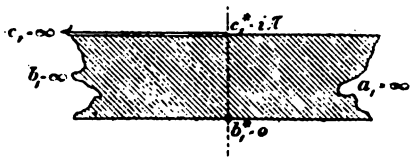


Fig. 8.

Winkeln $\lambda_1 \pi = \mu_1 \pi = 0$, $\nu_1 \pi = \pi$ *und in diejenige Hälfte der ursprünglichen Seite* $a_1 c_1$, *deren Punkte einen negativ reellen Theil besitzen. Dies sei durch* Fig. 8 *angedeutet.* (Vgl. die Schlussbemerkung des § 13.)

Wir haben den Fall bevorzugt, dass r im Intervalle von 1 bis $+\infty$ der Axe des Reellen liegt. Ganz entsprechende Entwicklungen gelten, wenn r dem Intervalle von 0 bis 1 oder dem Intervalle von $-\infty$ bis 0 angehört, wie schon von vorneherein aus der Gleichheit aller Exponenten geschlossen werden kann. Unsere Betrachtungen lassen sich schliesslich ohne Weiteres auch auf eine allgemeine Particularlösung $S(x, r)$ der Differentialgleichung (8*) mit reellem Werthe r übertragen (vgl. Satz 16 und 17).

§ 5.

Die „symmetrischen" S-Functionen mit einfachem Nebenpunkt.

Wir stellen folgende analytische Definition auf:

14. *„Symmetrisch" nennen wir eine* S*-Function mit einfachem Nebenpunkt, wenn die in ihrer Differentialgleichung* (8) *vorkommenden Grössen* λ^2, μ^2, ν^2 *und* r, A_1 **reelle** *Werthe haben.*

Diesem Satze entsprechend sind die Exponenten einer „symmetrischen" S-Function entweder reell oder rein imaginär*).

Es sei x_0 ein *beliebiger*, doch von 0, ∞, 1 verschiedener reeller Werth des Arguments x. Falls die im Satze 14 angegebenen Bedingungen erfüllt sind, existirt stets eine Particularlösung S_0 der Differentialgleichung, welche in der Nähe des Punktes x_0 die folgende Entwicklung gestattet:

$$S_0 = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

*) Entsprechend nennen wir eine s-Function symmetrisch, wenn ihre Exponenten reell oder rein imaginär sind.

wo C_i *reelle*, von x unabhängige Coefficienten sind. Diese Thatsache liefert sofort, ganz den analogen Verhältnissen in der Theorie der s-Functionen entsprechend, den folgenden Satz:

15. *Jede „symmetrische" S-Function bildet die Halbebene* $\mathfrak{P}$ *auf ein Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt ab.*

In der Einleitung haben wir gesehen, dass umgekehrt jede Function, welche die im letzten Satze ausgesprochene Eigenschaft besitzt, einer Differentialgleichung (8) genügt, deren Grössen λ^2, μ^2, ν^2, r, A_1 reell sind. Unsere Definition 14 erweist sich daher identisch mit der bereits in der Einleitung aufgestellten Definition:

14*. *Eine „symmetrische S-Function" mit einfachem Nebenpunkt nennen wir jede Function, welche die Halbebene* $\mathfrak{P}$ *in der bestimmten Weise auf ein Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt abbildet.*

Auch die im vorigen Paragraphen behandelte S-Function mit den Exponenten $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist eine „symmetrische" S-Function, wenn der Nebenpunkt r einen *reellen* Werth besitzt. Gerade diesen Fall haben wir dort näher untersucht.

Aus dem Satze 4 S. 491 folgt jetzt:

16. *Zwei Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt, die sich als Abbilder der Halbebene* $\mathfrak{P}$ *vermittelst je eines für dieses Gebiet erklärten Zweiges* **verschiedener** *Particularlösungen* **derselben** *Differentialgleichung ergeben, stehen zu einander in Möbius'scher Kreisverwandtschaft*, **d. h. sie lassen sich durch lineare Transformation in einander überführen.**

17. *Umgekehrt haben wir alle Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt, welche in „Möbius'scher Kreisverwandtschaft" zu einander stehen, für unseren Zweck als nicht verschieden zu betrachten, da die Halbebene* $\mathfrak{P}$ *auf sie durch Integrale* **derselben** *Differentialgleichung abgebildet wird.*

Bis zum Schlusse dieses Paragraphen sei die Bezeichnung der Exponenten λ, μ, ν so gewählt vorausgesetzt, dass $\lambda' \geqq \mu' \geqq \nu'$ ist, ausserdem, wenn λ reell und > 0 und μ, ν rein imaginär sind, $\mu'' \geqq \nu''$ ist, wenn aber alle drei Exponenten rein imaginär sind, $\lambda'' \geqq \mu'' \geqq \nu''$ ist. *Welche Werthe sind für den reell vorausgesetzten Parameter r zulässig, damit die Integrale der Differentialgleichung* (8) *mit gegebenen reellen Grössen* λ^2, μ^2, ν^2 **symmetrische** *S-Functionen sind?* Nach der Definition 14 ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass auch der accessorische Parameter A_1 reell ist, der nach Gleichung (9), bez. ($9^{a,b,c}$) (S. 491 u. 493), eine Function des Nebenpunktes r und der Exponenten λ, μ, ν ist. Diese einfache Thatsache ergiebt leicht die im Folgenden zusammengestellten Sätze, die im letzten Paragraphen noch eine Erweiterung finden. In Uebereinstimmung mit dem Satze (2) S. 490 ergiebt sich zunächst:

18. *Nimmt r einen der reellen Werthe r^*, r^{**} (Formel (11) S. 492) oder r^{***} (Formel (12) S. 492) an, so erhalten wir nur eine einzige, für jeden anderen reellen Werth r dagegen entweder zwei verschiedene oder gar keine Differentialgleichung mit reellem Parameter A_1.*

I. Der Hauptfall. Es seien

A. *alle drei Exponenten λ, μ, ν reell.* Die Werthe r^*, r^{**} sind:

α) *conjugirt complex, wenn $\lambda < \mu + \nu$ ist.*

19. *Für jeden reellen Werth r erhalten wir symmetrische S-Functionen.*

β) *beide reell* (und natürlich von einander getrennt), *wenn $\lambda > \mu + \nu$ ist.*

20. *Für die stets reellen Werthe r^*, r^{**} gelten die Ungleichungen $0 \leqq r^{**} < r^* \leqq \infty$. Nur wenn r einer der Ungleichungen $r \geqq r^*$, $r \leqq r^{**}$ genügt, erhalten wir symmetrische S-Functionen.*

B. *zwei Exponenten, λ und μ, reell, der dritte, ν, rein imaginär.*

21. *Es gelten die Ungleichungen: $1 < r^* \leqq \infty$, $0 \leqq r^{**} < 1$. Nur wenn r einer der Ungleichungen $r \geqq r^*$, $r \leqq r^{**}$ genügt, erhalten wir symmetrische S-Functionen.*

C. *zwei Exponenten, μ und ν, rein imaginär, der dritte, λ, reell.*

22. *Für die stets reellen Werthe r^*, r^{**} gelten die Ungleichungen: $-\infty < r^* \leqq 0$, $0 < r^{**} < 1$. Nur wenn r den Ungleichungen $r^* \leqq r \leqq r^{**}$ genügt, erhalten wir symmetrische S-Functionen.*

D. *alle drei Exponenten rein imaginär.* Die Werthe r^*, r^{**} sind:

α) *conjugirt complex, wenn $\lambda'' < \mu'' + \nu''$ ist.*

23. *Wir erhalten für keinen reellen Werth r symmetrische S-Functionen.*

β) *beide reell* (und natürlich von einander getrennt), *wenn $\lambda'' > \mu'' + \nu''$ ist.*

24. *Es gelten die Ungleichungen $1 < r^* < r^{**} < \infty$. Nur wenn r den Ungleichungen $r^* \leqq r \leqq r^{**}$ genügt, erhalten wir symmetrische S-Functionen.*

II. Der Ausnahmefall: $\lambda = \mu + \nu$ (vgl. Satz 7, S. 492).

A. Es seien *alle drei Exponenten reell.*

25. *Der Doppelpunkt r^{***} genügt der Ungleichung $1 \leqq r^{***} < \infty$. Für jeden reellen Werth r erhalten wir symmetrische S-Functionen.*

B. Der Fall, dass *zwei Exponenten reell, der dritte rein imaginär* ist, ist als Ausnahmefall nicht möglich.

C. Sind *zwei Exponenten, λ und μ, rein imaginär, der dritte, ν, reell*, so muss $\nu = 0$ und $\lambda'' = \mu''$ sein.

26. *Allein für $r = r^{***} = 1$ erhalten wir symmetrische S-Functionen (d. h. symmetrische s-Functionen).*

D. Es seien *alle drei Exponenten rein imaginär.*

27. *Der Doppelpunkt r^{***} genügt den Ungleichungen $1 < r^{***} < \infty$. Allein für $r = r^{***}$ erhalten wir symmetrische S-Functionen.*

§ 6.

Die drei Methoden zur Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt.

Es soll unsere Aufgabe sein, alle Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt (vgl. Satz 17, S. 496), die vorgegebene Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ besitzen, rein geometrisch construiren zu lernen. Die zur Anwendung gelangenden Constructionsmethoden sollen uns zugleich die Gewissheit gewähren, dass sie uns wirklich *alle* überhaupt möglichen Kreisbogendreiecke und, was indes weniger wichtig ist, jedes einzelne Dreieck nur auf eine Weise liefern. Wir setzen als bekannt voraus, wie jedes Kreisbogendreieck *ohne* Knotenpunkt mit vorgegebenen Winkeln $\lambda_0\pi$, $\mu_0\pi$, $\nu_0\pi$ zu construiren ist*).

Da das einzelne Kreisbogendreieck uns ein Abbild der Halbebene $\mathfrak{P}$ darstellt, so wollen wir die 3 Kreisbogen seiner Begrenzung, die den Intervallen von 0 bis 1, von 1 bis $+\infty$, von $-\infty$ bis 0 der Axe des Reellen in der (x)-Ebene entsprechen, bez. mit a_1c_1, c_1b_1, b_1a_1 bezeichnen, unbekümmert darum, dass jeder der singulären Punkte 0, ∞, 1 dann kein Abbild findet, wenn sein zugehöriger Exponent rein imaginär ist (vgl. Anm. S. 483).

Wir denken uns irgend ein Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt und beliebigen Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ gegeben, dessen Knotenpunkt d_1 sich beispielsweise auf dem Kreisbogen b_1c_1 befinden möge.

Wir vereinigen am Knotenpunkt d_1 beginnend die gegenüberliegenden Ufer des Einschnittes, d. h. die in d_1 zusammenlaufenden Enden der Bogen b_1d_1 und c_1d_1, successive mit einander, so dass letztere gleichmässig kleiner und kleiner werden. Bei der Fortsetzung dieses Processes muss nothwendig einer der folgenden Fälle eintreten, den wir jedesmal durch ein Beispiel illustriren:

I. *Der Punkt d_1 erreicht einen und nur einen der Punkte b_1 und c_1, etwa c_1.* In diesem Augenblicke ist in dem Kreisbogendreieck der Knotenpunkt d_1 mit der Ecke c_1 verschmolzen. Wir erhalten ein Kreisbogen-

*) Vgl. „Habilitationsschrift" § 6 u. 7 pag. [36—47], sowie meine Abhandlung „Beiträge zur geometr. Theorie der Schwarz'schen s-Function", Ann. Bd. 44 (1894) § 14, pag. 208 ff.

dreieck ohne Knotenpunkt mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $(\nu+1)\pi$, wo ν nothwendig reell ist. Dieses Dreieck nennen wir das *„erste Grenzdreieck"* (Fig. 9a, b).

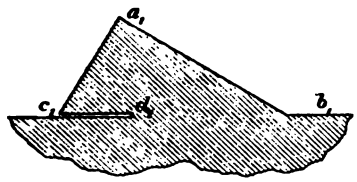


Fig. 9a.

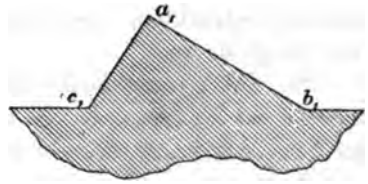


Fig. 9b.

28. *Ein „als erstes Grenzdreieck" auftretendes Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt hat also allgemein die Eigenschaft, dass* **ein** *Winkel um π grösser ist als der entsprechende Winkel der zugehörigen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt, die beiden anderen Winkel aber mit den entsprechenden Winkeln der letztgenannten Dreiecke übereinstimmen.*

II. *Der Punkt d_1 erreicht die Punkte b_1 und c_1* **gleichzeitig.** In diesem Augenblick ist die Kreisbogenseite $b_1 c_1$ ganz fortgefallen. Es bleibt ein gewöhnliches Zweieck mit zwei gleichen Winkeln $\lambda\pi$ übrig (Fig. 10); die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ müssen nothwendig reell sein und der Bedingung $\lambda = \mu + \nu$ genügen, so dass also der Zweieckswinkel gleich dem grössten der ursprünglichen Dreieckswinkel ist.

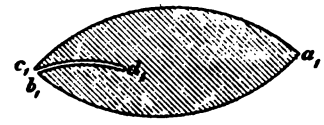


Fig. 10.

III. *Der Punkt d_1 erreicht, so weit wir auch die Vereinigung der Bogen $b_1 d_1$ und $c_1 d_1$ fortsetzen,* **niemals** *einen Eckpunkt.* Dann windet sich, wenn wir den Bereich auf der Kugel gelegen annehmen, zu beiden Seiten des Kreisbogens $b_1 c_1$ die Fläche des Dreiecks wie ein unendliches Band um dieselbe herum. Das Dreieck kann nur so beschaffen sein, dass die drei Kreise der begrenzenden Bogen sich nicht unter einander schneiden. Dieser Fall kann daher nur bei *drei rein imaginären Exponenten* eintreten, für die gerade die beiden vorhergehenden Fälle ausgeschlossen sind. (Die ein Beispiel gebende Fig. 11 stellt natürlich nur ein theilweise willkürlich begrenztes Stück des Kreisbogendreiecks dar.) Die drei Kreise theilen die Kugel, auf der das Kreisbogendreieck gelegen ist, stets in zwei Kalotten und in zwei Ringgebiete.

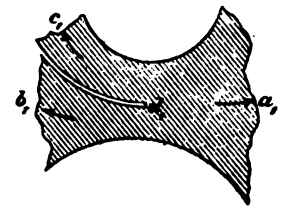


Fig. 11.

Zur Lösung der eingangs dieses Paragraphen aufgestellten Aufgabe werden wir jetzt naturgemäss dadurch geführt werden, dass wir

umgekehrt vorgehen wie soeben. Den geschilderten drei Möglichkeiten entsprechend werden wir *drei verschiedene Constructionsmethoden* zu unterscheiden haben. Der besseren Uebersicht wegen wollen wir bei der näheren Darlegung der letzteren im Folgenden die 4 Fälle nach einander betrachten, dass keiner, einer, zwei oder alle drei Exponenten rein imaginär sind.

29. *Die Gesammtheit aller von einander verschiedenen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt, die allein durch Verlängerung oder Verkürzung des Einschnittes aus einander hervorgehen, wollen wir als eine „Schaar" bezeichnen.*

§ 7.

Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und reellen Winkeln nach der ersten Methode.

Die vorgegebenen Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ seien *reell*. Die *erste Methode*, die zugehörigen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt zu construiren, hat gemäss Nr. I des § 6 von einem ersten Grenzdreieck auszugehen. Als solches muss nothwendig eines der Kreisbogendreiecke ohne Knotenpunkt gewählt werden, die folgende Winkeltripel besitzen:

$$\lambda\pi,\ \mu\pi,\ (\nu+1)\pi;\quad \lambda\pi,\ (\mu+1)\pi,\ \nu\pi;\quad (\lambda+1)\pi,\ \mu\pi,\ \nu\pi.$$

Die Anwendung der ersten Methode auf eines der Grenzdreiecke, etwa auf das erste, hat darin zu bestehen, dass wir in ihm, falls es überhaupt möglich ist, die eine oder die andere der Seiten a_1c_1 und b_1c_1, welche den um π vermehrten Winkel $(\nu+1)\pi$ bilden, über den zugehörigen Eckpunkt c_1 hinaus als Einschnitt in den Bereich hinein verlängern und zwar so, dass von dem Winkel $(\nu+1)\pi$ gerade der Theil π abgetrennt wird, wie für die Umgebung der Ecke c_1 beispielsweise durch Fig. 12a, b dargestellt sei. Der Knotenpunkt d_1 gehört als Endpunkt des Einschnittes hier, wie in allen späteren Fällen, stets der verlängerten Seite an. Was nun die Ausführbarkeit der Methode betrifft, so lässt sich folgender Satz beweisen:

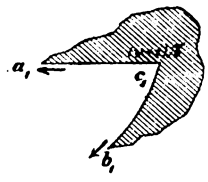


Fig. 12a.

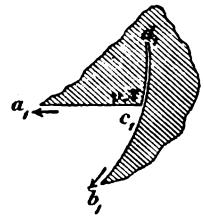


Fig. 12b.

30. *Im ersten Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $(\nu+1)\pi$ lässt sich nach der ersten Methode über die Ecke c_1 als Einschnitt in den Bereich hinein:*

sowohl die Seite a_1c_1 wie b_1c_1 fortsetzen, wenn $\nu > 0$ ist (Fig. 9a, b),

nur die Seite $a_1 c_1$, *wenn* $\nu = 0$ *und* $\lambda > \mu$ *ist* (Fig. 13 für $\lambda = 1$, $\mu = \nu = 0$),
nur die Seite $b_1 c_1$, *wenn* $\nu = 0$ *und* $\lambda < \mu$ *ist*,
keine der beiden Seiten, *wenn* $\nu = 0$ *und* $\lambda = \mu$ *ist* (Fig. 14 für $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$).

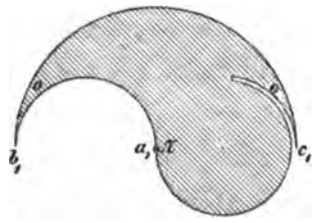


Fig. 13.

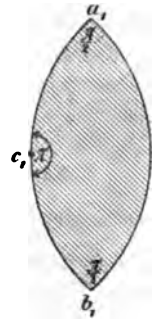


Fig. 14.

Durch cyklische Vertauschungen der Buchstaben λ, μ, ν und bez. a_1, b_1, c_1 erhalten wir die beiden für die zwei anderen Grenzdreicke gültigen Sätze.

Diese Sätze würden es auch leicht ermöglichen, etwa in jedem der hierher gehörenden, im § 5 unterschiedenen Fälle anzugeben, wie viel verschiedene *Schaaren* von Kreisbogendreiecken mit Knotenpunkt und gegebenen Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ die Anwendung der ersten Methode liefert. Doch behalten wir uns dies für den Schlussparagraphen dieser Arbeit vor und heben hier nur das für die spätere Untersuchung wichtige Resultat hervor, dass die erste Methode jedenfalls nur eine *endliche* Zahl verschiedener solcher Schaaren liefert. Dass ferner je zwei nach der ersten Methode erhaltene Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt von einander verschieden sind, auch dann, wenn sie sich etwa nur durch einen mehr oder weniger weit fortgesetzten Einschnitt unterscheiden, brauchen wir wohl kaum besonders hervorzuheben*)

Setzen wir in einem beliebigen nach der ersten Methode construirten Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt und reellen Winkeln den Einschnitt in den Bereich weiter und weiter über den jeweiligen Knotenpunkt d_1 hinaus fort, so muss letzterer schliesslich einmal an irgend einer Stelle die Begrenzung des Dreiecks erreichen. In diesem Augenblicke zerfällt der ursprüngliche Bereich in zwei Theile. Ist ein Theil ein Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt, so nennen wir dieses das „*zweite Grenzdreieck der Schaar*". Die nähere Untersuchung ergiebt

*) Analoge Bemerkungen gelten auch für die in den §§ 8—10 behandelten Fälle.

folgenden Satz, aus dem wir noch fünf analoge Sätze durch alle möglichen Vertauschungen der Buchstaben a_1, b_1, c_1 und bez. λ, μ, ν erhalten:

31. *Ist in dem ersten Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, (\nu+1)\pi$ die Seite b_1c_1 über c_1 als Einschnitt in den Bereich hinein verlängert, so erreicht der Knotenpunkt d_1 bei Fortsetzung des Einschnittes schliesslich:*

1) *die Seite a_1c_1 innerlich oder die Ecke c_1, wenn $\lambda > \mu + \nu$ ist. Der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\nu < 1$) oder einer Kreisfläche ($\nu \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, |\nu-1|\pi$* (Fig. 15 für $\lambda = 1, \mu = 0, \nu = \frac{1}{2}$).
2) *die Ecke a_1, wenn $\lambda = \mu + \nu$ ist. Der Bereich zerfällt in zwei Zweiecke* (Fig. 16 für $\lambda = \frac{5}{6}, \mu = \frac{1}{2}, \nu = \frac{1}{3}$).
3) *die Seite a_1b_1 innerlich oder die Ecke b_1, wenn $\lambda < \mu + \nu$ ist. Der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\mu < 1$) oder einer Kreisfläche ($\mu \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, |\mu-1|\pi, \nu\pi$* (Fig. 17 für $\lambda = 0, \mu = \nu = \frac{1}{2}$).

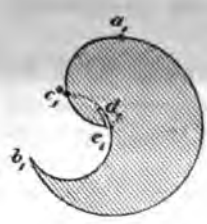


Fig. 15.

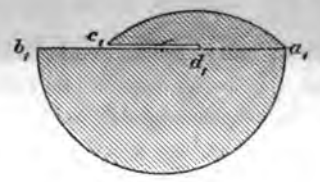


Fig. 16.

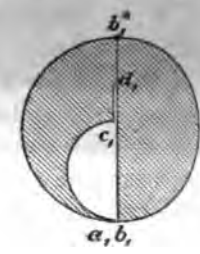


Fig. 17.

Sogleich an dieser Stelle wollen wir das aus dem letzten Satze, wie den analogen Sätzen 33, 35, 38 a, b, 40 sich ergebende allgemeine Resultat anführen:

32. *Ein zweites Grenzdreieck, d. h. ein bei Verlängerung des Einschnittes sich schliesslich ergebendes Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt, hat stets die Eigenschaft, dass einer seiner Winkel gleich dem absoluten Betrage des um π verminderten entsprechenden Winkels der zugehörigen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt ist, die beiden übrigen Winkel aber mit den entsprechenden Winkeln der letztgenannten Dreiecke übereinstimmen.*

§ 8.

Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und reellen Winkeln nach der zweiten Methode.

Auch in diesem Paragraphen mögen die vorgegebenen Winkel $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ *reell* sein. Die Bezeichnung derselben sei überdies so

gewählt, dass $\lambda \geqq \mu \geqq \nu$ ist, was der Allgemeinheit der Betrachtung keinen Abbruch thut. Die *zweite Methode* zur Construction der zugehörigen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt verlangt gemäss Nr. II des § 6 für die Möglichkeit ihrer Anwendung, dass $\lambda = \mu + \nu$ ist, d. h. dass der Ausnahmefall vorliegt, und hat das Zweieck zum Ausgangspunkt zu nehmen, dessen Winkel gleich $\lambda\pi$ sind. Letzteres wollen wir stets *geradlinig* begrenzt sein lassen, was sich ja immer durch geeignete lineare Transformation erreichen lässt. Der Fall, dass $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist, möge im Folgenden ausgeschlossen sein, da die ihm zugehörigen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt bereits im § 4 betrachtet sind. Dann haben wir nur noch folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $\nu > 0$.

II. $\lambda = \mu > 0$, $\nu = 0$.

Sprechen wir zunächst allein von dem ersten Falle. Die Anwendung der zweiten Methode auf das Zweieck mit den Winkeln $\lambda\pi$ hat allgemein gesprochen folgendermassen zu verlaufen: Wir haben von einer Ecke des Zweiecks aus, etwa der im Endlichen liegenden, längs eines Kreisbogens einen Einschnitt in den Bereich vorzunehmen, der den Winkel $\lambda\pi$ so in die Theile $\mu\pi$ und $\nu\pi$ zerlegt, dass, wenn die unendlich ferne Ecke mit a_1, die Ecken der Winkel $\mu\pi$ und $\nu\pi$ bez. mit b_1 und c_1 bezeichnet werden, die drei Ecken bei positiver Umlaufung des Bereiches in der Reihenfolge c_1, b_1, a_1 angetroffen werden. Nun giebt es stets einfach ∞ viele Kreisbogen, welche der für den Einschnitt nothwendigen Bedingung genügen. Um diese Verhältnisse näher zu untersuchen, betrachten wir vorerst einmal das specielle Beispiel: $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \nu = \frac{1}{4}$.

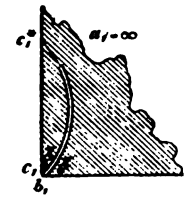


Fig. 18a.

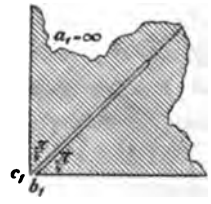


Fig. 18b.

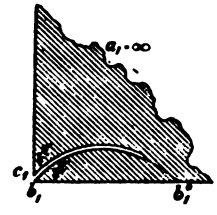


Fig. 18c.

Ein Blick auf die Figuren 18 a, b, c belehrt uns: Wir können den verlangten Einschnitt in das Zweieck mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ so vornehmen, dass bei seiner Fortsetzung der Knotenpunkt d_1 schliesslich entweder die Seite $a_1 c_1$ innerlich (Möglichkeit I, Fig. 18 a) oder die Ecke a_1 (Möglichkeit II, Fig. 18 b) oder die Seite $a_1 b_1$ innerlich (Möglichkeit III, Fig. 18 c) erreicht. Die durch Verlängerung oder Ver-

kürzung des Einschnittes in den Figuren 18a und 18c sich ergebenden Kreisbogendreiecke sind sämmtlich von einander verschieden und bilden daher zwei Schaaren; die durch Verlängerung oder Verkürzung des Einschnittes in der Figur 18b sich ergebenden Kreisbogendreiecke dagegen sind sämmtlich mit dem gezeichneten identisch, da sie durch lineare, hyperbolische Transformationen mit den Fixpunkten $a_1 = \infty$ und $b_1 = c_1$ in dieses übergeführt werden können. *Irgend ein anderer zulässiger Einschnitt des Zweiecks wie die drei in den Figuren* 18a, b, c *liefert uns dagegen keine weiteren als verschieden geltenden Kreisbogendreiecke;* denn wir können wiederum durch Anwendung einer linearen, hyperbolischen Transformation mit den Fixpunkten $a_1 = \infty$ und $b_1 = c_1$ jedes durch einen neuen Einschnitt entstandene Kreisbogendreieck auf eine der durch die Figuren 18a, c dargestellten Schaaren zurückführen.

Die zu einem *beliebigen* Werthetripel λ, μ, ν des Falles I gehörenden Figuren ergeben sich aus dem Beispiel, wenn die Seite $a_1 b_1$ um b_1 im positiven oder negativen Sinne gedreht wird, bis an der Ecke b_1 der Winkel $\mu\pi$ herauskommt, desgleichen die Seite $a_1 c_1$ um c_1, bis an der Ecke c_1 der Winkel $\nu\pi$ herauskommt. Wir gewinnen den folgenden allgemeinen Satz:

33. *Ist der kleinste Exponent ν von 0 verschieden, so bieten sich stets drei und nur drei Möglichkeiten für die Ausführung der zweiten Methode dar. Durch Fortsetzung des Einschnittes erreicht der Knotenpunkt d_1 schliesslich*

bei der **ersten** *Möglichkeit*

die Seite $a_1 c_1$ innerlich oder die Ecke c_1. Der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\nu < 1$) oder einer Kreisfläche ($\nu \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $|\nu - 1|\pi$.

bei der **zweiten** *Möglichkeit*

die Ecke a_1. Wir nennen das einzige sich hier ergebende Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt dasjenige des **Uebergangsfalles.**

bei der **dritten** *Möglichkeit*

die Seite $a_1 b_1$ innerlich oder die Ecke b_1. Der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\mu < 1$) oder einer Kreisfläche ($\mu \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $|\mu - 1|\pi$, $\nu\pi$.

In Bezug auf das Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles füge ich sogleich noch folgende functionentheoretische Bemerkung hinzu:

Wir denken dies Dreieck in solcher Lage gezeichnet, dass der Eckpunkt a_1, wie bisher, im Unendlichen, die Eckpunkte b_1 und c_1

an der Stelle 0 und der Knotenpunkt d_1 an der Stelle $+1$ liegen. Andererseits betrachten wir die Function:

$$S_0 = \frac{x^{-\lambda}.(x-1)^{\nu}}{\lambda^{-\lambda}.\nu^{\nu}.\mu^{\mu}},$$

wo für die Factoren des Nenners die Hauptwerthe zu nehmen sind, insbesondere den dadurch für die Halbebene $\mathfrak{P}$ erklärten Zweig S_0^* dass $x^{-\lambda}$ und $(x-1)^{\nu}$ für $x = r^{***} = \frac{\lambda}{\mu}$ die Hauptwerthe annehmen sollen. Wie man sich leicht überzeugt, bildet der Zweig S_0^* die Halbebene $\mathfrak{P}$ so auf das soeben in seiner Lage normirte Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles ab, dass den Punkten $x = 0, \infty, 1, \frac{\lambda}{\mu}$ bez. die Punkte $a_1 = \infty$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $d_1 = 1$ entsprechen. Wir erhalten daher als Resultat in Rücksicht auf den Satz 9 S. 493:

34. *Das Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles entspricht der Differentialgleichung des Uebergangsfalles.*

Was nun *den Fall II* betrifft, so unterscheidet sich hier die Anwendung der zweiten Methode von der soeben geschilderten nur darin, dass jetzt die nicht zertheilte Ecke des Zweiecks entweder die Ecke a_1 oder die Ecke b_1 der aus dem Zweieck abgeleiteten Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt bilden kann, dass andererseits bei jeder dieser Möglichkeiten sich stets eine und nur eine Schaar ergiebt. Die Figuren 19a, b

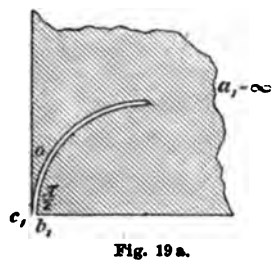


Fig. 19a.

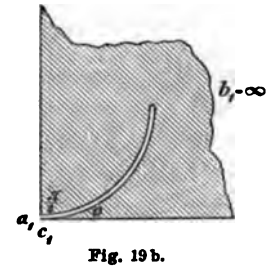


Fig. 19b.

für das Beispiel $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, $\nu = 0$ erläutern diese Verhältnisse zur Genüge. (Die Figur 19a entspricht der Figur 18c, während die Figuren 18a, b keine Analoga finden.) Das Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles wird hier in Uebereinstimmung mit Satz 8 durch das Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $(\nu+1)\pi$ gegeben (Fig. 14, S. 501).

35. *Ist der kleinste Exponent ν gleich 0, so erhalten wir wieder zwei Schaaren von Kreisbogendreiecken mit Knotenpunkt.*

Die erste ist dadurch charakterisirt, dass die Ecken b_1 und c_1 ihrer Kreisbogendreiecke zusammengefallen sind, dass ferner bei Fortsetzung des Einschnittes der Knotenpunkt d_1 die Seite $a_1 b_1$ innerlich

oder die Ecke b_1 erreicht und dann der Bereich unter Abschnürung eines Zweiecks ($\mu < 1$) oder einer Kreisfläche ($\mu \geqq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $|\mu - 1|\pi$, $\nu\pi$ liefert.

Die zweite ist dadurch charakterisirt, dass die Ecken a_1 und c_1 ihrer Kreisbogendreiecke zusammengefallen sind, dass ferner bei Fortsetzung des Einschnittes der Knotenpunkt d_1 die Seite $a_1 b_1$ innerlich oder die Ecke a_1 erreicht und dann der Bereich unter Abschnürung eines Zweiecks ($\lambda < 1$) oder einer Kreisfläche ($\lambda \geqq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $|\lambda - 1|\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ liefert.

Zusammenfassend gewinnen wir als Schlussresultat der §§ 7 und 8.

36. *Wir erhalten für gegebene Exponenten λ, μ, ν (mit der Bedingung $\lambda \geqq \mu \geqq \nu$)* **alle** *Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, wenn wir auf jedes der drei ersten Grenzdreiecke, die durch die Exponententripel $\lambda + 1, \mu, \nu$; $\lambda, \mu + 1, \nu$; $\lambda, \mu, \nu + 1$ bestimmt sind, dem Satze 30 entsprechend die erste Methode anwenden, in soweit sie ausführbar ist, ausserdem noch, falls der Ausnahmefall vorliegt, auf das Zweieck mit den Winkeln $\lambda\pi$ den Sätzen 33 und 35 entsprechend die zweite Methode.*

§ 9.

Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt, zwei reellen und einem rein imaginären oder einem reellen und zwei rein imaginären Winkeln.

Es seien *zwei Exponenten, etwa λ und μ, reell, der dritte $\nu = \nu''i$, rein imaginär.* Es kommt allein die *erste Methode* zur Construction der entsprechenden Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt zur Anwendung. Dieselbe ist in ganz analoger Weise auszuführen, wie im § 7.

Als erstes Grenzdreieck, von dem wir auszugehen haben, ist nothwendig entweder das Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt mit den Winkeln $(\lambda + 1)\pi$, $\mu\pi$, $\nu''\pi i$ oder dasjenige mit den Winkeln $\lambda\pi$,

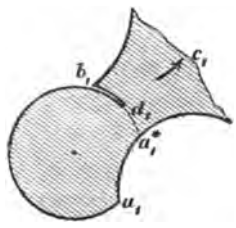


Fig. 20.

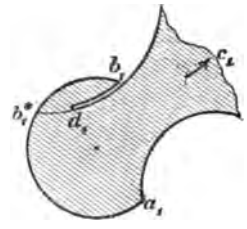


Fig. 21.

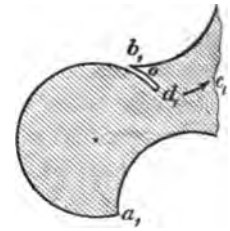


Fig. 22.

$(\mu + 1)\pi$, $\nu''\pi i$ zu wählen. Den Sätzen 30 und 31 des § 7 entsprechend gelten hier folgende Sätze:

37. *Im ersten Grenzdreieck mit den Winkeln* $\lambda\pi$, $(\mu+1)\pi$, $\nu''\pi i$ *lässt sich nach der ersten Methode über die Ecke* b_1 *hinaus als Einschnitt in den Bereich hinein:*

sowohl die Seite $a_1 b_1$ *wie* $c_1 b_1$ *fortsetzen, wenn* $\mu > 0$ *ist* (Fig. 20 und 21 s. S. 506),

nur die Seite $a_1 b_1$, *wenn* $\mu = 0$ *ist* (Fig. 22 s. S. 506).

38a. *Ist in dem ersten Grenzdreieck mit den Winkeln* $\lambda\pi$, $(\mu+1)\pi$, $\nu''\pi i$ *die Seite* $a_1 b_1$ *über* b_1 *als Einschnitt in den Bereich hinein verlängert, so erreicht der Knotenpunkt* d_1 *bei Fortsetzung des Einschnittes schliesslich entweder die Seite* $a_1 c_1$ *innerlich oder die Ecke* a_1, *und der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks* $(\lambda < 1)$ *oder einer Kreisfläche* $(\lambda \geqq 1)$ *ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln* $|\lambda - 1|\pi$, $\mu\pi$, $\nu''\pi i$. (Fig. 20 und 22.)

38b. *Ist in dem ersten Grenzdreieck mit den Winkeln* $\lambda\pi$, $(\mu+1)\pi$, $\nu''\pi i$ *die Seite* $c_1 b_1$ *über* b_1 *als Einschnitt in den Bereich hinein verlängert, so erreicht der Knotenpunkt* d_1 *bei Fortsetzung des Einschnittes schliesslich entweder die Seite* $a_1 b_1$ *innerlich oder die Ecke* b_1, *und der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks* $(\mu < 1)$ *oder einer Kreisfläche* $(\mu \geqq 1)$ *ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln* $\lambda\pi$, $|\mu - 1|\pi$, $\nu''\pi i$. (Fig. 21.)

Auf das erste Grenzdreieck mit den Winkeln $(\lambda+1)\pi$, $\mu\pi$, $\nu''\pi i$ übertragen sich die Sätze 37 und 38a, b, wenn man in ihnen die Bezeichnungen a_1 und b_1, sowie λ und μ mit einander vertauscht. —

Es seien *zwei Exponenten rein imaginär, der dritte reell.* Wenn der Ausnahmefall vorliegt, d. h. wenn der reelle Exponent, etwa ν, gleich 0 ist und die rein imaginären Exponenten, $\lambda''i$ und $\mu''i$, einander gleich sind, so giebt es überhaupt nur ein einziges, hierher gehöriges Kreisbogendreieck und zwar dasjenige ohne Knotenpunkt mit den Winkeln $\lambda''\pi i$, $\mu''\pi i$, π (Fig. 23, vgl. § 5, Nr. II, C). Dieser Fall sei im Folgenden ausgeschlossen.

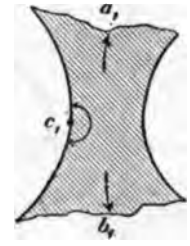


Fig. 23.

Die rein imaginären Exponenten seien jetzt mit $\mu''i$ und $\nu''i$, der reelle Exponent mit λ bezeichnet. Es kommt wieder allein die *erste Methode* zur Construction der entsprechenden Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt in Anwendung; auch ist sie wieder in ganz entsprechender Weise auszuführen, wie im § 7. Als erstes Grenzdreieck, von dem wir auszugehen haben, ist nothwendig das Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt mit den Winkeln $(\lambda+1)\pi$, $\mu''\pi i$, $\nu''\pi i$ zu wählen. Es gelten folgende Sätze:

39. *Im ersten Grenzdreieck mit den Winkeln* $(\lambda+1)\pi$, $\mu''\pi i$, $\nu''\pi i$ *lässt sich nach der ersten Methode über die Ecke* a_1 *hinaus als Einschnitt in den Bereich hinein:*

sowohl die Seite $b_1 a_1$ wie die Seite $c_1 a_1$ fortsetzen, wenn $\lambda > 0$ ist (Beispiel III der Tafel),
nur die Seite $c_1 a_1$, wenn $\lambda = 0$ und $\mu'' > \nu''$ ist, (Fig. 24)
nur die Seite $b_1 a_1$, wenn $\lambda = 0$ und $\mu'' < \nu''$ ist.

40. *Ist in dem genannten ersten Grenzdreieck die Seite $c_1 a_1$ über a_1 als Einschnitt in den Bereich hinein verlängert, so erreicht der Knotenpunkt d_1 bei Fortsetzung des Einschnittes schliesslich entweder die Seite $a_1 b_1$ innerlich oder die Ecke a_1, und der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\lambda < 1$) oder einer Kreisfläche ($\lambda \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $|\lambda - 1|\pi$, $\mu''\pi i$, $\nu''\pi i$.*

Fig. 24.

Ein entsprechender Satz ergiebt sich, wenn wir im letzten Satze die Bezeichnungen b_1 und c_1, sowie μ'' und ν'' mit einander vertauschen.

§ 10.

Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und drei rein imaginären Winkeln.

Es seien *alle drei Exponenten rein imaginär;* es möge $\lambda'' \geq \mu'' \geq \nu''$ gelten. Zur Construction der entsprechenden Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt kommt allein *die dritte Methode* gemäss Nr. III im § 6 in Anwendung. Aus den entsprechenden Betrachtungen des § 5 (S. 495) insbesondere den Sätzen 23, 24 und 27 daselbst folgt zunächst:

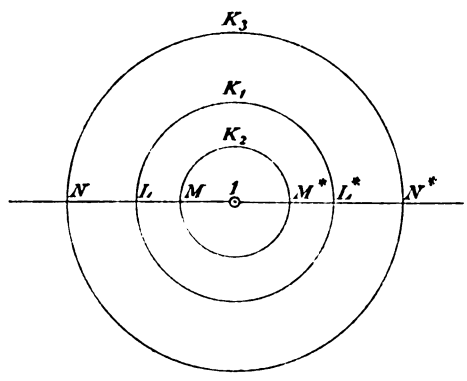


Fig. 25.

41. *Stets dann und nur dann lassen sich für drei vorgegebene rein imaginäre Exponenten $\lambda'' i$, $\mu'' i$, $\nu'' i$ Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt construiren, wenn*

$$\lambda'' \geq \mu'' + \nu''$$

ist. Der Knotenpunkt d_1 kann in einem solchen Dreieck nur auf der Seite $b_1 c_1$ gelegen sein.

Die dritte Constructionsmethode besteht nun im Folgenden:

Wir zeichnen zunächst drei concentrische Kreise K_1, K_2, K_3, sodass K_2 und K_3 den Winkel $\lambda''\pi i$, K_1 und K_3 den Winkel $\mu''\pi i$ mit einander bilden*). Die Kreise K_1 und K_2 bilden dann den Winkel

*) In Betreff der Definition des imaginären Winkels vgl. Habilitationsschrift, Satz 32, pag. [41].

$(\lambda''-\mu'')\pi i$ mit einander. Eine beliebige durch den gemeinsamen Mittelpunkt gehende Gerade möge die Kreise bez. in den Punkten L, L^*; M, M^*; N, N^* schneiden. (Fig. 25, s. S. 28). Die ebene Figur fassen wir auf als eine stereographische Projection einer entsprechenden Figur auf der Kugel der complexen Variablen S. Den Punkten N, N^* und dem Mittelpunkt der Kreise legen wir bez. die Werthe $0, \infty, 1$ bei; die Kugel ist dann vom Punkte -1 auf die Tangentialebene des Punktes $+1$ projicirt zu denken. Die den Punkten L, M zukommenden Zahlenwerthe seien durch dieselben Buchstaben bezeichnet.

Wir transformiren nun allein den Kreis K_1 durch folgende hyperbolische Substitution:

$$S_1 = C.S, \tag{14}$$

wo C ein reeller Parameter ist, welcher der Bedingung

$$1 \leqq C < \frac{M}{L} \tag{15}$$

genügen soll.

Der durch diese Transformation aus K_1 entstehende neue Kreis K_1' bilde mit K_2 den Winkel $\bar{\nu}''\pi i$. Die Winkel der Kreise K_2 und K_3, sowie K_1' und K_3 sind auch nach der Transformation unverändert $\lambda''\pi i$ und $\mu''\pi i$.

Wenn C von 1 bis $\frac{M}{L}$ stetig zunimmt, so nimmt der Winkel $\bar{\nu}''\pi i$ stetig von $(\lambda''-\mu'')\pi i$ bis 0 ab.

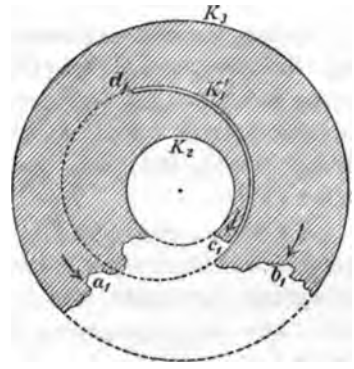


Fig. 26.

Wir bekommen in der geschilderten Weise demnach stets *eindeutig* drei Kreise, welche gegebene Winkel $\lambda''\pi i$, $\mu''\pi i$, $\nu''\pi i$ mit einander bilden. Wie wir aus der Figur der drei Kreise die Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt auf der Seite $b_1 c_1$ erhalten, wird durch die ein Beispiel darstellende Figur 26 genügend erläutert.

42. *Im Hauptfalle, d. h. wenn $\lambda'' > \mu'' + \nu''$ ist, sind die durch Fortsetzung (oder Verkürzung) des „Einschnittes" entstehenden Kreisbogendreiecke so lange von einander verschieden, bis der Knotenpunkt d_1 den Kreis K_1' der Seite $b_1 c_1$ gerade einmal umlaufen hat.*

Im Ausnahmefalle, d. h. wenn $\lambda'' = \mu'' + \nu''$ ist, sind die drei Kreise in der von uns bevorzugten Lage concentrisch. Bei allgemeiner Lage besteht ihre geometrische Eigenart darin, dass die zu zweien der Kreise orthogonalen Kreise auch zum dritten orthogonal sind. Die

durch Fortsetzung des Bogens $b_1 d_1$ über d_1 hinaus als Einschnitt in den Bereich hinein entstehenden Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt sind hier mit dem ursprünglichen kreisverwandt.

43. *Im Ausnahmefalle erhalten wir also nur ein einziges Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt* (vgl. Satz 27, S. 498).

§ 11.

Existenzsätze der allgemeinen Function $S(x, \alpha)$ im Hauptfalle.

Die Betrachtungen dieses und des folgenden Paragraphen beziehen sich zunächst nicht speciell auf symmetrische, sondern auf allgemeine S-Functionen. Die Exponenten λ, μ, ν mögen solche vorgegebene Werthe haben, dass der im § 3 (S. 492) definirte *Hauptfall* vorliegt.

Die durch Gleichung (9) (S. 491) mit einander verbundenen Parameter r und A_1 lassen sich auf unendlich viele Weisen durch eine Hülfsgrösse α rational ausdrücken, so dass die genannte Gleichung befriedigt ist. Wir setzen beispielsweise:

$$r = \alpha \cdot \frac{(\lambda+\mu-\nu)\alpha - 2\lambda}{2\alpha\mu - (\lambda+\mu+\nu)}, \tag{16}$$

$$A_1 = -r + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2\mu(\lambda+\mu-\nu) - (\lambda+\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu)\alpha + \lambda(\lambda+\mu+\nu)}{2\alpha\mu - (\lambda+\mu+\nu)}. \tag{17}$$

Jedem zusammengehörigen Werthepaare r, A_1 entspricht nach den Gleichungen (16) und (17) *ein* bestimmter Werth α und umgekehrt jedem Werth α *ein* bestimmtes Werthepaar r, A_1*). Führen wir die den Parametern r und A_1 gleichen Ausdrücke in die Differentialgleichung (8) (S. 491) ein, so wird ihre rechte Seite eine rationale Function von α.

Es sei x_0 ein specieller Werth des Argumentes x mit positivem imaginärem Bestandtheil. Ferner seien C, C_1, C_2 gegebene endliche (complexe) Constante, von denen jedenfalls C_1 von 0 verschieden sein soll. Aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen folgt dann:

44. *Giebt man dem Parameter α irgend einen Werth α_0, sodass der zugehörige Werth $r = r_0$ von x_0 verschieden ist, so existirt stets eine und nur eine Particularlösung $S_0(x)$ der Art, dass ein Zweig von ihr in der Nähe des Punktes x_0 regulär ist und für $x = x_0$ die Gleichungen:*

$$S_0 = C, \quad S_0' = C_1, \quad S_0'' = C_2$$

erfüllt.

---

*) An die Stelle der Gleichung (17) könnte auch die folgende:

$$A_1 = -r + \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2\mu(\lambda+\mu-\nu) - (\lambda+\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu)\alpha + \lambda(\lambda+\mu+\nu)}{2\alpha\mu - (\lambda+\mu+\nu)} \tag{17*}$$

treten.

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist als Function des Parameters α betrachtet regulär in der Nähe eines jeden Punktes α, dem ein von x verschiedener Werth r zugehört. Auf Grund dieser Thatsache gestattet uns die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen dem Satze 44 folgende Erweiterung hinzuzufügen:

45. *Wird die Particularlösung S_0 als Function von x und α aufgefasst, so ist ihr soeben definirter Zweig auch in der Nähe des Punktes x_0, α_0 regulär.*

Das Argument x der Function S_0 deuten wir analog wie in der Theorie der s-Function auf einer (allgemein gesprochen) unendlichblättrigen Riemann'schen Fläche. Es sei x_1 irgend ein zweiter, ebenso wie x_0 in einem bestimmten Blatte gelegener Werth von x, der von $0, \infty, 1$ verschieden und kein Unendlichkeitspunkt der Function $S_0(x, \alpha_0)$ ist. Nach der Methode der analytischen Fortsetzung im Sinne von Weierstrass kann man aus dem ursprünglichen Element der Function $S_0(x, \alpha)$, welches nach Satz 45 für die Umgebung des Punktes x_0, α_0 erklärt ist, mittelst einer endlichen Anzahl von Schritten ein anderes für die Umgebung der Stelle x_1, α_0 gültiges ableiten. Auf solche Weise gewinnen wir als Resultat den Satz:

46. *Die in den Sätzen 44 und 45 definirte Particularlösung $S_0(x, \alpha)$ ist in der Nähe eines jeden Punktes x_1, α_0 regulär, wenn nur x_1 von $0, \infty, 1$ verschieden und kein Unendlichkeitspunkt der Function $S_0(x, \alpha_0)$ ist.*

Statt der Particularlösung $S_0(x, \alpha)$ können wir, wenn es zweckmässig sein sollte, leicht eine andere $\big(S_0(x, \alpha)\big)$ einführen vermöge der Gleichung:

$$(S_0) = \frac{\pi S_0 + \varrho}{\sigma S_0 + \tau}, \tag{18}$$

wo π, ϱ, σ, τ solche endliche, von x und α unabhängige Grössen mit der Determinante $\pi\tau - \varrho\sigma = 1$ sein mögen, dass $\sigma S_0 + \tau$ für $x = x_0$, $\alpha = \alpha_0$ nicht verschwindet, damit $x = x_0$, $\alpha = \alpha_0$ kein Unendlichkeitspunkt der Function $\big(S_0(x, \alpha_0)\big)$ ist. Aus den Gleichungen:

$$\begin{cases} (S_0) = \dfrac{\pi S_0 + \varrho}{\sigma S_0 + \tau}, \\ (S_0') = \dfrac{S_0'}{(\sigma S_0 + \tau)^2}, \\ (S_0)'' = \dfrac{(\sigma S_0 + \tau) S_0'' - 2\sigma S_0'^2}{(\sigma S_0 + \tau)^3} \end{cases} \tag{19}$$

folgt:

(S_0), $(S_0)'$, $(S_0)''$ sind für $x = x_0$, $\alpha = \alpha_0$ ebenfalls drei bestimmten, endlichen Constanten gleich, von denen die mittlere nicht verschwindet.

Aus dem Umstande, dass für die Function (S_0) dann dasselbe gilt, was in den Sätzen 45 und 46 von der Function S_0 ausgesagt ist, schöpfen wir die Berechtigung, ohne dass der Allgemeinheit der Unter-

suchung Abbruch geschieht, die Constanten C, C_1, C_2 später sogleich so gewählt vorauszusetzen, dass noch gewisse Bedingungen erfüllt sind, z. B. die, dass für eine endliche Zahl von anzugebenden Argumentwerthen ein bestimmt abgegrenzter Zweig der Function $S_0(x, \alpha_0)$ nicht unendlich gross wird.

§ 12.

Die symmetrischen S-Functionen und ihre Kreisbogendreiecke.

Wie im vorigen Paragraphen möge noch ferner der *Hauptfall* vorliegen.

Wir setzen weiterhin voraus, dass keiner der Exponenten λ, μ, ν ganzzahlig sei. Es sei mit $S_0^*(x, \alpha)$ ein solcher Zweig der im vorigen Paragraphen definirten Function $S_0(x, \alpha)$ bezeichnet, der für die Halbebene $\mathfrak{P}$ erklärt und durch analytische Fortsetzung aus der nach Satz 45 zunächst für die Umgebung der Stelle x_0 definirten Entwicklung der Function gewonnen ist Wir nehmen jetzt, wie wir am Ende des vorigen Paragraphen ankündigten, nachträglich an, es seien die Constanten C, C_1, C_2 so gewählt, dass erstens keine der im Satz 5 S. 491 bestimmten Fundamentalsubstitutionen A, B, Γ für den Zweig $S_0^*(x, \alpha_0)$ den Unendlichkeitspunkt der Ebene der Function als Fixpunkt besitzt, zweitens $S_0^*(x, \alpha_0)$ für $x = r_0$ nicht ∞ wird.

Es sei jetzt α_0 insbesondere ein solcher specieller Werth des Parameters α, dass die zugehörigen Werthe r_0 und A_1 reell sind und r_0 von $0, \infty, 1$ verschieden ist. Dann ist die Function $S_0(x, \alpha_0)$ eine *symmetrische* S-Function, und ihrem Zweige $S_0^*(x, \alpha_0)$ entspricht folglich ein Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt. Der geometrischen Untersuchung der Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt entnehmen wir das Resultat, dass für $\alpha = \alpha_0$ (im Hauptfalle) entweder alle 6 Fixpunkte der Fundamentalsubstitutionen A, B, Γ verschieden sind oder drei, von denen jede der Substitutionen einen liefert, in denselben Punkt zusammenfallen, die drei übrigen aber von letzterem und von einander verschieden sind. Wir können daher stets drei für $\alpha = \alpha_0$ nicht zusammenfallende Fixpunkte auswählen. Dieselben seien mit $e_i(\alpha)$ für $i = 1, 2, 3$ bezeichnet.

Würden wir dem Parameter α nur solche Werthe α_s in hinreichender Nähe von α_0 geben, welche symmetrische Functionen $S_0^*(x, \alpha_s)$ bedingen und α_s von α_0 aus continuirlich ändern, so würde auf Grund des Satzes 46 auch die Begrenzung des der Function $S_0^*(x, \alpha_s)$ zugehörigen Kreisbogendreiecks sich continuirlich ändern und damit auch das System der drei Kreise, deren Bogen die Begrenzung bilden. Ist es nun möglich, aus der Function $S_0^*(x, \alpha)$ eine andere Particularlösung $\bar{S}^*(x, \alpha)$ abzuleiten, so dass die drei Kreise der Begrenzung der

$\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ entsprechenden Kreisbogendreiecke für die verschiedenen Werthe α_s mit den für $S_0^*(x, \alpha_0) = \bar{S}^*(x, \alpha_0)$ sich ergebenden Kreisen zusammenfallen? Im bejahenden Falle dürfen auch die drei Fixpunkte für den Zweig $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$, die für $\alpha = \alpha_0$ die Werthe $e_i(\alpha_0)$ haben, sich mit α_s nicht ändern. Diese Bedingung ist aber gerade ausreichend, um überhaupt eine neue Particularlösung $\bar{S}(x, \alpha)$ zu bestimmen und für letztere folgenden Satz nachzuweisen:

47. *Die Particularlösung $\bar{S}(x, \alpha)$ mit dem $S_0^*(x, \alpha)$ entsprechenden Zweige $\bar{S}^*(x, \alpha)$ ist in der Nähe eines jeden Punktes x_1, α_0 regulär, wenn nur x_1 von $0, \infty, 1$ verschieden und keine Unendlichkeitsstelle der Function $\bar{S}(x, \alpha_0) = S_0(x, \alpha_0)$ ist.*

Aus der geometrischen Theorie der Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt wissen wir nun, dass es in jedem Falle überhaupt nur eine *endliche* Zahl verschiedener Schaaren solcher Kreisbogendreiecke für vorgegebene Werthe λ, μ, ν giebt, also auch nur eine endliche Zahl verschiedener Systeme dreier Kreise, deren Bogen die Begrenzungen bilden, wenn wir wieder solche Systeme nicht als verschieden betrachten, die durch lineare Transformation in einander übergeführt werden können. Dass nun die drei Kreise der Begrenzung der Kreisbogendreiecke, welche dem Zweige $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ für die verschiedenen Werthe α_s entsprechen, bei Aenderung von α_s sich etwa linear transformirten, ist deswegen ausgeschlossen, weil die drei ausgewählten Fixpunkte unverändert bleiben. Es folgt daher, was wir wünschten:

48. *Die zu $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ für die verschiedenen Werthe α_s in hinreichender Nähe von α_0 gehörenden Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt können sich nothwendig nur darin unterscheiden, dass ihr Einschnitt mehr oder weniger verlängert oder zusammengezogen ist.*

Da nun nach dem Satze 47 der Zweig $\bar{S}^*(x, \alpha)$ auch in der Nähe des Punktes $x = r_0$, $\alpha = \alpha_0$ regulär ist, so folgt:

49. *Der Knotenpunkt d_1, d. h. der Werth $\bar{S}^*(r, \alpha)$, ist eine in der Nähe von α_0 reguläre Function von α.*

Hieraus ergiebt sich folgendes Endresultat:

50. *Lassen wir α von α_0 aus sich continuirlich so ändern, dass der entsprechende Nebenpunkt r, ohne gleich $0, \infty, 1$ zu werden, nur solche Werthe α_s annimmt, welche symmetrische Functionen $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ bedingen, so ändern die der Function $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ entsprechenden Kreisbogendreiecke ihre Begrenzung einzig und allein dadurch, dass ihr Einschnitt sich continuirlich fortsetzt oder zusammenzieht.*

Wir behalten jetzt keine andere einschränkende Annahme bei als die, dass der Hauptfall vorliege und keiner der (reellen oder rein imaginären) Exponenten λ, μ, ν ganzzahlig sei. Das Endergebniss der

vorstehenden Betrachtungen findet dann seinen Ausdruck in der folgenden Umkehrung des Satzes 50, die indess keines neuen Beweises bedarf, da jedem Kreisbogendreieck ein und nur ein Werth α, entspricht:

51. *Wenn wir ausgehend von einem beliebigen Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt den Einschnitt desselben continuirlich verlängern oder zusammenziehen, so wandert dementsprechend der Nebenpunkt r continuirlich in dem bezüglichen Intervall der Axe des Reellen.*

Auf Grund der Thatsache, dass die Anwendung der in den §§ 7—10 entwickelten Methoden uns *alle* Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt für gegebene Exponenten λ, μ, ν liefert, können wir hinzufügen:

52. *Gelangen wir hierbei zu einem ersten oder zweiten Grenzdreieck, so erreicht der Nebenpunkt r nothwendig einen der singulären Punkte* $0, \infty, 1$ *und zwar z. B. den Punkt* 1, *wenn der Knotenpunkt* d_1 *in den Eckpunkt* c_1 *oder in den Punkt* c_1^*, *den zweiten Schnittpunkt der Seiten* $c_1 a_1$ *und* $c_1 b_1$, *übergeht.*

Unsere bisherige Untersuchung lässt sich nun leicht auf den Fall übertragen, dass einer oder mehrere der Exponenten *ganzzahlig* sind, während nach wie vor der Hauptfall vorliegt. Wir wollen auf die geringen Modificationen, welche die Betrachtungen dieses Paragraphen hierbei zu erleiden haben, nicht näher eingehen. Als Resultat ergiebt sich, dass die Sätze 51 und 52 auch bei Zulassung ganzzahliger Exponenten unveränderte Gültigkeit behalten.

Ein weiterer Schritt wird dann der sein, dass wir unsere Untersuchung auch auf den Ausnahmefall zu übertragen unternehmen. Sind im Ausnahmefall alle drei Exponenten rein imaginär oder zwei rein imaginär, der dritte reell, so giebt es ja überhaupt nur ein einziges hierher gehöriges Kreisbogendreieck mit oder ohne Knotenpunkt für gegebene Exponenten λ, μ, ν, während der Ausnahmefall von vorneherein ausgeschlossen ist, wenn nur einer der Exponenten rein imaginär, die übrigen reell sind. So bleibt nur der Fall dreier *reeller* Exponenten noch zu betrachten übrig. Die S-Functionen genügen entweder einer Differentialgleichung vom Typus A oder einer solchen vom Typus B (vgl. S. 493). Die durch die Gleichung (16) (S. 510) gegebene Substitution geht jetzt über in:

$$r = \alpha. \tag{16*}$$

Ferner gilt die Formel (17), wenn der Typus A vorliegt, die Formel (17*) (S. 510, Anm. 1), wenn der Typus B vorliegt; diese Formeln nehmen indess die einfache Gestalt der Gleichungen (9^a) und (9^b) (S. 493) an. Alle für den Hauptfall ausgeführten Entwicklungen dieses und des vorigen Paragraphen bleiben jetzt unverändert auch für den Ausnahmefall gültig, wenn wir nur die Voraussetzung hinzufügen,

dass α_0 von dem Werthe $r^{***} = \frac{\lambda}{\mu}$ (Gl. (12), S. 492) ausgeschlossen ist. Denn da dem Zweige $S_0^*(x, r^{***})$ das Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles entspricht, so können wir in diesem Falle allgemein nicht drei von einander verschiedene Fixpunkte angeben, auch nicht bei Zuhülfenahme von analytischen Fortsetzungen des Zweiges

$$S_0^*(x, r^{***}).$$

Dem Satze 52 (S. 514) haben wir noch folgende Ergänzung hinzuzufügen, von deren Richtigkeit man sich wieder leicht überzeugt im Hinblick darauf, dass unsere Constructionsmethoden *alle* Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und gegebenen Exponenten λ, μ, ν liefern:

52*. *Stets dann und nur dann hat der Nebenpunkt r gerade den Werth r^{***} erreicht, wenn wir bei Fortsetzung des Einschnittes in einem Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt zu einem in zwei Zweiecke zerfallenden Bereiche oder beim Zusammenziehen des Einschnittes zu einem einzigen Zweieck gelangt sind, d. h. wenn das Kreisbogendreieck (ebenso wie der Zweig $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$) ausartet. An die Stelle des ausgearteten Bereiches tritt das Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles; dasselbe gehört dann zu einer Particularlösung, die eben nicht durch den betrachteten Grenzübergang aus der Function $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ hervorgeht.*

§ 13.

Das Verhalten der symmetrischen S-Functionen beim Uebergang zum zweiten Grenzdreieck.

Wir werfen die Frage auf: *Wie verhält sich die im* § 12 (S. 512) *definirte Function $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ des Hauptfalles oder des Ausnahmefalles, wenn das ihr entsprechende Kreisbogendreieck durch Fortsetzung des Einschnittes schliesslich in zwei Theile zerfällt, von denen einer ein Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt ist, d. h. also, kurz gesagt, beim Uebergang zum zweiten Grenzdreieck?*

Aus unseren geometrischen Untersuchungen ergeben sich zwei Möglichkeiten bei diesem Grenzübergang. Die Verlängerung des Einschnittes kann schliesslich einen der begrenzenden Kreisbogen innerlich treffen oder auf eine Ecke des Bereiches stossen (vgl. z. B. Satz 31, S. 502). Bei der ersten Möglichkeit wurde ein Zweieck „abgeschnürt", wie wir sagten, und das übrig bleibende Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt besass den Endwerth des Knotenpunktes als neue Ecke, bei der zweiten Möglichkeit wurde eine Kreisfläche „abgeschnürt", ohne dass das übrig bleibende Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt eine neue Ecke bekam. Wir wollen unsere Betrachtungen an ein specielles

Beispiel für die erste Möglichkeit anlehnen, jedoch ausdrücklich hervorheben, dass sich dieselben, wie man leicht erkennt, unmittelbar auf jedes beliebige andere Beispiel für die erste oder zweite Möglichkeit übertragen lassen, ev. mit unwesentlichen Modificationen, welche die Bezeichnung, nicht die Sache selbst betreffen. Um uns bestimmter ausdrücken zu können, wollen wir annehmen, dass der Nebenpunkt r sich im Intervall von 1 bis $+\infty$ der Axe des Reellen befindet und nach Satz 52 (S. 514) mit dem singulären Punkte 1 zusammenfällt, während gleichzeitig der Knotenpunkt d_1 desjenigen Kreisbogendreiecks, von dem wir ausgehen, den Punkt c_1^* erreicht. Die Lage des Kreisbogendreiecks möge ferner in der Ebene der Function so gewählt sein, dass der Punkt c_1^* im Endlichen gelegen ist. Diese Annahmen beeinträchtigen ersichtlich die Allgemeingültigkeit unserer Untersuchung nicht.

Ihnen entsprechend sei als Beispiel das bereits in der Einleitung erwähnte Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt auf der Seite $b_1 c_1$ ausgewählt, das als Exponenten $\lambda = 1/2$, $\mu = 2/3$, $\nu = 1/2$ besitzt (Fig. 2, S. 482), Bei Fortsetzung des Einschnittes zerfällt der Bereich schliesslich in das Zweieck $c_1 c_1^*$ mit dem Winkel $\nu\pi$ und das Kreisbogendreieck $a_1 b_1 c_1^*$ mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $(1-\nu)\pi$, was Figur 4 (S. 484) veranschaulicht.

Aus dem Satze 47 (S. 513) folgt zunächst:

53. *Der Functionszweig $\bar{S}^*(x, a_s)$, welcher die Halbebene $\mathfrak{P}$ in bekannter Weise auf das Kreisbogendreieck der Figur 2 abbildet, geht, wenn r gleich* 1 *wird, für jeden von* $0, \infty, 1$ *verschiedenen Punkt x in den Werth desjenigen Zweiges s^* einer Function s für denselben Punkt x über, welcher die Halbebene $\mathfrak{P}$ auf das Kreisbogendreieck $a_1 b_1 c_1^*$ ohne Knotenpunkt in bekannter Weise abbildet.*

Uns interessirt jetzt besonders das Verhalten des Zweiges $\bar{S}^*(x, a_s)$ *in der Umgebung des Punktes* 1 bei unserem Grenzübergang.

Es sei um den Punkt 1 der (x)-Ebene ein Kreis mit einem unendlich kleinen Radius ϱ beschrieben, der die Intervalle von 0 bis 1 und von 1 bis $+\infty$ der Axe des Reellen bez. in den Punkten x_0, y_0 schneidet. Die auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegene Hälfte $x_0 y_0$ desselben wird durch die Grenzfunction s^* unseres Beispiels auf eine analytische Curve abgebildet, die von einem Punkte x_1 des Bogens $a_1 c_1^*$ zu einem Punkte y_1 des Bogens $b_1 c_1^*$ ganz *innerhalb* des Kreisbogendreiecks $a_1 b_1 c_1^*$ verläuft, d. h. ohne die Begrenzung desselben noch an einer anderen Stelle als in den Punkten x_1, y_1 zu treffen. Der durch diese Curve am Punkte c_1^* abgetrennte Theil des Kreisbogendreiecks $a_1 b_1 c_1^*$ ohne Knotenpunkt möge den Unendlichkeitspunkt der Ebene der Function nicht enthalten, was durch die Wahl einer hinreichend kleinen Grösse ϱ stets erreicht werden kann. Wir

denken jetzt eine Kreisfläche mit hinreichend kleinem Radius σ mit ihrem Mittelpunkt längs der Curve $x_1 y_1$ entlang geführt. Der Radius σ soll so klein gewählt sein, dass die Kreisfläche bei ihrer Bewegung von der den Punkt c_1^* enthaltenden Hälfte des Bogens $y_1 c_1^*$ nicht geschnitten wird.

Man kann jetzt auf Grund der Sätze 52 (S. 514) und 47 (S. 513) eine positive Grösse ε_0, die $< \varrho$ ist, so angeben, dass für jede den Ungleichungen $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$ genügende Grösse ε erstens der dem Nebenpunkt $r = 1 + \varepsilon$ entsprechende Knotenpunkt d_1 der den Punkt c_1^* enthaltenden Hälfte des Bogens $y_1 c_1^*$ angehört, zweitens die dem Parameter $r = 1 + \varepsilon$ entsprechende Function $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ den Halbkreis $x_0 y_0$ in der (x)-Ebene auf eine Curve abbildet, die von einem Punkte des Bogens $a_1 c_1$ zu einem Punkte des Bogens $b_1 d_1$ geht und ganz innerhalb des soeben vom Kreise mit dem Radius σ beschriebenen Flächenstreifens liegt. Uns kommt es darauf an zu erkennen, dass diese Curve dann nicht in den Bereich des in der Grenze abgeschnürten Zweiecks $c_1 c_1^*$ hineintritt. Denn dies könnte nur stattfinden, wenn sie die den Punkt c_1^* enthaltende Hälfte des Bogens $y_1 c_1^*$ erreichte oder überschritte, was indess nicht möglich ist, da dieses Bogenstück ganz ausserhalb des Flächenstreifens liegt.

54. *Dieses Zweieck wird daher durch die inverse Function $x(\bar{S}^*)$ sein Abbild nothwendig innerhalb der durch den Halbkreis mit dem Radius ϱ abgetrennten Umgebung des singulären Punktes* 1 *in der Halbebene* $\mathfrak{P}$ *finden für alle Werthe des Nebenpunktes $r = 1 + \varepsilon$, wo ε den Ungleichungen $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$ genügt.*

Da wir es aber in der Hand haben, die Grösse ϱ gegen 0 convergiren zu lassen und damit die durch den Kreis mit dem Radius ϱ abgetrennte Umgebung des Punktes 1 beliebig zusammenzuziehen, ohne dass der soeben ausgesprochene Satz seine Gültigkeit verliert, so gewinnen wir das überraschende Resultat:

55. *Die Abbilder aller Punkte des durch den Kreisbogen $d_1 c_1^*$ abgeschnittenen Zweiecks nähern sich dem singulären Punkte* 1 *der Halbebene* $\mathfrak{P}$ *um so mehr, je weiter r in den Grenzwerth* 1 *übergeht und fallen in der Grenze sämmtlich mit dem Punkte* 1 *selbst zusammen.*

In diesem eigenartigen Satze haben wir das interessanteste Ergebniss der vorliegenden Arbeit zu erblicken. In ihm erkennen wir jetzt auch die Berechtigung unserer Ausdrucksweise, von unserem ursprünglichen Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt habe sich bei dem zweiten Grenzübergang ein Zweieck *„abgeschnürt"*, da das Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt der in der Grenze allein in Betracht kommende Theil des zerfallenden Bereiches ist.

Analytisch können wir das Ergebniss unserer Untersuchung allgemein folgendermassen aussprechen:

56. *Die Function* $\bar{S}^*(x, a_s)$ *nimmt einen wohlbestimmten Grenzwerth für* $\lim_{\varepsilon=0} r = 1 + \varepsilon$ *an, wenn* x *gleichzeitig gegen einen von* 1 *verschiedenen Werth convergirt, wird dagegen unbestimmt (d. h. es lassen sich je nach der Art des Grenzüberganges verschiedene Grenzwerthe erreichen), wenn* x *gleichzeitig gegen* 1 *convergirt.*

Die Grenzfunction stimmt für alle Werthe x, die von 1 verschieden sind, wie wir bereits oben anführten, mit derjenigen Function s^* überein, welche die Halbebene $\mathfrak{P}$ in bekannter Weise auf das zweite Grenzdreieck abbildet. Sie besitzt im Punkt $x = 1$, um uns einer Ausdrucksweise Riemann's zu bedienen, eine *„hebbare Unstetigkeitsstelle"*. Die Unbestimmtheit der Grenzfunction im Punkt $x = 1$ wollen wir jetzt *durch die willkürliche Festsetzung* beseitigen, dass *diese Function für* $x = 1$ *und* $r = 1 + 0$ *denjenigen Grenzwerth annehmen soll, den die Function* s^* *für* $x = 1$ *besitzt.* In diesem Sinne soll es daher auch verstanden sein, wenn wir jetzt kurz ohne Einschränkung sagen:

57. *Für* $r = 1 + 0$ *geht die Function* $\bar{S}^*(x, a_s)$ *in diejenige Function* s^* *über, welche die Halbebene* $\mathfrak{P}$ *in bekannter Weise auf das zweite Grenzdreieck abbildet.*

Dass analoge Betrachtungen auch in den im § 4 behandelten speciellen Fall $\lambda = \mu = \nu = 0$ gelten, will ich hier nur eben erwähnen.

§ 14.

Ueberblick über alle Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt für beliebig vorgegebene Exponenten λ, μ, ν.

Die in den Sätzen 51, 52 (S. 514) und 52* (S. 515) ausgesprochenen Resultate setzen uns in den Stand, jetzt (abgesehen von den Kreisbogendreiecken des speciellen Falles $\lambda = \mu = \nu = 0$, § 4, S. 493, sowie denjenigen des Uebergangsfalles) alle für vorgegebene Exponenten λ, μ, ν zu construirenden Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und ihre Grenzdreiecke, ohne die drei Kreise ihrer Begrenzung zu ändern, in derjenigen Ordnung an einander zu reihen, in der sie auf einander folgen, wenn der Nebenpunkt r den Sätzen 19—27 des § 5 (S. 497 f.) entsprechend den zulässigen Theil der Axe des Reellen continuirlich durchläuft.

Eine wesentliche Ergänzung der genannten Sätze des § 5 ist im Folgenden darin zu erblicken, dass wir jetzt auch anzugeben vermögen, in welcher Reihe die einzelnen *Grenzdreiecke* hierbei auf einander folgen.

Wir stützen uns auf nachstehende allgemeinen Sätze:

58. *Abgesehen von den Kreisbogendreiecken des speciellen Falles, denjenigen mit drei rein imaginären Winkeln sowie denjenigen des Uebergangsfalles besitzt jedes Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt wenigstens*

ein erstes oder ein zweites Grenzdreieck, wenn es nicht sogar beide besitzt.

50. *Jedes Grenzdreieck vermittelt den Uebergang entweder zwischen solchen zwei Schaaren von Kreisbogendreiecken, bei welchen der Knotenpunkt auf verschiedenen der Seiten $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, $c_1 a_1$ liegt, oder zwischen zwei* **verschiedenen** *Schaaren, bei welchen er auf derselben Seite liegt.*

Zu den *schematischen* Figuren dieses Paragraphen schicke ich sogleich folgende Erklärung voraus. Sie stellen den längs der Axe des Reellen geführten Querschnitt der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche (bez. der zwei einzelnen Blätter) dar, auf der wir nach § 3 (S. 492 und 493) im Hauptfall (bez. im Ausnahmefall) den Parameter r deuten. Anstatt mit 0, ∞, 1 bezeichnen wir indess zweckmässig, wie zu Anfang dieser Arbeit, die singulären Stellen mit a, b, c und verlegen den Punkt b ins Endliche. Die Lage etwa vorkommender Verzweigungspunkte r^* und r^{**} oder eines Doppelpunktes r^{***} ist gleichfalls angedeutet. Die stark ausgezogenen Theile der Axe des Reellen geben das Gebiet an, in dem der Parameter r liegen muss, um eine *symmetrische* S-Function zu bedingen. An jeder der singulären Stellen a, b, c ist durch einen kleinen Kreis bez. Stern angegeben, ob sich ein erstes bez. zweites Grenzdreieck ergiebt, wenn der Parameter r in diese Stelle hineinrückt; endlich sind auch noch die Exponententripel angegeben, die zu den Grenzdreiecken gehören. Die römischen Ziffern geben an, nach welcher Methode die Kreisbogendreiecke der betreffenden Schaar zu construiren sind.

60. *So viele römische Ziffern die Figuren zeigen, so viele* **verschiedene** *Schaaren von Kreisbogendreiecken giebt es in den einzelnen Fällen.* —

Auch den Beispielen der Figurentafel dieser Arbeit sind solche schematische Figuren vorangestellt. Die arabischen Ziffern in denselben an den Stellen a, b, c oder innerhalb der Intervalle deuten für die mit gleicher Ziffer versehenen Kreisbogendreiecke die Lage des Parameters r an.

Die folgenden Betrachtungen sind denen des § 5 (S. 497 f.) entsprechend.

A. *Es seien alle drei Exponenten λ, μ, ν reell* (vgl. Satz 36, S. 506). Wir setzen $\lambda \geqq \mu \geqq \nu$ voraus und unterscheiden, wie früher:

I. den Hauptfall:

$\alpha)$ $\lambda < \mu + \nu$,

$\beta)$ $\lambda > \mu + \nu$,

II. den Ausnahmefall:

$\alpha)$ $\lambda = \mu + \nu$, $\nu > 0$,

$\beta)$ $\lambda = \mu > 0$, $\nu = 0$.

III. den speciellen Fall $\lambda = \mu = \nu = 0$. Dieser besondere Verhältnisse darbietende Fall ist im § 4 (S. 493) erledigt.

Ad. I, α. Hier gilt Fig. 27*). Es giebt stets 6 Grenzdreiecke, welche in der durch folgende Exponententripel angegebenen Reihe cyklisch auf einander folgen:

$$|\lambda-1|, \mu, \nu;\ \lambda, \mu, \nu+1;\ \lambda, |\mu-1|, \nu;\ \lambda+1, \mu, \nu;\ \lambda, \mu, |\nu-1|;\ \lambda, \mu+1, \nu.$$

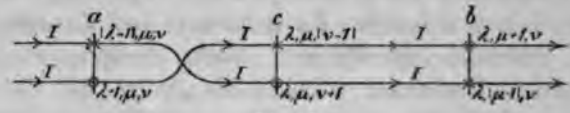


Fig. 27.

Ad. I, β. Je nachdem kein Exponent oder einer oder zwei verschwinden, gilt bez. eine der Figuren 28 a), b), c).

Die für verschwindende Exponenten zum Theil zusammenfallenden

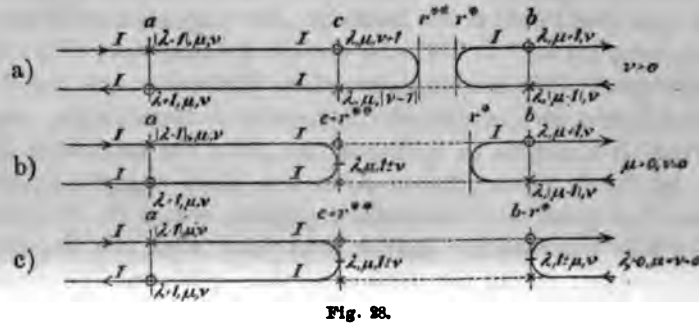


Fig. 28.

sechs Grenzdreiecke folgen jetzt in der durch nachstehende Exponententripel angegebenen Reihe cyklich auf einander:

$$|\lambda-1|, \mu, \nu;\ \lambda, \mu, \nu+1;\ \lambda, \mu, |\nu-1|;\ \lambda+1, \mu, \nu;\ \lambda, |\mu-1|, \nu;\ \lambda, \mu+1, \nu.$$

Ad. II, α. Es gilt Fig. 29. Die Kreisbogendreiecke des einen bez. anderen Blattes entsprechen

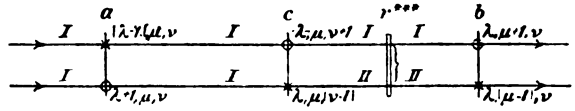


Fig. 29.

der Differentialgleichung vom Typus A bez. der vom Typus B (vgl. S. 493). Ersteren gehören die Grenzdreiecke an:

$$\lambda, \mu+1, \nu;\ |\lambda-1|, \mu, \nu;\ \lambda, \mu, \nu+1,$$

d. h. zwei erste und ein zweites Grenzdreieck, letzteren die Grenzdreiecke:

$$\lambda, |\mu-1|, \nu;\ \lambda+1, \mu, \nu;\ \lambda, \mu, |\nu-1|,$$

d. h zwei zweite und ein erstes Grenzdreieck.

*) Je ein Beispiel für diesen Fall I, α, wie für die Fälle I, β und II, α giebt die von mir gezeichnete Tafel der nachgelassenen Arbeit Ritters: Ueber die hypergeometrische Function mit einem Nebenpunkt, Math. Annalen Bd. 48, p. 1—36, (1896).

Ad. II, β. Es gilt Fig. 30. Das dem Werth $r^{***} = 1$ entsprechende Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt mit den Exponenten $\lambda, \mu, 1$ entspricht dem Uebergangsfalle. Es gehören ferner den Kreis-

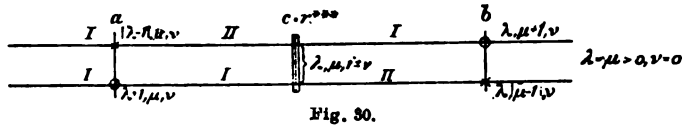


Fig. 30.

bogendreieck des einen Blattes der Differentialgleichung vom Typus A entsprechend die Grenzdreiecke:

$$\lambda, \mu + 1, \nu;\ |\lambda - 1|, \mu, \nu,$$

denen des anderen Blattes der Differentialgleichungen vom Typus B entsprechend die Grenzdreiecke:

$$\lambda, |\mu - 1|, \nu;\ \lambda + 1, \mu, \nu,$$

d. h. jedesmal ein erstes und ein zweites Grenzdreieck an.

Das Beispiel mit den Exponenten $\lambda = \mu = 1/3$, $\nu = 0$ giebt die Tafel dieser Arbeit unter Nr. I.

B. *Es seien die Exponenten λ und μ reell mit der Bedingung $\lambda \geqq \mu$, der Exponent ν rein imaginär* (vgl. § 9, S. 506f.). Es liegt nur der Hauptfall vor. Je nachdem keiner der Exponenten λ, μ oder einer oder zwei verschwinden, gilt bez. die Figur 31a), b), c).

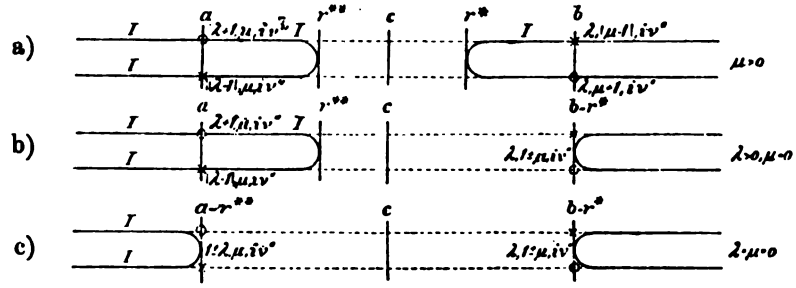


Fig. 31a), b), c).

Die für verschwindende Exponenten zum Theil zusammenfallenden vier Grenzdreiecke folgen jetzt in der durch nachstehende Exponententripel gegebenen Reihe cyklisch aufeinander:

$$\lambda + 1, \mu, i\nu'';\ |\lambda - 1|, \mu, i\nu'';\ \lambda, \mu + 1, i\nu'';\ \lambda, |\mu - 1|, i\nu''.$$

Das Beispiel mit den Exponenten $\lambda = \frac{5}{12}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu'' i = \frac{i}{\pi} \log 3$ giebt die Tafel unter Nr. II.

C. *Es seien zwei Exponenten rein imaginär, der dritte reell* (vgl. § 9, S. 507 f.). Wir unterscheiden:

I. den Hauptfall. Die Exponenten seien $\lambda, i\mu'', i\nu'', \mu'' > \nu''$.

II. den Ausnahmefall. Die Exponenten seien $i\lambda'' = i\mu''$, $\nu = 0$.

Ad. I. Je nachdem $\lambda > 0$ oder $\lambda = 0$ ist, gilt Fig. 32a) oder 32b) Die im speciellen Falle $\lambda = 0$ identischen Grenzdreiecke haben die Exponententripel: $\lambda + 1,\ i\mu'',\ i\nu''$ und $|\lambda - 1|,\ i\mu'',\ i\nu''$.

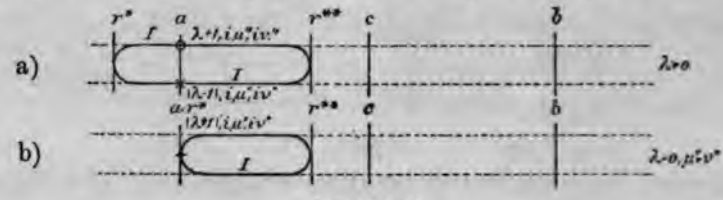


Fig. 32a), b).

Das Beispiel mit den Exponenten $\lambda = \frac{1}{2},\ \mu'' i = \frac{i}{\pi}\log 3,\ \nu'' i = \frac{i}{\pi}\log 2$ giebt die Tafel unter Nr. III.

Ad. II. Es gilt Fig. 33. Es giebt nur ein einziges Kreisbogendreieck, nämlich nur für den Uebergangsfall, und zwar ein solches ohne Knotenpunkt mit den Exponenten $i\lambda'' = i\mu'',\ \nu = 0$ (Fig. 23, S. 507).

Fig. 33.

D. *Es seien alle drei Exponenten rein imaginär und* $\lambda'' \geq \mu'' \geq \nu''$ (vgl. § 10, S. 508 f.). Wir unterscheiden:

I. den Hauptfall $\lambda'' > \mu'' + \nu''$.

II. den Ausnahmefall $\lambda'' = \mu'' + \nu''$.

Grenzdreiecke giebt es nicht.

Ad. I. Es gilt Fig. 34 (vgl. Fig. 26, S. 509).

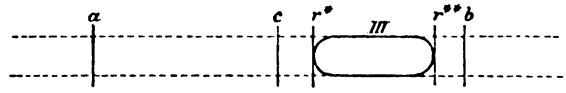


Fig. 34.

Ad. II. Es gilt Fig. 35. Es giebt nur ein einziges Kreisbogen-

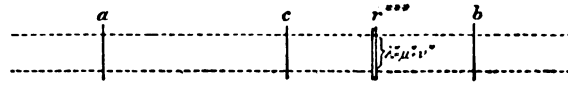


Fig. 35.

dreieck mit Knotenpunkt und zwar für $r = r^{***}$, also nur ein solches für den Uebergangsfall.

Periodic orbits.

(With a plate of figures.)

By

G. H. Darwin of Cambridge.

§ 1.

Introduction.

This paper is an abridgement of one which appeared recently in vol. 21 of the Acta Mathematica, and the reader is referred to that Journal for details omitted here. The original numbering of the equations, has been retained, so that the numbers do not now run consecutively *).

Since the date of the original publication my attention has been drawn to a certain incompleteness in the series of curves traced. The nature of the difficulty is indicated below, and I hope that I shall soon be in a position to make good the deficiency, by the help of suggestions made to me by my friend Mr Hough.

The existing methods of treating the Problem of the three Bodies are only applicable to the determination, by approximation, of the path of the third body when the attraction of the first largely preponderates over that of the second. A general solution of the problem is accordingly not to be obtained by these methods.

In the Lunar and Planetary theories it has always been found necessary to specify the motion of the perturbed body by reference to a standard curve or intermediate orbit, of which the properties are fully known. The degree of success attained by any of these methods has always depended on the aptness of the chosen intermediate orbit for the object in view. It is probable that future efforts will resemble their precursors in the use of standard curves of reference.

*) Since the publication of my paper in the Acta Mathematica, I have seen two important papers by M. Burrau in the Astronomischen Nachrichten, nos 3230 and 3251. In these investigations 'Jove' is taken to have a mass equal to that of the 'Sun', and the orbits considered are those which belong to the family here denoted by the letter *b*. The orbits of 'ejection' from the Sun and Jove have doubtless a great importance in the complete classification.

Mr G. W. Hill's papers on the Lunar Theory*) mark an epoch in the history of the subject. His substitution of the Variational Curve for the ellipse as the intermediate orbit is not only of primary importance in the Lunar Theory itself, but has pointed the way towards new fields of research.

The variational curve may be described as the distortion of the moon's circular orbit by the solar attraction. It is one of that class of periodic solutions of the Problem of the three Bodies which forms the subject of the present paper.

Of these solutions M. Poincaré writes:

«Ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable»**).

The periodic orbits, considered in this paper, are those of the simplest character, for they arise when the perturbed body has infinitely small mass, when the two others revolve about one another in circles, and when the three bodies are coplanar.

M. Poincaré remarks that there is a quadruple infinity of periodic solutions, for there are four arbitrary constants viz. the period of the infinitesimal body, the constant of energy, the moment of conjunction, and the longitude of conjunction***). For the purpose of the present investigation this quadruple infinity may however be reduced to a single infinity, for the moment and longitude of conjunction need not be considered; and the scale on which we draw the circular orbit of the second body round the first is immaterial. Thus we are only left with the constant of relative energy of the motion of the infinitesimal body as a single arbitrary.

Notwithstanding the great interest attaching to periodic orbits, no suggestion has, up to the present time, been made by any writer for a general method of determining them. As far as I can see, the search resolves itself into the discussion of particular cases by numerical processes, and such a search necessarily involves a prodigious amount of work. It is not for me to say whether the enormous labour I have undertaken was justifiable in the first instance; but I may remark that I have been led on, by the interest of my results, step by step, to investigate more and again more cases. Now that so much has been attained I cannot but think that the conclusions will prove of interest both to astronomers and to mathematicians.

In my earlier work I received the greatest assistance from

*) *American Journal of Mathematics*, Vol. I pp. 5—29, 129—147, 245—260 and *Acta Mathematica*, T. 8 pp. 1—36.

**) *Mécanique Céleste*, T. I, p. 82.

***) *Mécanique Céleste*, T. I, p. 101.

Mr J. W. F. Allnutt; his early death has deprived me of a friend and of an assistant, whose zeal and care were not to be easily surpassed. Since his death Mr J. I. Craig (of Emmanuel College) and Mr M. J. Berry (of Trinity College) have rendered and are rendering valuable help. I have besides done a great deal of computing myself*).

The reader will see that the figures have been admirably rendered by Mr Edwin Wilson of Cambridge. The wood-cuts in the text are the same as those used in the Acta Mathematica, but the plates are reproductions of the original plates.

The first part of the paper is devoted to the mathematical methods employed, the second part contains the discussion of the results. Tables of numerical results are given in the original paper, but are omitted from this abridgement.

Part. I.

§ 2.

Equations of motion.

The particular case of the problem of the three bodies, considered in this paper, is where the mass of the third body is infinitesimal compared with that of either of the two others which revolve about one another in circles, and where the whole motion takes place in one plane.

For the sake of brevity the largest body will be called the Sun, the planet which moves round it will be called Jove, and the third body will be called the planet or the satellite, as the case may be.

Jove J, of unit mass, moves round the Sun S, of mass ν, in a circle of unit radius SJ, and the orbit to be considered is that of an infinitesimal body P moving in the plane of Jove's orbit.

Let S be the origin of rectangular axes; let SJ be the x axis, and let the y axis be such that a rotation from x to y is consentaneous with the orbital motion of J. Let x, y be the heliocentric coordinates of P, so that $x-1$, y are the jovicentric coordinates referred to the same x axis and a parallel y axis.

Let r denote SP, and θ the angle JSP; let ϱ denote JP, and let the angle SJP be $180^0 - \psi$. Thus r, θ are the polar heliocentric coordinates, and ϱ, ψ the polar jovicentric coordinates of P.

Let n denote Jove's orbital angular velocity, so that in accordance with Kepler's law

$$n^2 = \nu + 1.$$

*) About two thirds of the expense of these computations have been met by grants from the Government Grant and Donation Funds of the Royal Society.

The equations of motion of a particle referred to axes rotating with angular velocity ω, under the influence of forces whose potential is U, are

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dt}-\omega Y\right)-\omega\left(\frac{dY}{dt}+\omega X\right)=\frac{\partial U}{\partial X},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dY}{dt}+\omega X\right)+\omega\left(\frac{dX}{dt}-\omega Y\right)=\frac{\partial U}{\partial Y},$$

where t is the time.

Now in the present problem, if the origin be taken at the centre of inertia of the Sun and Jove with SJ for the X axis, the coordinates of P are $X=x-\frac{1}{\nu+1}$, $Y=y$. Also the potential function is $\frac{\nu}{r}+\frac{1}{\varrho}$. Hence the equations of motion are

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2n\frac{dy}{dt}-(\nu+1)\left(x-\frac{1}{\nu+1}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu}{r}+\frac{1}{\varrho}\right),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}-(\nu+1)y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu}{r}+\frac{1}{\varrho}\right).$$

But $r^2=x^2+y^2$, $\varrho^2=(x-1)^2+y^2$. Hence if we put

$$2\Omega=\nu\left(r^2+\frac{2}{r}\right)+\left(\varrho^2+\frac{2}{\varrho}\right), \quad (1)$$ *)

the equations of motion may be written

$$\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}-2n\frac{dy}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial x},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial y},\end{cases} \quad (1)$$

where $n^2=\nu+1$.

Let the second of (1) be multiplied by $2\frac{dx}{dt}$, and the third by $2\frac{dy}{dt}$, let the two be added together and integrated, and we have Jacobi's integral

$$V^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2\Omega-C, \quad (2)$$

where C is a constant, and V denotes the velocity of P relatively to the rotating axes.

Let s be the arc of the planet's relative orbit measured from any fixed point, and let φ be the inclination to the x axis of the outward normal of the orbit. Then

$$\frac{dx}{ds}=-\sin\varphi, \qquad \frac{dy}{ds}=\cos\varphi.$$

*) It is perhaps worth noting that 2Ω may be written in the form

$$\nu(r-1)^2\left(1+\frac{2}{r}\right)+(\varrho-1)^2\left(1+\frac{2}{\varrho}\right)+3(\nu+1).$$

Hence if P be the component of inward effective force,

$$P = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}\cos\varphi - \frac{\partial \Omega}{\partial y}\sin\varphi. \tag{3}$$

Therefore

$$PV = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{dx}{dt}.$$

Now if R denotes the radius of curvature at the point x, y, of the relative orbit of P,

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

On substituting for the second differentials from (1), we have

$$\frac{V^2}{R} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{dy}{dt} - 2n\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right].$$

Hence by means of (2) and (3)

$$\frac{1}{R} = \frac{P}{V^2} - \frac{2n}{V}. \tag{4}$$

If the value of Ω in (1) be substituted in (3) we easily find

$$\left\{\begin{aligned} &P = \nu\left(\frac{1}{r^2} - r\right)\cos(\varphi - \theta) + \left(\frac{1}{\rho^2} - \rho\right)\cos(\varphi - \psi). \\ &\text{and} \\ &V^2 = \nu\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho}\right) - C. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Thus the curvature at any point of the orbit is expressible in terms of the coordinates and of the direction of the normal. If s_0, φ_0, x_0, y_0, t_0 be the initial values of the same quantities, it is clear that

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{R}, \\ x &= x_0 - \int_{s_0}^{s} \sin\varphi\, ds, \\ y &= y_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\varphi\, ds, \\ n(t - t_0) &= \int_{s_0}^{s} \frac{n}{V} ds. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Also the polar coordinates of P relatively to axes fixed in space with heliocentric origin are r, $\theta + n(t - t_0)$, and with jovicentric origin are ρ, $\psi + n(t - t_0)$.

Hence the determination of x and y involves in each case two integrations, and another integration is necessary to find the time, and the orbit in space.

§ 3.

Partition of relative space according to the value of the relative energy*).

It may be easily shown that the function Ω arises from three sources, and that it is the sum of the rotation potential, the potential of the Sun and the disturbing function for motion relatively to the Sun. Hence Ω is the potential of the system, inclusive of the rotation potential. Thus the equation $V^2 = 2\Omega - C$ may be called the equation of relative energy.

For a real motion of the planet V^2 must be positive, and therefore 2Ω must be greater than C. Accordingly the planet can never cross the curve represented by $2\Omega = C$, and if this curve has a closed branch with P inside, it must always remain inside, or if P be outside, it must always remain so.

This is Mr Hill's result in his celebrated memoir**) on the Lunar Theory, save that the value of Ω used here has not been reduced to an approximate form.

We shall now proceed to a consideration of the family of curves $2\Omega = C$. That is to say we shall find, for a given value of C, the locus of points for which the three bodies may move for an instant as parts of a single rigid body. We are clearly at the same time finding the curves of constant velocity relatively to the moving axes for other values of C.

Some idea of the nature of the family of curves may be derived from general considerations; for when r and ϱ are small the equation approximates to $\frac{2\nu}{r} + \frac{2}{\varrho} = C$, and the curves are like the equipotentials due to two attractive particles of masses 2ν and 2.

Thus for large values of C they are closed ovals round S and J, the one round S being the larger. As C declines the ovals swell and coalesce into a figure-of-8, which then assumes the form of an hour-glass with a gradually thickening neck.

When on the other hand r and ϱ are large the equation approxi-

---

*) A somewhat similar investigation is contained in a paper by M. Bohlin, *Acta Math.* T. 10, p. 109 (1887). The author takes the Sun as a fixed centre, which is equivalent to taking the Sun's mass as very large compared with that of Jove; he thus fails to obtain the function Ω in the symmetrical form used above.

**) *Amer. Journ. of Math.* Vol. I, pp. 5—29.

mates to $\nu r^2 + \rho^2 = C$, and this represents an oval enclosing both S and J, which decreases in size as C decreases.

It is thus clear by general reasoning that for large values of C the curve consists of two closed branches round S and J respectively, and of a third closed branch round both S and J. The spaces within which the velocity of the planet is real are inside of either of the smaller ovals, and outside of the larger one. Since the larger oval shrinks and the hour-glass swells, as C declines, a stage will be reached when the two curves meet and coalesce. This first occurs at the end of the small bulb of the hour-glass which encloses J. The curve is then shaped like a horse-shoe, but is narrow at the toe and broad at the two points.

For still smaller values of C, the horse-shoe narrows to nothing at the toe, and breaks into two elongated pieces. These elongated pieces, one on each side of SJ, then shrink quickly in length and slowly in breadth, until they contract to two points when C reaches its minimum.

This sketch of the sequence of changes shows that there are four critical stages in the history of the curves,

(α) when the internal ovals coalesce to a figure-of-8;

(β) when the small end of the hour-glass coalesces with the external oval;

(γ) when the horse-shoe breaks;

(δ) when the halves of the broken shoe shrink to points.

The points of coalescence and rupture in (α), (β), (γ) are obviously on the line SJ (produced either way), and the points in (δ) are symmetrically situated on each side of SJ.

We must now consider the physical meaning of the critical points, and show how to determine their positions.

In the first three cases the condition which enables us to find the critical point is that a certain equation derived from $2\Omega = C$ shall have equal roots.

(α) The coalescence into a figure-of-8 must occur between S and J; hence $r = 1 - \rho$, and $2\Omega = C$ becomes

$$\nu\left[(1-\rho)^2 + \frac{2}{1-\rho}\right] + \rho^2 + \frac{2}{\rho} = C. \tag{6}$$

This equation must have equal roots, and by differentiation we find that ρ must satisfy,

$$(\nu+1)\rho^5 - (3\nu+2)\rho^4 + (3\nu+1)\rho^3 - \rho^2 + 2\rho - 1 = 0,$$

An approximate solution for large values of ν is given by

$$\rho = \frac{1}{(3\nu+1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}}. \tag{7}$$

If this value of ϱ be substituted in (6) we obtain the approximate result

$$C = 3\nu + \frac{2\nu}{3\nu+1} + 3(3\nu+1)^{\frac{1}{3}}. \tag{8}$$

In this paper the value adopted for ν is 10, and the solution of the quintic equation gives,

$$\varrho = \cdot 28249, \quad r = \cdot 71751, \quad C = 40\cdot 1821. \tag{9}$$

For even so small a value of ν as 10, the approximation is not far from the truth, and for such cases as actually occur in the solar system it would be accurate enough for every purpose.

The formula from which ϱ has been derived is equivalent to $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$, and since $y = 0$, we have also $\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$. Hence the point is one of zero effective force at which the planet may revolve without motion relatively to the Sun and Jove.

This position of conjunction between the two larger bodies is obviously one of dynamical instability.

(β) The coalescence of the hour-glass with the external oval must occur at a point in SJ produced beyond J; hence $r = 1 + \varrho$, and $2\Omega = C$ becomes

$$\nu\left[(1+\varrho)^2 + \frac{2}{1+\varrho}\right] + \varrho^2 + \frac{2}{\varrho} = C.$$

This equation must have equal roots, and by differentiation we find that ϱ must satisfy

$$(\nu+1)\varrho^5 + (3\nu+2)\varrho^4 + (3\nu+1)\varrho^3 - \varrho^2 - 2\varrho - 1 = 0.$$

An approximate solution, for large values of ν, is

$$\varrho = \frac{1}{(3\nu+1)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}}, \tag{10}$$

$$C = 3\nu - \frac{2\nu}{3\nu+1} + 3(3\nu+1)^{\frac{1}{3}}. \tag{11}$$

When ν is 10,

$$\varrho = \cdot 34700, \quad r = 1\cdot 34700, \quad C = 38\cdot 8760. \tag{12}$$

The approximate solution would again be found to be near the truth, and in such cases as actually occur in the solar system the approximate formulae (10), (11) would lead to a high degree of accuracy.

This second critical point is another one at which the planet may revolve without motion relatively to the Sun and Jove, and such a motion is dynamically unstable.

(γ) The thinning of the toe of the horse-shoe to nothing must occur at a point in JS produced beyond S; hence $\varrho = r + 1$, and $2\Omega = C$ becomes

$$\nu\left(r^2+\frac{2}{r}\right)+(r+1)^2+\frac{2}{r+1}=C.$$

This equation must have equal roots, and r must satisfy

$$(\nu+1)r^5+(2\nu+3)r^4+(\nu+3)r^3-\nu(r^2+2r+1)=0,$$

a quintic for finding r.

If we put $r=1-\xi$, the equation becomes

$$(\nu+1)\xi^5-(7\nu+8)\xi^4+(19\nu+25)\xi^3-(24\nu+37)\xi^2+(12\nu+26)\xi-7=0.$$

This equation may be solved by approximation, and the first approximation, which is all that I shall consider, gives

$$\xi=1-r=\frac{7}{12\nu+26}. \tag{13}$$

Thus the approximate solution is $r=1-\frac{7}{12\nu+26}$, and

$$C=3\nu+5-\frac{7}{2}\xi+\left(3\nu+\frac{5}{4}\right)\xi^2. \tag{14}$$

The solution of the quintic equation gives

$$r=\cdot 94693,\quad \rho=1\cdot 94693,\quad C=34\cdot 9054 \tag{15}$$

This critical point is another one at which the three bodies may move round without relative motion, but as before the motion is dynamically unstable.

(δ) The fourth and last critical position occurs when C is a minimum so that $\frac{\partial C}{\partial r}=0$, $\frac{\partial C}{\partial \rho}=0$, whence $r=1$, $\rho=1$, and

$$C=3\nu+3.$$

If an equilateral triangle be drawn on SJ, its vertex is at this fourth critical point; and since this vertex may be on either the positive or negative side of SJ, there are two points of this kind.

It is well known that there is an exact solution of the problem of the three bodies in which they stand at the corners of an equilateral triangle, which revolves with a uniform angular velocity. The motion is stable provided that ν is sufficiently large. M^r Hough has however pointed out to me that if ν be less than 24·96, it is unstable.

Thus all the five critical points correspond with particular exact solutions of the problem, and of these solutions three are unstable and the symmetrical pair is generally stable.

Fig. 1 represents the critical curves of the family $2\Omega=C$, for the case $\nu=10$. The points in the curves were determined by solutions of a cubic equation. I have only drawn the critical curves, because the addition of other members of the family would merely complicate the figure.

An important classification of orbits may be derived from this figure. When C is greater than 40·1821 the third body must be either a superior planet moving outside of the large oval, or an inferior planet moving inside of the larger internal oval, or a satellite moving inside of the smaller internal oval; and it can never exchange one of these parts for either of the other two. The limiting case $C = 40{\cdot}1821$ gives superior limits to the radii vectores of inferior planets and of satellites, which cannot sever their connections with their primaries.

When C is less than 40·1821 but greater than 38·8760, the third body may be a superior planet, or an inferior planet or satellite, or a body which moves in an orbit which partakes of the two latter characteristics; but it can never pass from the first condition to any of the latter ones.

When C is less than 38·8760 and greater than 34·9054, the body may move anywhere save inside of a region shaped like a horse-shoe. The distinction between the two sorts of planetary motion and the motion as a satellite ceases to exist, and if the body is started in any one of these three ways it is possible for it to exchange the characteristics of its motion for either of the two other modes.

When C is less than 34·9054 and greater than 33, the forbidden region consists of two strangely shaped portions of space on each side of SJ.

Lastly when C is equal to 33, the forbidden regions have shrunk to a pair of infinitely small closed curves enclosing the third angles of a pair of equilateral triangles erected on SJ as a base. When C is less than 33 no portion of space is prohibited.

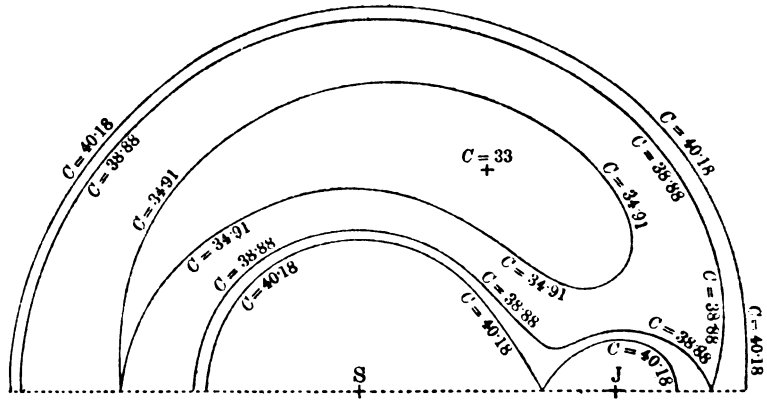


Fig. 1

Curves of zero velocity, $10\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho}\right) = C$.

§ 4.

A certain partition of space according to the nature of the curvature of the orbit.

It appears from (4) of § 2 that the curvature of an orbit is given by

$$\frac{V^2}{R} = P - 2nV,$$

where

$$P = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}\cos\varphi - \frac{\partial \Omega}{\partial y}\sin\varphi.$$

Now if V_0 denotes any constant velocity, the equation $2\Omega = C + V_0^2$ defines a curve of constant velocity; it is one of the family of curves considered in § 3. We have seen that this family consists of a large oval enclosing two smaller ones, or of curves arising from the coalescence of ovals. In the mathematical sense of the term the 'interior' of the curve of constant velocity consists of the space inside of either of the smaller ovals or outside of the large one, or of the corresponding spaces when there is coalescence of ovals. It is a convenient and ordinary convention that when the circuit of a closed curve is described in a positive direction, the 'interior' of the curve is on the left-hand side. According to this convention the meaning of the 'inward' normal of one of these curves of constant velocity is clear, for it is directed towards the 'interior'. Similarly the inward normal of an orbit is towards the left-hand side, as the body moves along its path.

It is clear then that P is the component of effective force estimated along the inward normal of the orbit. Also if T be the resultant effective force $T^2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2$; and if χ be the angle between T and the inward normal to the orbit, $P = T\cos\chi$.

Hence

$$\frac{V^2}{R} = T\cos\chi - 2nV.$$

If we consider curvature as a quantity which may range from infinite positive to infinite negative, it may be stated that of all the orbits passing through a given point the curvature is greatest for that orbit which is tangential to the curve of constant velocity, when the motion takes place in a positive direction along that curve.

If χ lies between $\pm\chi_0$, where $\cos\chi_0 = -\frac{2nV}{T}$, the orbit has positive curvature; if $\chi = \pm\chi_0$, there is a point of contrary flexure in the orbit; and if χ lies outside of the limits $\pm\chi_0$, the curvature is negative.

If however T be less than $2nV$, there are no orbits, passing through the point under consideration, which have positive curvature. Hence the equation $T = 2nV$ defines a family of curves which separate the regions in which the curvature of orbits is necessarily negative, from those in which it may be positive. These curves are very complicated, and as they have not been traced I omit the discussion of them from this abridgement.

§ 5.

Formulae of interpolation and quadrature.

The object of this paper is to search for periodic orbits, but no general method has been as yet discovered by which they may be traced. I have therefore been compelled to employ a laborious method of tracing orbits by quadratures, and of finding the periodic orbits by trial.

According to the usual notation of the calculus of finite differences, u_x is to denote a function of x, and the operator Δ is defined by

$$\Delta u_x = u_{x+1} - u_x.$$

Then the formula of integration, is

$$(24) \quad \int_0^n u_x\,dx = \Delta^{-1}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{12}\Delta u_{n-1} - \frac{1}{24}\Delta^2 u_{n-2} - \frac{19}{720}\Delta^3 u_{n-3} - \frac{3}{160}\Delta^4 u_{n-4} - \frac{863}{60480}\Delta^5 u_{n-5}.$$

This is a convenient form when only the integral from n to 0 is wanted, and the integrals from $n-1$ to 0, $n-2$ to 0, etc. are not also wanted. But in the greater part of the work the intermediate integrals are also required. Now on applying the operator Δ to (24), we have

$$(25) \quad \int_n^{n+1} u_x\,dx = u_{n+1} - \frac{1}{2}\Delta u_n - \frac{1}{12}\Delta^2 u_{n-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 u_{n-2} - \frac{19}{720}\Delta^4 u_{n-3} \ldots.$$

If this be added to the integral from n to 0 we have the integral from $n+1$ to 0.

When the successive values of u depend on their precursors, it is necessary at the first stage of the integration to take Δx small, because it is only possible to take the first difference into account. At the second stage the second difference may be included, and at the third the third difference.

But in almost every case I begin integration with such a value of the independent variable (say $x = 0$), that we either have u_x an even function of x, or an odd function of x; in the first case $u_x = u_{-x}$, in the second $u_x = -u_{-x}$. Both these cases present special advantages for the commencement of integration, for in the first integration we may take second differences into account. Thus when u_x is an even function, the second difference involved in the table of integration from 1 to 0 is $2\Delta u_0$; and when u_x is an odd function it is zero. In both cases third differences may be included in the second integration.

It is of course desirable to use the largest value of the increment of the independent variable consistent with adequate accuracy. If at any stage of the work it appears by the smallness of the second and third differences involved in the integrals, that longer steps may safely be employed, it is easy to double the value of Δx, by forming a new difference table with omission of alternate entries amongst the values already computed.

When on the other hand it appears by the growth of the second and third differences that Δx is becoming too large, Δx can be halved, and the new difference table must be formed by interpolation. The value of $u_{n-\frac{1}{2}}$ can be found from u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, ... with sufficient accuracy for the purpose of obtaining the differences of $u_{n-\frac{3}{2}}$, u_{n-1}, $u_{n-\frac{1}{2}}$, u_n. The process of halving the value of Δx is therefore similar to that of doubling it.

In some of the curves which I have to trace there are sharp bends or quasi-cusps, and in these cases the process is very tedious, as it is sometimes necessary to repeatedly halve the increments of the independent variable, which is the arc s of the curve.

But the chief difficulty about these quasi-cusps arises when they are past, and when it is time to double the arc again. For the fact that the earlier values of the function to be used in the more open ranked difference tables are thrown back nearly to the cusp or even beyond it, makes the higher differences very large. Now the correctness of the formula of integration depends on the correctness of the hypothesis that an algebraic curve will give a good approximation to actuality. But in the neighbourhood of a quasi-cusp, and with increasing arcs this is far from correct. I have found then that in these cases of doubling the arc, a better result is obtained in the first and second integration by only including the second difference in the table of integration.

If we are tracing one member of a family of curves which are widely spaced throughout the greater part of their courses, but in one

region are closely crowded into quasi-cusps, it is difficult to follow one member of the family through the crowded region, and on emerging from the region we shall probably find ourselves tracing a closely neighbouring member, and not the original one. I have applied the method to trace the curve drawn by a point attached to a circle at nine tenths of its radius from the centre, as the circle rolls along a straight line. After the passage of the quasi-cusp I found that I was no longer exactly pursuing the correct line; nevertheless on a figure of the size of this page the difference between the two lines would be barely discernible. But the orbits which it is my object to trace do not quite resemble this case, since their cusps do not lie crowded together in one region of space. I believe therefore that these cases have been treated with substantial accuracy.

§ 6.

On the method of tracing a curve from its curvature.

It will be supposed that the curve to be traced is symmetrical with respect to the x axis, and starts at right angles to it so that $x = x_0$, $y = 0$, $\varphi = 0$, $s = 0$. This is not a necessary condition for the use of the method, but it appears from § 5 that the start is thus rendered somewhat easier than would be the case otherwise. The curvature at each point of the curve is supposed to be a known function of the coordinates x, y of the point, and of the direction of the normal defined by the angle φ.

The first step is to compute the initial curvature $\frac{1}{R_0}$; it is then necessary to choose such a value for the increment of arc δs as will give the requisite degree of accuracy.

I have found that it is well to take, as a rule, δs of such a size that $\frac{\delta s}{R_0}$ shall not be greater than about 8^0; but later, when all the differences in the tables of integration have come into use, I allow the increments of φ to increase to about 12^0.

It is obvious that the curvature is even, when considered as a function of s. When nothing further is known of the nature of the curve, it is necessary to assume that the curvature is constant throughout the first arc δs, but it is often possible to make a conjecture that the curvature at the end of the arc δs will be say $\frac{1}{R_1}$. By the formula of integration with first and second differences we then compute $\varphi = \varphi_1$ at the end of the arc, by the first of equations (5) in § 2.

With this value of φ we find $\sin \varphi_1$, $\cos \varphi_1$, and observing that $\sin \varphi_0 = 0$, $\cos \varphi_0 = 1$, we compute x_1, y_1 by means of the second and third of (5), using first and second differences.

We next compute $\frac{1}{R_1}$ with these values of x, y, and if it agrees with the conjecture the work is done; and if not so, the work is repeated until there is agreement between the initial and final values of the curvature.

After the first arc, a second is computed, and higher differences are introduced into the tables of integration. We thus proceed by steps along the curve.

The approximation to the final result is usually so rapid, that in the recalculation it commonly suffices to note the changes in the last significant figure of the numbers involved in the original computation, without rewriting the whole.

The correction of the tables of integration is also very simple; for suppose that the first assumed value of the function to be integrated is u, and that the second approximation shows that it should have been $u + \delta u$; then all the differences in the column of the table have to be augmented by δu, and therefore the integral has to be augmented by

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} - \cdots\right)\delta u\,\delta s.$$

If we stop with third differences, this gives the simple rule that the integral is to augmented by $\frac{3}{8}\,\delta u\,\delta s$.

It has been shown in § 5 how the chosen arc δs is to be increased or diminished according to the requirements of the case.

This method is the numerical counterpart of the graphical process described by Lord Kelvin in his Popular Lectures*), but it is very much more accurate, and when the formula for the curvature is complex it is hardly if at all more laborious. In the present investigation it would have been far more troublesome to use the graphical method, with such care as to attain the requisite accuracy, than to follow the numerical method.

In order to trace orbits I first computed auxiliary tables of $r^2 + \frac{2}{r}$, and of $\log\left(\frac{1}{r^2} - r\right)$ for $r < 1$, and of $\log\left(r - \frac{1}{r^2}\right)$ for $r > 1$; the tables extend from $r = 0$ to 1·5 at intervals of ·001, but they will ultimately require further extension.

The auxiliary tables of logarithms are computed to 5 figures, but the last figure is not always correct to unity, and the fifth figure is principally of use in order to make correct interpolation possible.

---

*) Popular Lectures, vol. 1, 2nd ed. pp. 31—42; Phil. Mag. vol. 34, 1892, pp. 443—448.

The conversion of φ from circular measure to degrees and the values of $\sin\varphi$ and $\cos\varphi$ are obtained from Bottomley's four-figured table.

Most of the work has been done with these tables, but as it appears that the principal source of error lies in the determination of r and ϱ, five figured logarithms have generally been used in this part of the work, and the values of θ and ψ are written down to $0'{\cdot}1$.

In order to test the method, I computed an unperturbed elliptic orbit by means of the curvature, and found that the results were far more accurate than I should have expected.

In some cases, where the orbits have very sharp curvature or cusps, it was found necessary to calculate the coordinates by means of series proceeding by powers of the time. The series show that where an orbit has a cusp, its form is that of a semi-cubical parabola.

§ 7.

Variation of orbit.

Our object is not only to discover periodic orbits but also to consider their stability.

Now the stability of a periodic orbit is determinable by discovering whether the motion is oscillatory or not, when the path varies by infinitely little from that of the periodic orbit. The variation of an orbit may be of two kinds, for the constant of relative energy may be varied, or the planet may be displaced from the periodic orbit.

Suppose that the constant C undergoes a small variation and becomes $C+\delta C$; then there must be a periodic orbit, corresponding to $C+\delta C$, which differs by very little from that corresponding to C.

Now if a planet be moving in a periodic orbit, and if C suddenly becomes $C+\delta C$, we may henceforth refer the motion to the varied periodic orbit, and may consider the constant of relative energy as $C+\delta C$ and invariable. The periodic orbit of reference then varies *per saltum*, but the instantaneous position of the planet is unvaried, and therefore the planet is now displaced from its orbit of reference. Hence the result of a variation of C will virtually be determined by regarding C as constant, and by supposing the planet to be displaced from the periodic orbit. This subject is considered in the present section.

The whole of the following investigation is founded on the work of M^{r} Hill*), but it is presented in a different form.

---

*) *On the part of the motion of the moon's perigee* etc. ***Acta Mathem.*** Vol. 8, pp. 1—36.

If the Jacobian integral (2) be differentiated with respect to the time, and if the equations $\frac{dx}{dt} = -V\sin\varphi$, $\frac{dy}{dt} = V\cos\varphi$ be used in the result, we obtain

$$\frac{dV}{dt} = -\sin\varphi\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial\Omega}{\partial y}. \tag{28}$$

Again if the first of the equations of motion (1) be multiplied by $-\cos\varphi$, and the second by $-\sin\varphi$, and if the two be added together, the result may be written

$$V\left(\frac{d\varphi}{dt} + 2n\right) = -\cos\varphi\frac{\partial\Omega}{\partial x} - \sin\varphi\frac{\partial\Omega}{\partial y}. \tag{29}$$

Let s be the arc of the orbit, and p the arc of an orthogonal trajectory of the orbit, estimated in the direction of the outward normal of the orbit; then

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial p} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}. \end{cases} \tag{30}$$

Accordingly (28), (29) and the Jacobian integral become

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial s}, \\ V\left(\frac{d\varphi}{dt} + 2n\right) = -\frac{\partial\Omega}{\partial p}, \\ V^2 = 2\Omega - C. \end{cases} \tag{30}$$

The equations (30) are equivalent to (1) and (2).

Now suppose that x, y are the coordinates of a point on an orbit, and that $x + \delta x$, $y + \delta y$ are the coordinates of a point on an adjacent orbit. Then if we put

$$\begin{aligned} \delta p &= \delta x\cos\varphi + \delta y\sin\varphi, \\ \delta s &= -\delta x\sin\varphi + \delta y\cos\varphi, \end{aligned}$$

δp, δs are the distances, measured along the outward normal and along the arc of the unvaried orbit, from the original point x, y to the adjacent point $x + \delta x$, $y + \delta y$.

If, with x, y as origin, rectangular axes be drawn along the outward normal and along the arc of the unvaried orbit, we may regard δp, δs as the coordinates of the new point relatively to the old one. The new axes rotate with angular velocity $\frac{d\varphi}{dt} + n$, the first term representing the angular velocity of the normal and the second that of our original axes of x and y.

The well-known formulae for the component accelerations of a point along two directions, which instantaneously coincide with a pair

of rotating rectangular axes by reference to which the position of the point is determined, give the accelerations

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\delta p - \delta p\left(\dfrac{d\varphi}{dt}+n\right)^2 - 2\dfrac{d\delta s}{dt}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}+n\right) - \delta s\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}, \\ \qquad\qquad \text{along the normal} \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\delta s - \delta s\left(\dfrac{d\varphi}{dt}+n\right)^2 + 2\dfrac{d\delta p}{dt}\left(\dfrac{d\Phi}{dt}+n\right) + \delta p\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}, \\ \qquad\qquad \text{along the tangent.} \end{cases}$$

These are the accelerations of the new point relatively to the old, estimated along lines fixed in space which coincide instantaneously with the normal and tangent of the unvaried orbit.

The function Ω includes the potential of the rotation n of the original axes of x and y. Hence $\Omega - \frac{1}{2}n^2r^2$ is the true potential of the forces under which the body moves in the unvaried orbit, and

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\Omega - \tfrac{1}{2}n^2r^2\right), \qquad \frac{\partial}{\partial s}\left(\Omega - \tfrac{1}{2}n^2r^2\right)$$

are the components of force in the unvaried orbit along the normal and along the arc.

Therefore the excess of the forces in the varied orbit above those in the unvaried orbit are

$$\left(\delta p\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \delta s\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial s}\right)\left(\Omega - \tfrac{1}{2}n^2r^2\right)$$

and

$$\left(\delta p\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial s} + \delta s\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)\left(\Omega - \tfrac{1}{2}n^2r^2\right).$$

Now by considering the meaning (30) of the operations $\frac{\partial}{\partial p}$, $\frac{\partial}{\partial s}$, it is easy to prove that

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^2}{\partial p^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^2}{\partial s^2} = 1, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial s}r^2 = 0.$$

Hence the excess of the forces in the varied orbit above those in the unvaried orbit are

$$\delta p\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2} + \delta s\frac{\partial^2\Omega}{\partial p\,\partial s} - n^2\delta p,$$

and

$$\delta p\frac{\partial^2\Omega}{\partial p\,\partial s} + \delta s\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2} - n^2\delta s,$$

along the normal and along the arc of the unvaried orbit.

But these are necessarily equal to the accelerations (31) of which they are the cause. Then transferring $-n^2\delta p$, $-n^2\delta s$ to the left hand sides of the equations, we have

$$(32)\quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\delta p + \delta p\left[n^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)^2\right] - 2\frac{d\,\delta s}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right) - \delta s\frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ \qquad\qquad = \delta p\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2} + \delta s\frac{\partial^2\Omega}{\partial p\,\partial s}, \\ \frac{d^2}{dt^2}\delta s + \delta s\left[n^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)^2\right] + 2\frac{d\,\delta p}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right) + \delta p\frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ \qquad\qquad = \delta p\frac{\partial^2\Omega}{\partial p\,\partial s} + \delta s\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2}. \end{cases}$$

These are the equations of motion in the varied orbit.

The variation of the last of (30), the Jacobian integral, gives

$$(33)\quad V\delta V = \delta p\frac{\partial\Omega}{\partial p} + \delta s\frac{\partial\Omega}{\partial s}.$$

Now δV is the tangential velocity of the point $x+\delta x$, $y+\delta y$ in the varied orbit, relatively to the original point x, y. But as we only want to consider a velocity relatively to the axes of x and y, which themselves rotate with angular velocity n, our p, s axes must be regarded as rotating with angular velocity $\frac{d\varphi}{dt}$, instead of $\frac{d\varphi}{dt}+n$.

Accordingly

$$(34)\quad \delta V = \frac{d}{dt}\delta s + \delta p\frac{d\varphi}{dt}.$$

The formula (34) enables us to get rid of δV in (33), but we may also get rid of $\frac{\partial\Omega}{\partial p}$ and $\frac{\partial\Omega}{\partial s}$ by means of the equations of motion (30). Thus the variation of the Jacobian integral leads to

$$V\left(\frac{d}{dt}\delta s + \delta p\frac{d\varphi}{dt}\right) = -V\left(\frac{d\varphi}{dt}+2n\right)\delta p + \frac{dV}{dt}\delta s.$$

Therefore

$$(35)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\delta s + 2\delta p\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right) - \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}\delta s = 0, \\ \text{or} \\ V\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta s}{V}\right) + 2\delta p\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right) = 0, \end{cases}$$

The equations (35) are two forms of the varied Jacobian integral.

A great simplication of the equations of motion (32) is possible by reference to the unvaried motion.

Let us suppose then that δp, δs are no longer displacements to a varied orbit, but are the actual displacements occurring in time δt in the unvaried orbit. Thus $\delta p = 0$, $\delta s = V\delta t$.

The equations (32) then give

$$(36)\quad \begin{cases} -2\frac{dV}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right) - V\frac{d^2\varphi}{dt^2} = V\frac{\partial^2\Omega}{\partial p\,\partial s}, \\ \frac{d^2V}{dt^2} + V\left[n^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)^2\right] = V\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2}. \end{cases}$$

The first of (36) may be written

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial p\,\partial s}=-\frac{2}{V}\frac{dV}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right).$$

These two terms, multiplied by δs, occur in the first of (32), which may therefore be written

$$\frac{d^2\delta p}{dt^2}+\delta p\left[n^2-\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)^2\right]-2\frac{d\,\delta s}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)$$
$$+\frac{2\,\delta s}{V}\frac{dV}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)-\delta p\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}=0.$$

The terms in this which involve δs may now be eliminated by the first of (35) and we have

$$\frac{d^2\delta p}{dt^2}+\delta p\left[n^2-\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)^2+4\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)^2-\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}\right]=0.$$

If then we put

$$\Theta=n^2+3\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)^2-\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}, \tag{37}$$

we have

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\delta p}{dt^2}+\Theta\,\delta p=0,\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\delta s}{V}\right)+2\dfrac{\delta p}{V}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}+n\right)=0.\end{cases} \tag{37}$$

The differential equation for δp is Mr Hill's well-known result

We have now to consider the form of the function Θ.

Let us write $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\frac{\partial^2}{\partial s^2}$; then adding $V\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}$ to each side of the second of (36), we have

$$\frac{1}{V}\frac{d^2V}{dt^2}+n^2-\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)^2+\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}=\nabla^2\Omega,$$

so that

$$n^2-\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{V\,dt}\right)+\left(\frac{dV}{V\,dt}\right)^2-\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)^2+2n^2-\nabla^2\Omega.$$

Substituting in (37),

$$\Theta=2n^2-\nabla^2\Omega+2\left(\frac{d\varphi}{dt}+n\right)^2+\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{V\,dt}\right)+\left(\frac{dV}{V\,dt}\right)^2.$$

If we put $u=x+y\iota$, $s=x-y\iota$, $\frac{d}{dt}=\iota D$, where $\iota=\sqrt{-1}$, it is easy to show that $Du=Ve^{\varphi\iota}$, $Ds=-Ve^{-\varphi\iota}$, and

$$2\frac{d\varphi}{dt}=\frac{D^2u}{Du}-\frac{D^2s}{Ds},\quad 2\frac{dV}{V\,dt}=\iota\left(\frac{D^2u}{Du}+\frac{D^2s}{Ds}\right).$$

Mr Hill's form for the function Θ follows as once from these transformations.

Another form for Θ, deducible directly from (37), is

$$\Theta = n^2 - \tfrac{1}{2}\nabla^2\Omega - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}\right)\cos 2\varphi - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y}\sin 2\varphi + 3\left(\frac{d\varphi}{dt} + n\right)^2,$$

whence

$$\Theta = \frac{\nu}{r^3} + \frac{1}{\varrho^3} - \frac{3\nu}{r^3}\cos^2(\varphi - \theta) - \frac{3}{\varrho^3}\cos^2(\varphi - \psi) + 3V^2\left(\frac{1}{R} + \frac{n}{V}\right)^2.$$

§ 8.

Change of independent variable from time to arc of orbit.

For the purpose of future developments it is now necessary to change the independent variable from the time t to the arc s.

Let

$$\delta q = \delta p\, V^{\frac{1}{2}}. \tag{38}$$

Then

$$\frac{d^2\delta p}{dt^2} = V\frac{d}{ds}\left(V\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta q}{V^{\frac{1}{2}}}\right)\right) = V\frac{d}{ds}\left(V^{\frac{1}{2}}\frac{d\delta q}{ds} - \frac{1}{2V^{\frac{1}{2}}}\delta q\frac{dV}{ds}\right)$$

$$= V^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\partial q}{ds^2} - \frac{1}{2}\delta q\, V\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\frac{dV}{dt}\right).$$

But

$$V\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\frac{dV}{ds}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\frac{dV}{dt}\right) = -\frac{3}{2V^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2V}{dt^2}$$

$$= -\frac{3}{2V^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dV}{ds}\right)^2 + \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2V}{dt^2}.$$

Hence

$$\frac{d^2\delta p}{dt^2} = V^{\frac{3}{2}}\frac{d^2\delta q}{ds^2} + \frac{3}{4V^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dV}{ds}\right)^2\delta q - \frac{\delta q}{2V^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2V}{dt^2}.$$

Also

$$\Theta\delta p = \frac{\Theta\,\delta q}{V^{\frac{1}{2}}}.$$

If these two be added together, and divided by $V^{\frac{3}{2}}$, we obtain

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\delta q}{ds^2} + \Psi\,\delta q = 0, \\ \text{where} \\ \Psi = \dfrac{\Theta}{V^2} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{dV}{V\,ds}\right)^2 - \dfrac{1}{2V^3}\dfrac{d^2V}{dt^2}. \end{cases} \tag{39}$$

It remains to obtain the expression for the function Ψ.

Since

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}, \quad \text{and} \quad n^2 = \nu + 1,$$

$$\Theta = \nu + 1 + 3\left(\frac{V}{R} + n\right)^2 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}.$$

Now from the first of (30) and the second of (36),

$$V\frac{dV}{ds}=\frac{\partial\Omega}{\partial s},$$

$$\frac{1}{V}\frac{d^2V}{dt^2}=\left(\frac{V}{R}+n\right)^2+\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2}-\nu-1.$$

Then by substitution in the second of (39);

$$\Psi V^2=\tfrac{3}{2}(\nu+1)+\tfrac{5}{2}\left(\frac{V}{R}+n\right)^2+\tfrac{3}{4}\left(\frac{dV}{ds}\right)^2-\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2}.$$

Also

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2}=\tfrac{1}{2}\nabla^2\Omega+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}.$$

Now

$$2\Omega=\nu\left(r^2+\frac{2}{r}\right)+\left(\varrho^2+\frac{2}{\varrho}\right),$$

and

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}=\nu+1-\frac{\nu}{r^3}-\frac{1}{\varrho^3}+\frac{3\nu}{r^3}\cos^2\theta+\frac{3}{\varrho^3}\cos^2\psi,$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}=\frac{3\nu}{r^3}\sin\theta\cos\theta+\frac{3}{\varrho^3}\sin\psi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}=\nu+1-\frac{\nu}{r^3}-\frac{1}{\varrho^3}+\frac{3\nu}{r^3}\sin^2\theta+\frac{3}{\varrho^3}\sin^2\psi.$$

Hence

$$\nabla^2\Omega=2(\nu+1)+\frac{\nu}{r^3}+\frac{1}{\varrho^3},$$

and

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^2}=\cos^2\varphi\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+2\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}+\sin^2\varphi\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2},$$

$$=\nu+1-\frac{\nu}{r^3}-\frac{1}{\varrho^3}+\frac{3\nu}{r^3}\cos^2(\varphi-\theta)+\frac{3}{\varrho^3}\cos^2(\varphi-\psi).$$

Therefore

$$\Psi=\tfrac{5}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{n}{V}\right)^2-\frac{3}{2V^2}\left[\frac{\nu}{r^3}\cos^2(\varphi-\theta)+\frac{1}{\varrho^3}\cos^2(\varphi-\psi)\right]+\tfrac{3}{4}\left(\frac{dV}{V\,ds}\right)^2. \tag{40}$$

Also since

$$V\frac{dV}{ds}=\frac{\partial\Omega}{\partial s}=-\sin\varphi\,\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\cos\varphi\,\frac{\partial\Omega}{\partial y},$$

$$\frac{dV}{V\,ds}=\frac{\nu}{V^2}\left(\frac{1}{r^2}-r\right)\sin(\varphi-\theta)+\frac{1}{V^2}\left(\frac{1}{\varrho^2}-\varrho\right)\sin(\varphi-\psi). \tag{40}$$

This completes the formula for Ψ in terms of the coordinates, the velocity, the curvature and of φ.

It may be useful to obtain the expressions for δs and $\delta\varphi$ in terms of the new independent variable s.

The second of (37) may be written down at once, namely

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta s}{V}\right)=-\frac{2\delta q}{V^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{R}+\frac{n}{V}\right). \tag{41}$$

Also it is clear from geometrical considerations that

$$\delta\varphi = -\frac{d}{ds}\delta p + \frac{\delta s}{R},$$

whence

$$\delta\varphi = -\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\Big[\frac{d\delta q}{ds} - \frac{1}{2}\delta q\Big(\frac{ds}{V ds}\Big)\Big] + \frac{\delta s}{R}. \tag{42}$$

§ 9.

The solution of the differential equation for δq.

The function Ψ has a definite value at each point of a periodic orbit whose complete arc is S. Therefore Ψ is a function of the arc s of the orbit, measured from any point therein, and when s has increased from zero to S, Ψ has returned to its initial value. Also since a periodic orbit is symmetrical with respect to the x-axis, Ψ is an even function of the arc s, when s is measured from an orthogonal intersection of the orbit with the x-axis. If the periodic orbit only goes once round S or J, or round both, all the intersections with the x-axis are necessarily orthogonal. I call such an orbit simply periodic, but the term must have its meaning extended so as to embrace the possibility of loops. But when there are loops the intersections with the x-axis are not necessarily orthogonal, and if the orbit is only periodic after several revolutions some of the intersections cannot be orthogonal.

With the understanding that s is measured from an orthogonal intersection with the x-axis, Ψ is an even function of s and is expressible by the Fourier series

$$\Psi = \Psi_0 + 2\Psi_1 \cos\frac{2\pi s}{S} + 2\Psi_2 \cos\frac{4\pi s}{S} + \cdots.$$

Now multiply the differential equation (39) for δq by $\frac{S^2}{\pi^2}$, write σ for $\frac{\pi s}{S}$, and put $\Phi = \frac{S^2}{\pi^2}\Psi$, and we have

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}\delta q + \Phi\delta q = 0. \tag{43}$$

Also if $\Phi_j = \frac{S^2}{\pi^2}\Psi_j$,

$$\Phi = \Phi_0 + 2\Phi_1 \cos 2\sigma + 2\Phi_2 \cos 4\sigma + \cdots.$$

If then we write $\zeta = e^{\sigma\sqrt{-1}}$,

$$\zeta\frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d}{d\sigma},$$

and the equation (43) becomes

$$\left(\zeta \frac{d}{d\zeta}\right)^2 \delta q = \Phi \delta q, \tag{44}$$

where $\Phi = \Sigma_j \Phi_j \zeta^{2j}$, the summation being taken from $j = +\infty$ to $j = -\infty$, and Φ_{-j} being equal to Φ_j.

Let us assume as the solution of (44)

$$\begin{aligned}\delta q &= \Sigma_j [(b_j + e_{-j}) \cos (c+2j)\sigma + (b_j - e_{-j})\sqrt{-1} \sin (c+2j)\sigma] \\ &= \Sigma_j [b_j \zeta^{c+2j} + e_j \zeta^{-c+2j}].\end{aligned}$$

The equation (44) must be separately satisfied for the terms involving b and for those involving e; hence we need only regard one series of terms.

On substituting in (44) the assumed expression for δq, and equating to zero the coefficients of the several powers of ζ, we have

$$b_j (c + 2j)^2 = \Sigma_j b_{j-i} \Phi_i, ^*)$$

written *in extenso* this is

$$\cdots - b_{j-2}\Phi_2 - b_{j-1}\Phi_1 + b_j[(c+2j)^2 - \Phi_0] - b_{j+1}\Phi_1 - b_{j+2}\Phi_2 - \cdots = 0.$$

There are an infinite number of equations like the above, but the infinity must be regarded as an odd number.

If from these equations the b's be eliminated, we have an infinite determinantal equation for determining c. If we write

$$(c+2j)^2 - \Phi_0 = \{j\},$$

the equation is

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & \{-1\}, & -\Phi_1, & -\Phi_2 & \cdots \\ \cdots & -\Phi_1, & \{0\}, & -\Phi_1 & \cdots \\ \cdots & -\Phi_2, & -\Phi_1, & \{1\} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

This is the same in form as Mr Hill's determinantal equation.

As much has been written on the subject, it is unnecessary to reproduce the arguments by which it may be shown that if

$$[j] = \Phi_0 - 4j^2,$$

and

---

*) The equation of condition for the e's is easily shown to be

$$e_{-j}\ (c+2j)^2 = \Sigma_i e_{i-j} \Phi_{-i};$$

and since $\Phi_i = \Phi_{-i}$, this is exactly the same as that for the b's save that e_{-j} corresponds with b_j.

$$(45) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1, & \frac{\Phi_1}{[1]}, & \frac{\Phi_2}{[1]} \cdots \\ \cdots & \frac{\Phi_1}{[0]}, & 1 & \frac{\Phi_1}{[0]} \cdots \\ \cdots & \frac{\Phi_2}{[1]}, & \frac{\Phi_1}{[1]}, & 1 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

the solution of the determinantal equation is given by

$$(45) \qquad \sin^2 \tfrac{1}{2}\pi c = \Delta \sin^2 \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\Phi_0}.$$

§ 10.

On the stability or instability of an orbit.

When c is real, δq is expressible by a series of sines and cosines of multiples of the arc. Since V is an even function of the arc, it is expressible by a series of cosines of the same form as that for Φ: hence δp, which is equal to $V^{\frac{1}{2}}\delta q$, is expressible in a series, similar in form to that for δq.

But δp denotes normal displacement from the periodic orbit, and therefore the motion in the varied orbit is oscillatory with reference to the periodic orbit. In other words the periodic orbit is stable.

If c_0 be any one value of c, all its infinite values are comprised in the formula $\pm c_0 \pm 2i$, where i is an integer. It is however convenient to choose one value of c as fundamental. When the choice has been made we may refer to the terms in the series for δq of which the argument is c_0 as the principal terms, although it does not appear to be necessary that these terms should have the largest coefficients. In fact since two arbitrary constants are involved in the specification of a definite variation of orbit, it is probable that the terms which are numerically the most important in one variation, will not be so in another.

If the body be considered as moving in an elliptic orbit, it will be at its pericentre or apocentre, when δp is a negative or positive maximum, respectively. The principal terms of δq, and therefore also of δp, have the argument $c\sigma$ or $\frac{c\pi s}{S}$; hence if we may assume that the principal term is also the most important, the body has passed through a complete anomalistic circuit when s has increased from zero to $2\frac{S}{c}$. Since S is the synodic arc in the relative orbit, $\frac{1}{2}c$ is the ratio of the synodic to the anomalistic arc, both arcs being measured on the orbit as drawn with reference to the moving axes.

Now I propose to adopt as a convention that the fundamental value of c shall be that value which lies nearest to $\sqrt{\Phi_0}$, where Φ_0 denotes the mean value of Φ. This convention certainly attributes to $\frac{1}{2}c$ a physical meaning, which is correct in all those cases which have any resemblance to the motion of an actual satellite in the solar system. I shall accordingly use the value of c which lies nearest to $\sqrt{\Phi_0}$ as fundamental.

We have just arrived at a physical meaning for c by considering the principal term in the series; now in so doing we were in effect considering only the mean motion of the body with reference to the moving axes; therefore $\frac{1}{2}c$ is also the ratio of the synodic to the anomalistic period*).

If T denotes the synodic period, the mean motion of the body referred to axes fixed in space is $\frac{2\pi}{T}+n$; and if $\frac{d\omega}{dt}$ denotes the mean angular velocity of the pericentre with reference to axes fixed in space, the mean motion of the body with reference to the pericentre is $\frac{2\pi}{T}+n-\frac{d\omega}{dt}$. Then, since angular velocities vary inversely as periods,

$$\frac{1}{2}c = \frac{\frac{2\pi}{T}+n-\frac{d\omega}{dt}}{\frac{2\pi}{T}},$$

where

$$n^2 = \nu + 1.$$

Therefore

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = n - \dfrac{2\pi}{T}\left(\dfrac{1}{2}c - 1\right), \\ \text{or} \\ T\left(n - \dfrac{d\omega}{dt}\right) = 2\pi\left(\dfrac{1}{2}c - 1\right). \end{cases}$$

M^r Hill's c is equal to one half of my c, and accordingly the first of (46) is identical with the formula from which M^r Hill derives 'a part of the motion of the lunar perigee'**).

The angular velocity of regression of the pericentre being $n - \frac{d\omega}{dt}$, it follows from (46) that $2\pi\left(\frac{1}{2}c - 1\right)$ is the amount of that regression with respect to the moving axes in the synodic period.

---

*) It may be observed that when V is constant (as is the case when we only consider mean motion) $V^2\Psi = \Theta$, and M^r Hill's eqnation for δp becomes identical with the present one for δq. It is well to remark that what I denote by c is $2c$ of M^r Hill's notation.

**) *Acta Mathem.* vol. 8.

Whilst the pericentre regredes with reference to the moving axes, it advances with reference to fixed axes; the advance in the synodic period is $nT - 2\pi\left(\frac{1}{2}c - 1\right)$, and in the sidereal period the advance is

$$2\pi\left[1 - \frac{\frac{1}{2}c}{1 + \frac{nT}{2\pi}}\right].$$

In the numerical treatment of stable periodic orbits I tabulate the apparent regression $2\pi\left(\frac{1}{2}c - 1\right)$, and the actual advance $nT - 2\pi\left(\frac{1}{2}c - 1\right)$ in the synodic period; also $2\pi\left[1 - \frac{\frac{1}{2}c}{1 + \frac{nT}{2\pi}}\right]$ the advance in the sidereal period.

Let us now consider the case where c is imaginary, so that the motion is no longer oscillatory with respect to the periodic orbit, and the periodic orbit is unstable.

The form of (45) shows that c becomes imaginary either when $\Delta \sin^2 \frac{1}{2}\pi\sqrt{\Phi_0}$ is negative, or when it is greater than unity; this function will therefore be described below as the criterion of stability.

If Φ_0 were negative it would indicate that the mean force of restitution towards the periodic orbit was negative. Hence it seems obvious that the body would then depart from the periodic orbit, which would therefore be unstable. If however Δ were negative as well as Φ_0, it would seem as if it were possible to have a real value for c; but it is not easy to see how this condition could lead to a stable orbit.

I have not yet come on any case where Φ_0 is negative and accordingly that condition is left out of consideration for the present. We are left then with the two conditions, Δ negative or $\Delta \sin^2 \frac{1}{2}\pi\sqrt{\Phi_0}$ greater than unity; these lead to two kinds of instability.

In instability of the first kind Δ is negative; for reasons which will appear below, I shall call this 'even instability'.

In this case let us put

$$\Delta \sin^2 \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\Phi_0} = -D^2,$$

so that (45) becomes $\sin \frac{1}{2}\pi c = \pm D\sqrt{-1}$.

The sine in this case is hyperbolic, and if we write

$$c = 2i + k\sqrt{-1},$$

where i is an integer, the equation for k becomes $\sinh \frac{1}{2}\pi k = \pm D$.

Since the values of c occur in pairs, equal in magnitude and opposite in sign, it is only necessary to consider the upper sign and the result may be written

$$e^{\frac{1}{2}\pi k} = \sqrt{(D^2+1)} + D. \tag{47}$$

I shall return in § 11 to the form of solution adapted to the case of 'even instability'.

Turning to the instability of the second kind, which I shall call 'uneven instability', we have

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\pi c = \Delta \sin^2 \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\Phi_0} = D^2,$$

where D^2 is greater than unity, so that c is imaginary.

The sine in this case also becomes a hyperbolic function, and if we write $c = 2i + 1 + k\sqrt{-1}$, where i is an integer: we have

$$\sin \tfrac{1}{2}\pi c = (-)^i \cosh \tfrac{1}{2}\pi k,$$

a hyperbolic cosine.

Hence

$$\cosh \tfrac{1}{2}\pi k = \pm D.$$

Taking only the upper sign as before, this may be written

$$e^{\frac{1}{2}\pi k} = \sqrt{(D^2-1)} + D. \tag{18}$$

I shall return in § 11 to the form of solution adapted to the case of 'uneven instability', but I wish now to consider the nature of the transitions from instability to stability.

Suppose that we are considering a family of periodic orbits, the members of which are determined by the continuous increase or decrease of the constant C of relative energy; and let us suppose that $\Delta \sin^2 \frac{1}{2}\pi \sqrt{\Phi_0}$, being at first negative, increases and reaches the value zero. At the moment of the transition of this function from negative to positive, there is transition from even instability to stability. If on the other hand this function were positive and less than unity, and were to increase up to and beyond unity there would be a transition from stability to uneven instability.

In all the cases of stability which I have investigated, except one*), the fundamental value of c lies between 2 and 3, and the apparent regression of pericentre in the synodic period, namely $2\pi\left(\frac{1}{2}c - 1\right)$, lies between 0 and 180°, these extreme values corresponding with transitional stages.

*) The orbit in question is $C = 40{\cdot}0$, $x_0 = 1{\cdot}0334$.

It will now conduce to brevity to regard c as lying between 2 and 3, instead of regarding it as a multiple-valued quantity.

If we refer back to the form of solution assumed for the equation (41), we see that when $c = 2$, the solution is

$$\delta q = (b_{-1} + e_1) + (b_0 + e_0 + b_{-2} + e_2) \cos \frac{2\pi s}{S} \cdots$$
$$+ (b_0 - e_0 - b_{-2} + e_2) \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi s}{S} \cdots,$$

and that when $c = 3$, it is

$$\delta q = (b_1 + e_{-1} + b_{-2} + e_2) \cos \frac{\pi s}{S} + (b_0 + e_0 + b_{-3} + e_3) \cos \frac{3\pi s}{S} \cdots$$
$$+ (b_1 - e_{-1} - b_{-2} + e_2) \sqrt{-1} \sin \frac{\pi s}{S}$$
$$+ (b_0 - e_0 - b_{-3} + e_3) \sqrt{-1} \sin \frac{3\pi s}{S} \cdots.$$

In the first case it is clear that when $s = S$, δq has gone through a complete period and has returned to its initial value; but in the second case whilst δq is equal in value, it is opposite in sign to what it was at first.

Consider then the first case where $c = 2$, and suppose that the body is displaced from the periodic orbit along the normal, at a conjunction. Then the body starts moving at right angles to the line of syzygies, and when $s = S$ it has again returned to the same point, and is again moving at right angles to the line of syzygies.

Hence it follows that we have found a new periodic orbit differing by infinitely little from the original one. Thus the original orbit is a double solution of the problem, and the interpretation to be put on the result $c = 2$ is, that we have found a periodic orbit which is a member of two distinct families.

The $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\Phi_0}$ corresponding to our family of orbits has been supposed to be increasing from a negative to a positive value; at the instant of transition the same function for the other family must also be passing through the value zero.

If C be the value of the constant of relative energy for the critical orbit which gives $c = 2$, there must be *two* orbits, infinitely near to one another, for which the constant is $C - \delta C$.

If the orbits were classified according to values of the parameter $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\Phi_0}$, instead of according to values of C, these two families would have to be regarded as a single family, and the critical stage would be that in which C reached a maximum or minimum value.

But when the classification is according to values of C, we say that there are two families which coalesce at the critical value of C;

it is also clear that, as the orbit we were following was unstable up to this critical value, the other must have been stable.

An interesting example of this will be found below, where the families of orbits B and C spring from a single orbit.

Now reverting again to the question of the transition from instability to stability, let us suppose that as the constant C varies, $\Delta \sin^2 \frac{1}{2}\pi\sqrt{\Phi_0}$, being at first greater than unity, diminishes, passes through the value unity and continues diminishing. Then the orbit was at first unstable with uneven instability and c of the form $3+k\sqrt{-1}$; it becomes stable at the critical stage with c less than 3. But there is now no real double solution at the moment of transition and no coalescence of families*). It is probable that there is coalescence with another family of imaginary orbits at this crisis, but I do not discuss this, since I am not looking at the subject from the point of view of the theory of differential equations. Accordingly in our figures of orbits there will be nothing to mark the transition from uneven instability to stability, and it will only be by the consideration of the function $\Delta \sin^2 \frac{1}{2}\pi\sqrt{\Phi_0}$ that we shall be aware of the change.

The conclusions arrived at in this section seem to accord with those of M. Poincaré in his Mécanique Céleste, who remarks that periodic orbits will disappear in pairs.

It is clear from this discussion that uneven instability can never graduate directly into even instability, but the transition must take place through a range of stability.

§ 11.

Modulus of instability, and form of solution.

The cases of instability will now be considered.

When the instability is of the first or even kind, we have

$$c = 2i + k\sqrt{-1},$$

and

$$\text{(49)} \qquad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\pi k} = \sqrt{(D^2+1)} + D, \\ e^{-\frac{1}{2}\pi k} = \sqrt{(D^2+1)} - D, \end{cases}$$

where $D^2 = -\Delta \sin^2 \frac{1}{2}\pi\sqrt{\Phi_0}$.

*) When I explained the results at which I have arrived to M. Poincaré, he suggested that there may be coalescence between a doubly periodic orbit and a singly periodic one, when the two circuits of the former become identical with one another and with the latter.

The solution of (44) was

$$\delta q = \Sigma_j [(b_j + e_{-j}) \cos (c+2j)\sigma + (b_j - e_{-j})\sqrt{-1} \sin (c+2j)\sigma].$$

Now if we take the integer i involved in the expression for c as zero,

$$\cos (c+2j)\sigma = \quad \cosh k\sigma \cos 2j\sigma - \sqrt{-1} \sinh k\sigma \sin 2j\sigma,$$

$$\sqrt{-1} \sin (c+2j)\sigma = -\sinh k\sigma \cos 2j\sigma + \sqrt{-1} \cosh k\sigma \sin 2j\sigma.$$

Therefore when the sign of summation only runs from ∞ to 0, instead of to $-\infty$, and when b_0 and e_0 are supposed to be the halves of their values when the summation ran from $+\infty$ to $-\infty$, the solution may be written

$$\begin{aligned}\delta q = \sum_0^\infty \{ &\cosh k\sigma [(b_j + e_{-j} + b_{-j} + e_j) \cos 2j\sigma \\ &+ (b_j - e_{-j} - b_{-j} + e_j)\sqrt{-1} \sin 2j\sigma] \\ &+ \sinh k\sigma [-\sqrt{-1}(b_j + e_{-j} - b_{-j} - e_j) \sin 2j\sigma \\ &- (b_j - e_{-j} + b_{-j} - e_j) \cos 2j\sigma] \}.\end{aligned}$$

Putting

$$\begin{aligned} b_j + b_{-j} &= B_j, & e_{-j} + e_j &= E_j, \\ b_j - b_{-j} &= \beta_j \sqrt{-1}, & e_{-j} - e_j &= \varepsilon_j \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

and writing the hyperbolic functions as exponentials, we have

$$\begin{aligned}(50) \qquad \delta q = \sum_0^\infty \{ &e^{k\sigma} (E_j \cos 2j\sigma + \varepsilon_j \sin 2j\sigma) \\ &+ e^{-k\sigma} (B_j \cos 2j\sigma - \beta_j \sin 2j\sigma) \}.\end{aligned}$$

By means of (49) this may be written

$$\begin{aligned}(50) \quad \delta q = \sum_0^\infty \{ &\left(\sqrt{(D^2+1)} + D\right)^{\frac{2\sigma}{\pi}} (E_j \cos 2j\sigma + \varepsilon_j \sin 2j\sigma) \\ &+ \left(\sqrt{(D^2+1)} - D\right)^{\frac{2\sigma}{\pi}} (B_j \cos 2j\sigma - \beta_j \sin 2j\sigma) \}.\end{aligned}$$

In (50) it is not safe to assume that the most important term is that for which $j = 0$; indeed this will usually not be the case. All that we know is that the series contains sines and cosines of even multiples of σ, that one set of terms increases without limit and that the other set diminishes.

In the numerical treatment of unstable periodic orbits it will be well to have a modulus of the degree of instability; and these considerations afford a convenient means of obtaining such a modulus.

This modulus may be taken to be the number of synodic revolutions in which the augmentiug factor doubles its initial value; that is to say we are to put

$$e^{k\sigma} = [\sqrt{(D^2+1)} + D]^{\frac{2\sigma}{\pi}} = 2.$$

Therefore

$$\frac{s}{S} = \frac{\sigma}{\pi} = \frac{\log \sqrt{2}}{\log [\sqrt{(D^2+1)} + D]}. \tag{51}$$

This is the modulus of instability, when it is of the even kind.

A consideration of the form of the series for δq shows that it increases without limit, and that the planet or satellite crosses and recrosses the periodic orbit an even number of times in a single circuit; it is on this account that I have called this 'even instability'.

When the instability is of the second or uneven kind, we have $c = 2i + 1 + k\sqrt{-1}$, or if we take i as zero, $c = 1 + \sqrt{-1}$; also

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{2}\pi k} = D + \sqrt{(D^2-1)}, \\ e^{-\frac{1}{2}\pi k} = D - \sqrt{(D^2-1)}, \end{cases} \tag{52}$$

where $D^2 = \Delta \sin^2 \frac{1}{2}\pi\sqrt{\Phi_0}$.

Then by a series of transformations, similar to those followed before, we find

$$\sum_0^\infty \{ \left(D + \sqrt{(D^2-1)}\right)^{\frac{2\sigma}{\pi}} \left(E_j \cos (2j+1)\sigma + \varepsilon_j \sin (2j+1)\sigma\right) \tag{53}$$

$$+ \left(D - \sqrt{(D^2-1)}\right)^{\frac{2\sigma}{\pi}} \left(B_j \cos (2j+1)\sigma - \beta_j \sin (2j+1)\sigma\right)\}.$$

In this case again the terms for which $j = 0$ are not usually the most important ones, but we see that the series contains sines and cosines of odd multiples of σ; and that one set of terms increases without limit and that the other diminishes. As in the first sort of instability, a convenient modulus is the number of synodic revolutions in which the amplitude of the increasing oscillation doubles its initial value; that is to say we put

$$e^{k\sigma} = \left(D + \sqrt{(D^2-1)}\right)^{\frac{2\sigma}{\pi}} = 2.$$

Therefore

$$\frac{s}{S} = \frac{\sigma}{\pi} = \frac{\log \sqrt{2}}{\log [D + \sqrt{(D^2-1)}]}, \tag{54}$$

where

$$D^2 = \Delta \sin^2 \frac{1}{2}\pi\sqrt{\Phi_0}.$$

This is the modulus of instability. when it is of the uneven kind. A consideration of the principal term has shown us that there is an oscillation, whose amplitude increases without limit. The planet or satellite crosses and recrosses the periodic orbit an odd number of

times in a single circuit, making ever increasing excursions on each side; it is on this account that I have called this 'uneven instability'.

It is easy to write down the forms which the equations of condition assume in the two sorts of instability, but I do not reproduce them here.

§ 12.

Numerical determination of stability.

When a periodic orbit has been found by quadratures, it is not obvious by mere inspection whether it is stable or not, and we must consider the numerical processes requisite to obtain an answer to the question.

The points which are determined by quadratures in a periodic orbit do not divide the arc S into a number of equal parts. The distance along the arc from the first orthogonal crossing of the x axis to the second orthogonal crossing is $\frac{1}{2} S$; this may be determined by interpolation, for we may find what value of s makes y vanish.

In general there are two orbits computed, which differ from exact periodicity in opposite directions by small amounts. The arc $\frac{1}{2} S$, measured from the first orthogonal crossing to the second, which is not exactly orthogonal, is determined in each of these cases. The subsequent proceedings are then carried out in duplicate, and the final step is an interpolation between the two results to obtain the result for the exactly periodic orbit. In many cases however the computed orbit differs from a truly periodic one by an amount which is so small, that it may be attributed to the errors inherent to the method of calculation. In such cases the duplicate computation is unnecessary, and since the operations on the approximately periodic orbits are exactly like those on the truly periodic ones, we may henceforth speak as if the true orbit had been found.

The work already carried out in the quadratures affords many of the data requisite for the computation of Φ, and the next step is the computation of Φ corresponding to each computed point of the orbit.

It would be tedious to find the Fourier's series for Φ from its computed values, and it is best to find interpolated values of Φ at exact submultiples of the arc S. I therefore interpolate Φ at the points for which the arc is $\frac{1}{24} S$, $\frac{2}{24} S \ldots \frac{12}{24} S$, 13 values in all.

The next step is the harmonic analysis of these 13 values of Φ, which is an even function of the arc, and the work may be conveniently arranged in the form of a schedule. I have usually proceeded as far as the term of the eighth order.

It may be remarked that if the harmonic expansion of Φ is convergent, the determinant from which the stability is determinable is also convergent.

But if the representation of Φ by the harmonic expansion up to the 8th harmonic is very imperfect, it is necessary to give up the attempt to determine the stability numerically. In such cases however it is nearly always possible to see that the orbit is unstable, although it may not sometimes be so easy to perceive whether the instability is even or uneven.

We next have to calculate the several members of the determinant Δ by the formula

$$\frac{\Phi_i}{\Phi_0 - 4j^2}.$$

This is the entry for the j^{th} row above or below the centre of the determinant, and it is the i^{th} member to the right and to the left of the leading diagonal, all the members on the diagonal being unity. The values of Φ_i computed to the eighth order suffice to enable us to write down 17 columns and rows of Δ. The method of computing Δ will be considered in the next section.

§ 13.

The calculation of a determinant of many columns and rows.

The following transformation contains the principle by which the number of columns and rows of a determinant may be diminished by unity;

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & \dots \\ b_1, & b_2, & b_3, & \dots \\ c_1, & c_2, & c_3, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1, & \frac{a_2}{a_1}, & \frac{a_3}{a_1}, & \dots \\ 0, & b_2 - b_1\frac{a_2}{a_1}, & b_3 - b_1\frac{a_3}{a_1}, & \dots \\ 0, & c_2 - c_1\frac{a_2}{a_1}, & c_3 - c_1\frac{a_3}{a_1}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 - b_1\frac{a_2}{a_1}, & b_3 - b_1\frac{a_3}{a_1}, & \dots \\ c_2 - c_1\frac{a_2}{a_1}, & c_3 - c_1\frac{a_3}{a_1}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Now if we write $b_2' = b_2 - b_1\frac{a_2}{a_1}$, and so on, and then extract the factor b_2', another column and row may be removed, and the process may be repeated until the determinant is reduced to a single member, say z_n; then

$$\Delta = a_1 b_2' c_3'' \dots z_n.$$

If the determinant is convergent and if the rows and columns be removed in proper succession, the factors tend to unity.

By interchanges of columns and rows any member of a determinant may be brought to stand at a corner, but if the number of interchanges is odd the sign of the determinant is changed.

It is not therefore necessary to work from a corner, as in the above example, but any column and any row may be chosen for elimination. The member which stands at the intersection of the chosen column and row may be called the centre of elimination. Then if the centre of elimination be at an odd or even number of moves from a corner, the sign of the whole is or is not changed.

In the determinants which arise in this investigation the centre of elimination is always taken on the diagonal, and thus no change of sign is introduced.

Let us suppose that the determinant to be evaluated is a symmetrical one, and that the columns and rows are numbered as in the following example:

$$\begin{array}{c|ccccc} & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & C, & c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \\ -1 & b_1, & B, & b_1, & b_2, & b_3 \\ 0 & a_2, & a_1, & A, & a_1, & a_2 \\ 1 & b_3, & b_2, & b_1, & B, & b_1 \\ 2 & c_4, & c_3, & c_2, & c_1, & C \end{array}$$

Let $(-1, -1)$ be the first centre of elimination, and $(1, 1)$ the second; then if the double elimination be carried out and algebraic reductions effected, it will be found that the result is

$$B^2\left(1-\frac{b_2^2}{B^2}\right)\begin{array}{c|ccc} & -2 & 0 & 2 \\ \hline -2 & B', & b_1', & b_2' \\ 0 & a_1', & A', & a_1' \\ 2 & b_2', & b_1', & B' \end{array}$$

Where

$$B' = C - \frac{b_2c_1+b_1c_2}{B+b_2} - \frac{(b_1-b_2)(c_1-c_2)}{B-\frac{b_2^2}{B}}, \quad b_1' = c_2 - \frac{b_1(c_1+c_2)}{B+b_2},$$

$$b_2' = c_4 - \frac{b_1c_1+b_2c_2}{B+b_2} + \frac{(b_1-b_2)(c_1-c_2)}{B-\frac{b_2^2}{B}}, \quad a_1' = a_2 - \frac{a_1(b_1+b_2)}{B+b_2},$$

$$A' = A - \frac{2a_1b_1}{B+b_2}.$$

If the determinant is convergent, with an odd number of columns and rows, $(0, 0)$ is the heart of the determinant; if the elimination pro-

ceeds away from the heart, at any stage of the process the approximation consists of the product of all the factors extracted, multiplied by (0, 0), the heart of the remaining determinant.

Thus in the above example after one double elimination the approximation is

$$B^2\left(1-\frac{b_2^2}{B^2}\right)\left(A-\frac{2a_1b_1}{B+b_2}\right).$$

This is in fact the full expression for the determinant

$$\begin{vmatrix} B, & b_1, & b_2 \\ a_1, & A, & a_1 \\ b_2, & b_1, & B \end{vmatrix}$$

I have found it most convenient in practice first to extract a squared factor, such as B^2 (thus reducing $(-1, -1)$ and $(1, 1)$ to unity), and afterwards to extract a single factor, such as $1-\frac{b_2^2}{B^2}$.

This process cannot of course be applied with advantage, when the work is algebraical, but some process of the kind seems to be practically necessary, when the approximate numerical value is to be found of a determinant of a large number of columns and rows.

It will be noticed that after each pair of eliminations the primitive symmetry is restored; but the work might equally well be arranged otherwise. For we might first eliminate from the centre (0, 0), which would not affect the symmetry, and we might then take the pair $(-1, -1)$ and $(1, 1)$. This variation of procedure would afford a valuable check on the arithmetic.

Where the outer fringe of the determinant obviously has but little influence on the final result, and where we are in any case going to use all the members in the original determinant, I have found it best to begin from the outside. In such a case four or five columns and rows may, as it were, be shelled off the outside, with scarcely any alteration of the central entries.

The actual numerical work of evaluating a determinant may be arranged as follows:

The number of decimal places to be retained is first fixed on. A paper is then marked with a gridiron of columns and rows, numbered from zero at the centre upwards and downwards. Each square should be large enough to contain four or five rows of figures. The original determinant is then written in the squares, the numbers being put as near the top of each square as possible. I have found it convenient to omit decimal points, and to express the numbers in units of the last decimal place retained. In most of my work, where only a rough

result was required, I have adopted three places of decimals; thus the unit in which the entries are expressed is ·001, and the diagonal members are all written as 1000.

The pair of symmetrical diagonal members, which is to form the first pair of centres, is then chosen. As stated above, I have in my later work usually worked from the outside. In the first pair of eliminations these diagonals are already unity, but this is not so subsequently, and we first reduce them to unity by dividing the rows on which they stand by their values, and by extracting a squared factor.

It will be found convenient to run a red line through the column and row to be removed. If the red lines be regarded as coordinate axes, the row being x and the column y, any member of the determinant may be specified by its x and y. If the member of the determinant whose coordinates are x, y be a; and if the member whose coordinates are x, 0 be b; and if the member whose coordinates are 0, y be c; then the number which has to be substituted for a is $a - bc$.

In other words each number on the horizontal red line has to be multiplied by each number on the vertical red line, and the products have to be subtracted from the numbers which stand at the remote corners of the rectangles.

In effecting this process I form a separate table of the subtrahends, and write down the differences immediately under the numbers which they displace.

After the first elimination, which has rendered the determinant unsymmetrical, a single factor corresponding to the other chosen diagonal member is extracted, its row is correspondingly altered, red lines are drawn to mark the column and row to be removed, and the similar process is repeated. The symmetry of the determinant should now be restored, but any pair of numbers which should agree are arrived at by different numerical processes.

The restoration of symmetry affords a very valuable check on arithmetical processes which I have found singularly difficult to work correctly.

As only a limited number of decimal places are employed there is often a discrepancy of unity in the last significant figure between two numbers which ought to agree. It is sometimes possible to determine by inspection which of the two numbers is arrived at by the less risky series of operations, and I then adopt that number to represent both entries. But where there is no obvious reason for choosing one result more than the other, I choose one or other at hasard, and restore the perfect symmetry.

The process of elimination is continued until the determinant is

reduced to (0, 0), but in the last two or three stages it is well to increase the number of decimals retained.

If at any stage the factor to be extracted becomes small, the whole row to which it belongs becomes large, and the symmetry may perhaps be seriously affected. In this case it is well not to choose this pair of centres of elimination, but to take another pair, leaving this pair to a later stage in the calculation.

If the determinant is negative, a negative factor will be extracted at some stage. In all the cases which have been worked out it is easy to see that no other negative factor will ever arise, and thus the determinant will remain clearly negative. Most of the determinants have been written with 17 columns and rows; then beginning with (− 8, − 8) and (8, 8) I find that it is often possible to erase 8 columns and 8 rows on a single sheet of paper, with scarcely any modification of the central part of the determinant. Thus the determinant which at first had 289 spaces (although many only contain zeros) is reduced to 81 spaces, with but little labour.

The multiplications have been done with Crelle's table, but a specially computed auxiliary table of products, from $\cdot 000 \times \cdot 000$ up to $\cdot 040 \times \cdot 040$ to three places of decimals, has rendered the work much more rapid.

I believe that the values obtained by this process are correct to within about one per cent. For the same determinant when reduced with different order of elimination agrees with its previous determination within less than that amount of discrepancy.

Part. II.

§ 14.

Periodic Orbits.

An orbit in which the third body can continually revolve, so as always to present the same character relatively to the two other bodies, is said to be periodic. If the motion is referred to a plane which is carried round with Jove and revolves about the Sun as a centre, any re-entrant orbit of the third body is periodic. Periodic orbits may consist of any number of revolutions round either of the primaries, or round other points in space. Periodic orbits, which are only re-entrant after several circuits, are much more difficult to discover than those which only make a single one; as hardly anything is known up to

the present time about this subject, I determined to confine my attention to 'simple periodic orbits', which are re-entrant after a single circuit. This definition of a simply periodic orbit must not preclude the consideration of orbits with loops, for the inclusion of such loops is necessary to the comprehension of the subject.

It appears from the differential equation of motion that periodic orbits must in general be symmetrical with respect to the line of syzygy; or if any periodic orbit consists of a closed circuit round a point which does not lie on this line, there must be a similar closed circuit round a symmetrical point on the other side of it.

Periodic orbits are critical cases which separate the orbits of one class from those of another, and the chief difficulty in tracing them consists in the fact that it is necessary to trace the gradual change of an orbit, as its parameters change, and to discover its form at the instant of its transformation into an orbit of a different character.

The partition of space derived from the Jacobian integral (§ 3) shows that the constant of relative energy C is of primary importance in the classification of orbits. The work of this investigation being numerical, I was compelled to assume a definite ratio for the mass of the Sun in terms of that of Jove; this ratio is taken as 10. The mass of the actual Sun in terms of that of the actual planet Jupiter is about 1000, and accordingly all the phenomena of perturbation are greatly exaggerated in our figures as compared with the real solar system. This exaggeration appeared to me advantageous for the purpose of giving a clear view of the phenomena.

The mass of the Sun being 10, that of Jove being unity and the distance between them being unity, we found in (9) that when C is greater than 40·1821 the third body must be either a superior planet, or an inferior planet, or a satellite, but cannot change from one of these conditions to another.

These larger values of C then bring us to those cases which are treated in the Planetary and Lunar Theories; I therefore cease my consideration of the problem for all values of C which are greater than 40·5. Hence the field to be treated is covered by values of C less than 40·5, and the problem is to obtain a complete synopsis of simply periodic orbits and of their stabilities*).

The field of investigation is however so large that in the present paper I am compelled to make further restrictions. In the first place, the case of superior planets has not been touched at all; although, at

*) In the original paper I inadvertently stated that C could not be less than 33. I should of course have said that $C = 33$ is the limiting value of C for which any portion of space is prohibited. This inadvertence has caused no error, since the smaller values of C have not yet been considered.

the point at which I have now arrived, they must soon be taken into account.

Secondly all the orbits considered are direct; the retrograde orbits would afford an interesting field of research.

Lastly the present paper only covers the field from C equal to 38 to 40·5; and even this has occupied me for three years.

The slowness with which results are attained by arithmetical processes has been very tantalising, but the interest of the work has been sustained by the fact that the results have presented a succession of surprises. I have, over and over again, been deceived when I imagined I could foresee the shape which would be assumed by the next orbit to be treated, and thus the subject was continually presenting itself under a new light. Nevertheless a point has, I think, been now reached at which some forecasts are possible, and I shall venture to say something hereafter in § 18 on this head, with the full knowledge however that the conjectures may prove erroneous.

Being ignorant of the nature of the orbits of which I was in search, I determined to begin by a thorough examination of one case. It seemed likely that the most instructive results would be obtained from cases in which it should be possible for an inferior planet and satellite to interchange their parts. Now when C is greater than 38·8760 but less than 40·1821, the two interior ovals of the curve of zero velocity coalesce into the shape of an hour-glass, and thus interchange of parts is possible. I therefore began by the consideration of the case where C is 39, and traced a large number of orbits which start at right angles to SJ, and in some cases I also traced the orbit with reference to axes fixed in space.

The two curves, which represent the orbit in space and with reference to the moving plane, contain a complete solution of the problem. For if the curve on the moving plane be drawn as a transparency, and if the Sun in the two figures be made to coincide, and if the transparent figure be made to revolve uniformly about the sun, the intersection of the two curves will give the position of the body both in time and place.

In order to exhibit this I show in fig. 2 a certain orbit with reference to axes fixed in space and also the same orbit referred to rotating axes. In the former figure the simultaneous positions of the planet and of Jove are joined by dotted lines. It is interesting to observe how the body hangs in the balance between the two centres, before the elliptic form of the orbit asserts itself, as the body approaches the Sun.

This figure, and others of the same sort, are instructive as illustrating the usual sequence of events in orbits of this class.

If a planet be started to move about the Sun in an orbit of a certain degree of eccentricity, it will at first move with more or less exactness in an ellipse with advancing perihelion. But as the aphelion approaches conjunction with Jove the perturbations will augment at each passage of the aphelion. At length the perturbation becomes so extreme that the elliptic form of the orbit is entirely lost for a time, and the body will either revert to the Sun, or it will be drawn off

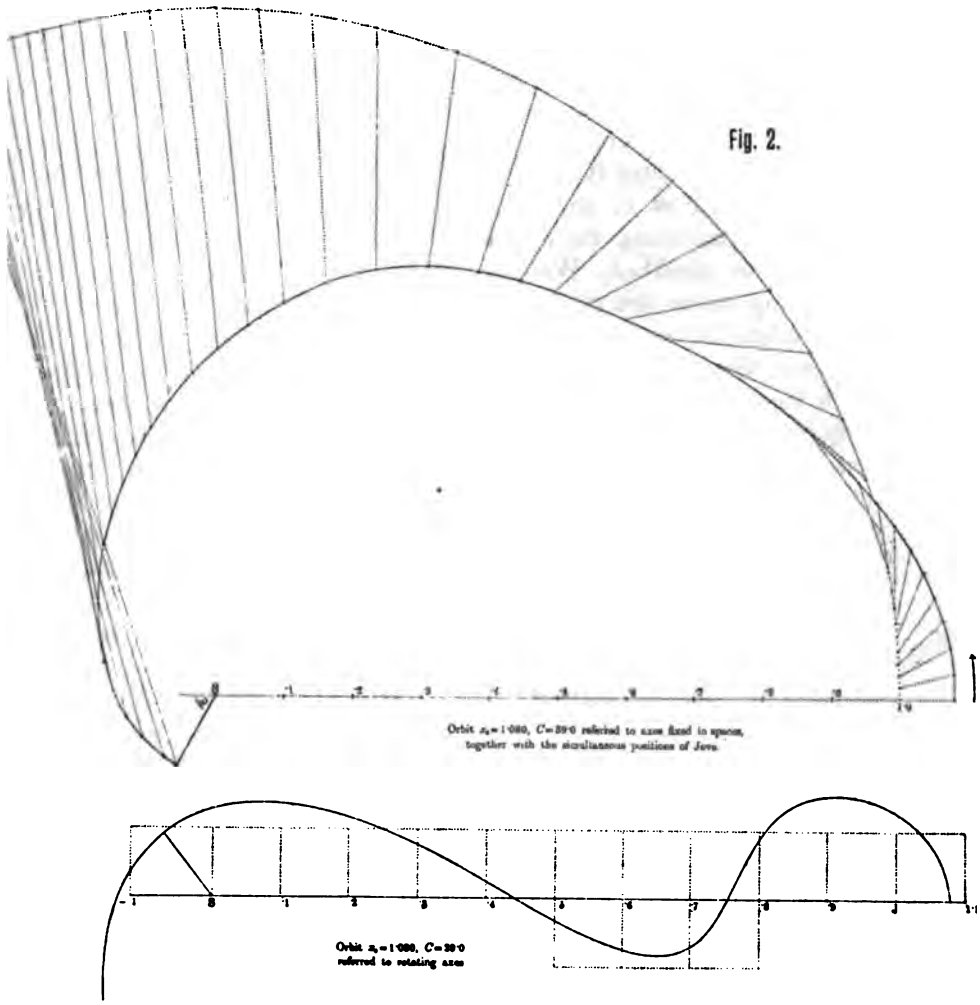


Fig. 2.

and begin a circuit round Jove. In either case after the approximate concurrence of aphelion with conjunction, the orbit will have lost all resemblance to its previous form.

The figure 2 exhibits the special case in which the body only makes a single circuit round Jove, and where the heliocentric elliptic orbit before and after the crisis has the same form; the perihelion has however advanced through twice the angle marked ϖ on the figure. In general the body would, after parting from the Sun, move several times round Jove until a concurrence of apojove with conjunction produced a severance of the connection, but in the figure this concurrence happens after the first circuit. If the neck of the hour-glass defining the curve of zero velocity be narrow, the body may move hundreds of times round one of the centres before its removal to the other.

It seems likely that a body of this kind would in course of time find itself in every part of the space within which its motion is confined. Sooner or later it must pass indefinitely near either to the Sun or to Jove, and as in an actual planetary system those bodies must have finite dimensions, the wanderer would at last collide with one of them and be absorbed. We thus gain some idea of the process by which stray bodies are gradually swept up by the Sun and planets.

It might be supposed that all possible orbits for any value of C will pass through a similar series of changes and that the bodies which move in them will be thus finally absorbed. Lord Kelvin is of opinion that this must be the case, and that all orbits are essentially unstable*). This may be so when sufficient time is allowed to elapse, but we shall see later that, even when the hour-glass has an open neck, there are still stable orbits, as far as our approximation goes. The only approximation permitted in this investigation is the neglect of the perturbation of Jove by the planet. For a very small planet the instability must accordingly be a very slow process, and I cannot but believe that the whole history of a planetary system may be comprised in the interval required for the instability to render itself manifest. Henceforward then I shall speak as though the stability of stable orbits were absolute, instead of being, as it probably is, only approximate.

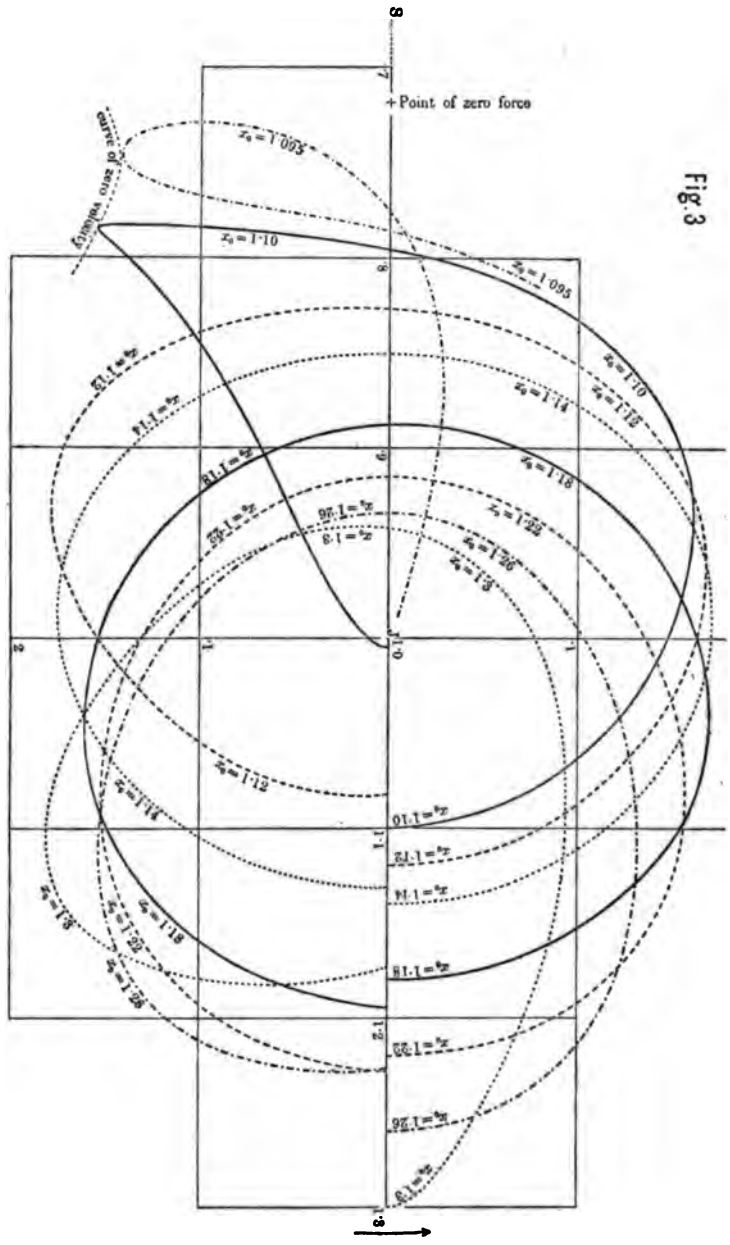
§ 15.

Non-periodic orbits; $C = 39{\cdot}0$.

(α) *Orbits round Jove.* Fig. 3.

The Sun S is outside of the figure towards the left. A small portion of the curve $2\Omega = 39$ is shown to the right of J, and another

*) Sir William Thomson, *On the Instability of Periodic Motion*, *Philosophical Magazine*, vol. 32, 1891, p. 555. M. Poincaré also considers that orbits may have a temporary, but not a secular stability. *Acta Mathem.* T. 13, 1890, p. 101.


ω
+Point of zero force
curve of zero velocity
$x_0 = 1{\cdot}093$
$x_0 = 1{\cdot}10$
$x_0 = 1{\cdot}095$
$x_0 = 1{\cdot}12$
$x_0 = 1{\cdot}14$
$x_0 = 1{\cdot}16$
$x_0 = 1{\cdot}18$
$x_0 = 1{\cdot}20$
$x_0 = 1{\cdot}22$
$x_0 = 1{\cdot}24$
$x_0 = 1{\cdot}26$
$x_0 = 1{\cdot}28$
$x_0 = 1{\cdot}30$
$x_0 = 1{\cdot}32$
$x_0 = 1{\cdot}34$
$x_0 = 1{\cdot}36$
$x_0 =

portion at the narrowing of the neck of the hour-glass. The two points of zero force given by $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$ (see § 3) are also marked.

The complete circuits are shown in order to obtain a better idea of the nature of the orbits, although this is unnecessary for the search for periodic orbits.

The satellite is supposed to be started at right angles to SJ at the conjunction remote from the sun, and enough of the orbits are shown to obtain a synopsis of the class. Here and elsewhere I define the orbits by the initial value of x, which is denoted by x_0; in this case the final value of x after the complete circuit may be called x_2.

The first on the right (dotted-line) starts with $x_0 = 1{\cdot}3$, and x_2 is much less than x_0. The second (chain-dotted) has $x_0 = 1{\cdot}26$, and x_2 has considerably increased so as to approach x_0. The third (broken-line) has $x_0 = 1{\cdot}22$, and x_2 has now become greater than x_0; therefore we have passed an orbit for which x_2 was equal to x_0, and such an orbit is periodic.

In the fourth (full-line) with $x_0 = 1{\cdot}18$, x_2 exceeds x_0 by more than it did in the third orbit. But in the fifth (dotted) with $x_0 = 1{\cdot}14$, x_2 has again become less than x_0; therefore we have passed another periodic orbit.

In the sixth orbit, (broken-line) $x_0 = 1{\cdot}12$, x_2 has decreased very much, and in the seventh (full-line) $x_0 = 1{\cdot}10$, x_2 has become quite small. This last has very nearly a cusp. It is not so accurately computed as the preceding ones, having been the first difficult orbit undertaken, and my methods at that time were not quite so satisfactory as they became subsequently. In this seventh orbit at the final intersection φ has just passed through the value zero, and I think it is probable that there is an orbit of very nearly this form, with the final φ exactly zero. Such an orbit would be periodic, but as it would not be simply periodic, it falls outside the scope of this paper.

The first part of the eighth orbit (chain-dot) was derived by interpolation between $x_0 = 1{\cdot}1$ and $x_0 = 1{\cdot}09$ (shown in a future figure); the beginning of this orbit, which I call $x_0 = 1{\cdot}095$, is not shown. It is a very remarkable curve, for after the loop, the body recrosses SJ, and going directly towards J, passes so close to it that it is impossible without more accurate computation to say what would happen subsequently. This orbit was so unexpected that I have thought it well to show in Fig. 4 its form with respect to axes fixed in space; in this figure (which does not claim close accuracy) the interpolated portion has been inserted. I do not think that any one could

have conjectured how the body should have been projected so as to fall into Jove.

For smaller values of x_0 the bodies are no longer simple satellites as they part company with Jove and pass away towards the Sun.

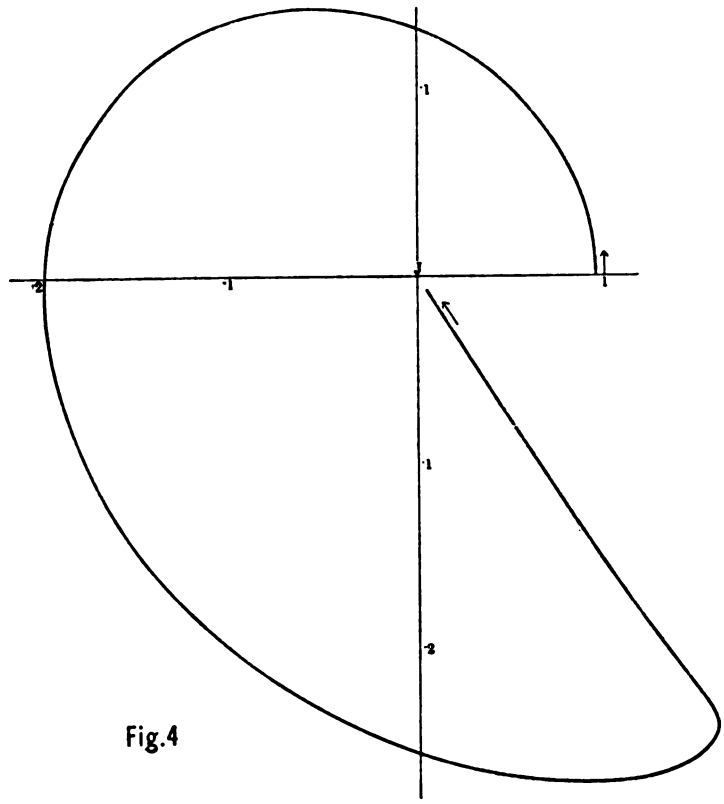


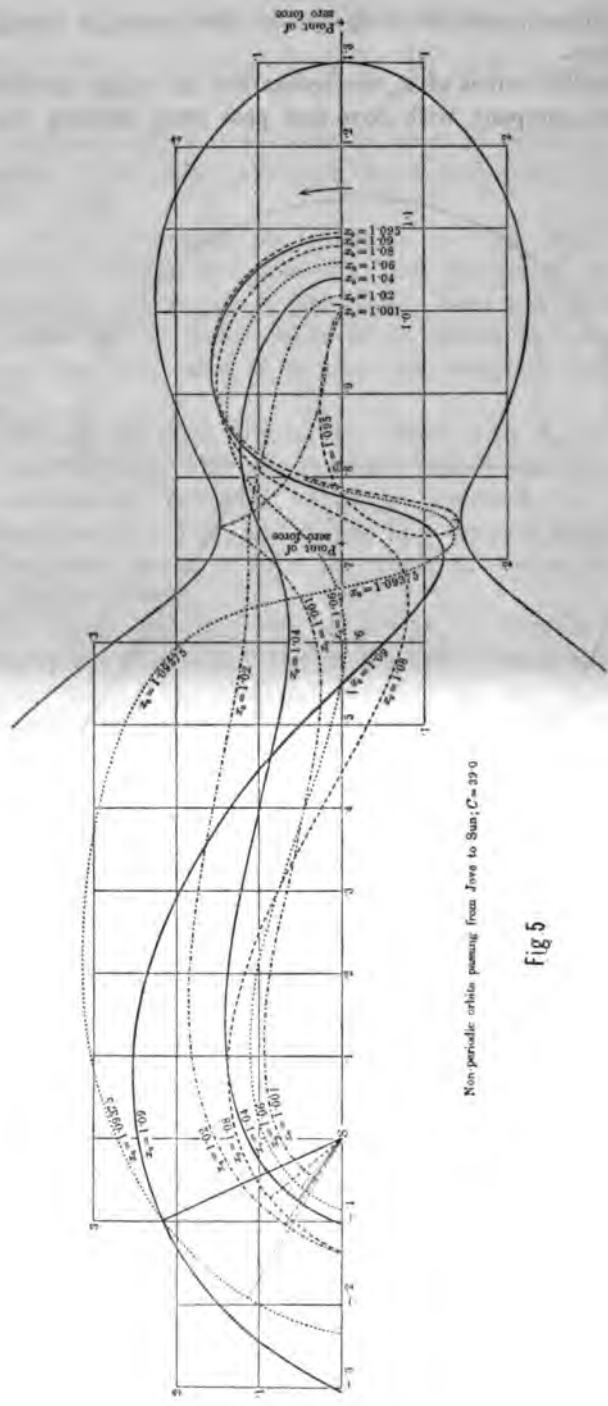
Fig.4

Orbit round Jove referred to axes fixed in space ($x_0 = 1{\cdot}095$, $C = 39{\cdot}0$)

(β) *Orbits passing from Jove to Sun.* Fig. 5.

The curve of zero velocity for $C = 39$ having been computed, it is shown in this figure, although it is not necessary.

The starting points are again from conjunction remote from the Sun. The first orbit (broken-line) is the one with which we ended in Figure 3, viz. $x_0 = 1{\cdot}095$; the interpolated portion is however now drawn, as well as the computed portion. The body in this case does not pass away to the Sun.



Non-periodic orbits passing from Jove to Sun; $C = 3{\cdot}9$

Fig 5

We next come to an orbit (dotted) of which the first part was found by interpolation and which I call $x_0 = 1{\cdot}09375$; the earlier portion of the curve is not drawn.

Where the orbit $x_0 = 1{\cdot}095$ crosses SJ for the third time, φ is clearly negative, but where the orbit $x_0 = 1{\cdot}09375$ crosses for the third time φ is positive. There must therefore be an intermediate case for which φ vanishes, and this will give us a third periodic orbit round J. The orbit $x_0 = 1{\cdot}09375$ passes away to the sun; and we then come to four more orbits $x_0 = 1{\cdot}09$, $1{\cdot}08$, $1{\cdot}06$, 104 which follow a similar course, but with diminishing depression towards the negative side of SJ. The next orbit is $x_0 = 1{\cdot}02$, in which the depression has disappeared. This curve has a slight hump in the place of the depression; it is the sort of feature which would present itself in a computed curve, when there has been an arithmetical error in the calculation, but we shall soon see that this hump is not explicable in this way.

The next curve which is traced (although others have been computed) starts with $x_0 = 1{\cdot}001$ (chain-dot); in a figure of this scale, it apparently starts actually from J. It will be observed that we now have a remarkable cusp, and it becomes obvious that the hump referred to above was an incipient elevation towards the cusp.

Passing now to the other end of the figure where the body passes round the Sun, we see from the incidence of the perihelia (which are indicated by radii from the Sun) that there can be no periodic orbit which is partly the path of a satellite and partly that of a planet; for such an orbit must have the longitude of the perihelion 180^0.

The positions of the perihelia and the perihelion-distances seem to be almost chaotic in the figure, but I believe that the calculations are substantially correct. But as each one of these curves represents three or four weeks hard work, I have not thought it good economy of labour to pursue the inquiry further in this respect.

(γ) *orbits round the Sun;* $C = 39{\cdot}0$. Fig. 6.

These curves are drawn with less accuracy than the others, being computed with three-figured logarithms. I thought that sufficient accuracy would be attainable with this degree of approximation, but when I found that the saving of labour was not considerable, whilst the loss of accuracy was very great, I returned to the use of four-figured tables. It did not however seem necessary to recompute these curves.

The complete circuit is drawn for four of the curves, but the rest are only carried half way round.

The orbits start to the left of the Sun at the conjunction remote from Jove. The first orbit is $x_0 = -{\cdot}6$ (full-line), and at the second

crossing of the line of conjunction the angle φ is negative. The second orbit $x_0 = -\cdot 4$ (dotted) has φ positive, but small, at the second

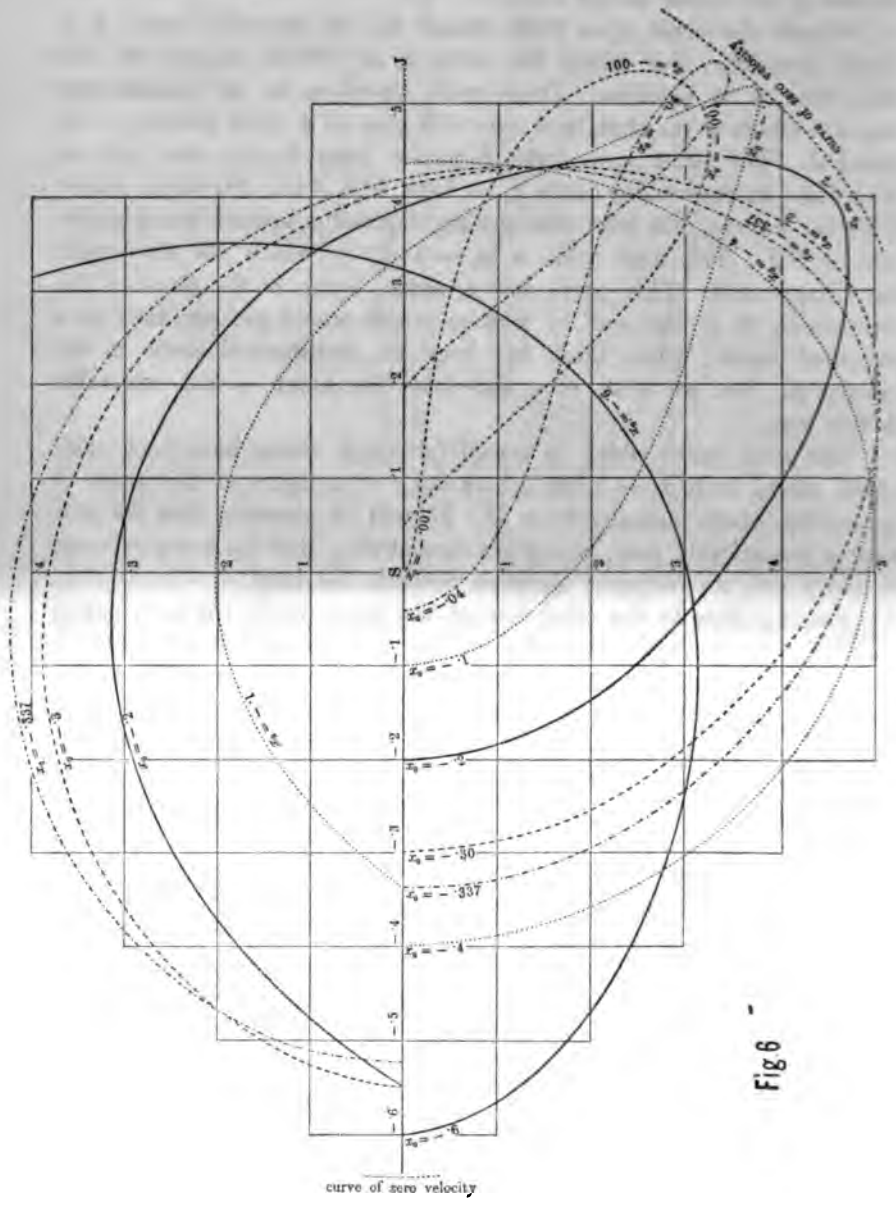


Fig 6.

crossing; hence there is a periodic orbit for a value of x_0 a little less than $-\cdot 4$.

All the succeeding orbits viz. $x_0 = -\cdot337, -\cdot3, -\cdot2, -\cdot1, -\cdot04, -\cdot001$ have φ positive and successively increasing at the second crossing; and thus there is no other periodic orbit. The last two of these orbits have loops.

The orbit $x_0 = -\cdot337$ was found in part by interpolation. It has been inserted because the third crossing of the line SJ appears to be orthogonal, and therefore the orbit is periodic, but not *simply* periodic. No search was being made for this sort of orbit, and the discovery was accidental.

§ 16.

Periodic Orbits classified according to values of C.

Plate.

Plate, fig. 1. $C = 40\cdot0$.

When C is greater than $40\cdot18$, the inner branch of the curve of zero velocity, $2\Omega = C$, consist of two ovals, as seen in fig. 1; the periodic orbits then consist of two approximately circular orbits round S and J respectively. These cases may be treated by the methods of the Planetary and Lunar Theories, and fall outside the scope of this paper.

When $C = 40\cdot18$ there is a third periodic orbit consisting of the point $x = \cdot7175$, $y = 0$. At this point a body is in unstable equilibrium, and this point is the beginning of a family of orbits; for, whilst in general periodic orbits begin in pairs, a single orbit may begin at a point.

In discussing these figures I shall denote the initial value of any function by the suffix 0; the suffix 1 will denote the value after the completion of a half circuit, and the suffix 2 the value on the completion of the whole circuit.

The planet A starts from $x_0 = -\cdot414$, $\varphi_0 = \pi$, and φ increases.

When $x \lessgtr -\cdot414$, $\varphi_1 \lessgtr 0$, $x_2 \gtrless x_0$ ($x_0 < -\cdot414$ of course denotes a starting point more remote from S, with x_0 numerically greater than $\cdot414$).

This orbit is stable with $c = 2\cdot81$.

The satellite A starts from $x_0 = 1\cdot03341$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases.

This orbit changes its shape rapidly with changes of C, as will appear below in the classification by families. Great care was bestowed on this case, and it was very troublesome to compute, since a considerable variation of x_0 corresponded with a small variation of φ_1.

When $x_0 \gtrless 1\cdot03341$, $\varphi_1 - \pi \lessgtr 0$, $x_2 \lessgtr x_0$.

The orbit is stable, but borders closely on instability, with $c = 3{\cdot}7$.

The third orbit is the oscillating satellite a, moving slowly with a retrograde revolution round the point of zero force $x = {\cdot}7175$, $y = 0$, which was described above as the commencement of a series of orbits.

The orbit a starts from $x_0 = {\cdot}705$, $\varphi_0 = 0$, and φ diminishes.

When $x_0 \gtrless {\cdot}705$, $\varphi_1 - \pi \gtrless 0$. That is to say if the body starts too near to Jove the change of direction at the sharp turn is not quite sufficient for periodicity; and if it starts too near the Sun the converse is true. In the first case after one or more circuits the body passes away towards J, and in the second case towards S.

This orbit is very unstable, and the instability is almost certainly of the even type.

Plate, fig. 2. $C = 39{\cdot}5$ and $39{\cdot}3$.

The planetary orbit $A(C = 39{\cdot}5)$ differs little from the proceeding case.

It starts from $x_0 = -{\cdot}424$, $\varphi_0 = \pi$, and φ increases.

When $x_0 \lessgtr -{\cdot}424$, $\varphi_1 \lessgtr 0$, $x_2 \gtrless x_0$.

The orbit is stable with $c = 2{\cdot}90$; but it is less stable than when $C = 40$.

The classification by families below shows that as C falls below $40{\cdot}0$, the orbit of the satellite A stretches out rapidly towards S, and at the same time the oval a expands. The manner in which the figure-of-8 orbit takes its origin from the orbits A and a is still obscure, as I shall point out below.

When C has diminished to $39{\cdot}5$ the orbit A is a figure-of-8, whilst the orbit a remains a closed oval.

The satellite A starts from $x_0 = 1{\cdot}0650$, $\varphi_0 = 0$, and φ begins increasing. When the body has passed half round J so that y vanishes, φ is equal to $\pi - 15^\circ 37'$; shortly after this φ diminishes and continues doing so until when y again vanishes $\varphi_1 = 0$.

We have $x_0 \gtrless 1{\cdot}0650$, $\varphi_1 \lessgtr 0$. When the body starts too far from J, it will move in some orbit round J, and when it starts too near J it will pass away to S.

This orbit is very unstable with even instability.

The oscillating orbit a was not computed for $C = 39{\cdot}5$*); during one part of its course it would be indistinguishable from part of A, and the rest is shown conjecturally by a dotted line.

This orbit is very unstable, with even instability.

It has already been remarked that after the first half circuit of satellite A φ was $\pi - 15^\circ 37'$, or as we may now write it $\pi - \varphi_1 = 15^\circ 37'$.

*) At least the computation was not completed, for it was found to be so troublesome, that it appeared that the work could be better bestowed elsewhere.

Now when x_0 is made to increase from 1·0650 until it reaches the curve $2\Omega = C$, $\varphi_1 - \pi$ will always be negative, or $\pi - \varphi_1$ positive. It appears however that $\pi - \varphi_1$ has a minimum value, which very nearly reaches zero. In fact when $x_0 = 1{\cdot}140$, $\varphi_1 = \pi - 0^\circ 20'$.

Since $\pi - \varphi_1$ is large when x_0 approaches $2\Omega = C$, and is $15^\circ 37'$ when $x_0 = 1{\cdot}0650$, it follows that if it vanishes at all, it must vanish twice. That is to say if there is another periodic orbit, there must be two.

As C diminishes the minimum value of $\pi - \varphi_1$ falls, and I found that when $C = 39{\cdot}4$ the minimum is reached when x_0 is about 1·15; for this value of x_0, $\pi - \varphi_1$ is $0^\circ 9'$, and there is still no value of x_0 for which $\pi - \varphi_1$ vanishes.

But when $C = 39{\cdot}3$ I computed the four orbits $x_0 = 1{\cdot}18$, 1·17, 1·16, 1·15 and found that for the two middle ones $\pi - \varphi_1$ was negative. By interpolation the pair of periodic orbits B and C were found.

The orbit B is given by

$$x_0 = 1{\cdot}1575, \qquad \varphi_0 = 0;$$

and the orbit C by

$$x_0 = 1{\cdot}1751, \qquad \varphi_0 = 0.$$

In both cases φ increases.

The relationship to the neighbouring orbits is given by the inequalities

$$\begin{aligned} &x_0 > 1{\cdot}1751, \quad \varphi_1 - \pi < 0, \quad x_2 < x_0, \\ &x_0 \begin{matrix} < 1{\cdot}1751 \\ > 1{\cdot}1575 \end{matrix}, \quad \varphi_1 - \pi > 0, \quad x_2 > x_0, \\ &x_0 < 1{\cdot}1575, \quad \varphi_1 - \pi < 0, \quad x_2 < x_0. \end{aligned}$$

The orbit B is slightly unstable, with even instability, and

$$c = {\cdot}156\sqrt{-1};$$

the orbit C is stable, but approaches instability, and $c = 2{\cdot}163$.

Plate, fig. 3. $C = 39{\cdot}0$

These are the periodic orbits which belong to the families of non-periodic orbits shown in figs. 3, 4, 6 above.

The planetary orbit A starts from $x_0 = -{\cdot}434$, $\varphi_0 = \pi$, and φ increases. The incidence amongst the neighbouring orbits is shown by the inequalities

$$x_0 \lessgtr -{\cdot}434, \quad \varphi_1 \lessgtr 0, \quad x_2 \gtrless x_0.$$

This orbit is unstable with slight uneven instability and

$$c = 1 + {\cdot}10\sqrt{-1}.$$

Is thus appears that for some value of C between 39·5 and 39·0 we

should find the passage of the planetary orbit A from stability to instability. It is certainly surprising to find that the instability of the planet sets in when the planet is a little less than half way to Jove at conjunction.

The satellite A starts from $x_0 = 1{\cdot}0941$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases until when y vanishes it is equal to about $\pi - 13°30'$; it then diminishes to zero,

Its incidence among neighbouring orbits (figs. 3 and 4) is given by the inequalities

$$x_0 \gtrless 1{\cdot}0941, \quad \varphi_1 \lesseqgtr 0.$$

When it starts too far from Jove it will move in some orbit round J, and when it starts too near Jove it will pass away towards S.

This orbit is very unstable, with even instability and $c = {\cdot}46\sqrt{-1}$. The orbit of the oscillating satellite a is indistinguishable from A throughout part of its course, but falls more remote from J on the side towards S. It starts from $x_0 = {\cdot}687$, $\varphi_0 = 0$, and φ diminishes.

When $x_0 \gtrless {\cdot}687$, $\varphi_1 = \pi \gtrless 0$; thus if the body starts too near Jove the total change of direction is insufficient for periodicity; and if it starts too near the Sun the converse in true. In the first case it passes away towards Jove, and in the second towards the Sun.

This orbit is very unstable with even instability, and c is about $2\sqrt{-1}$.

The satellite B starts with $x_0 = 1{\cdot}1500$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases. When $x_0 \gtrless 1{\cdot}1500$, $\varphi_1 - \pi \gtrless 0$, $x_2 \gtrless x_0$.

This orbit is unstable, with even instability, and $c = {\cdot}38\sqrt{-1}$.

The satellite C starts with $x_0 = 1{\cdot}2338$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases. When $x_0 \gtrless 1{\cdot}2338$, $\varphi_1 - \pi \lesseqgtr 0$, $x_2 \lesseqgtr x_0$.

This orbit is stable, with $c = 2{\cdot}46$.

Plate, fig. 4. $C = 38{\cdot}5$.

The planet A starts from $x_0 = -{\cdot}444$, $\varphi_0 = \pi$, and φ increases. When $x_0 \lesseqgtr -{\cdot}444$, $\varphi_1 \lesseqgtr 0$, $x_2 \gtrless x_0$.

The orbit is unstable, with uneven instability and $c = 1 + {\cdot}18\sqrt{-1}$.

The satellite A starts from $x_0 = 1{\cdot}1164$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases until when y vanishes it is equal to about $\pi - 12°$; it then diminishes to zero. It will be observed that at the first vanishing of y, the curve cuts the axis more nearly at right angles than was the case when $C = 39{\cdot}0$ and $39{\cdot}5$. When $x_0 \gtrless 1{\cdot}1164$, $\varphi_1 \lesseqgtr 0$. When it starts too far from Jove it will move in some orbit round J, and when its starts too near Jove it will pass away to the Sun. The orbit is very unstable, with even instability.

The oscillating satellite a starts with $x_0 = \cdot 6814$, $\varphi_0 = 0$, and φ diminishes. When $x_0 \gtrless \cdot 6814$, $\varphi_1 - \pi \gtrless 0$. In the first case it passes away towards Jove, in the second towards the Sun. The orbit is very unstable with even instability.

The satellite B starts with $x_0 = 1 \cdot 1497$, $\varphi_0 = 0$ and φ increases. When $x_0 \gtrless 1 \cdot 1497$, $\varphi_1 - \pi \gtrless 0$, $x_2 \gtrless x_0$.
The orbit is unstable with even instability, and $c = \cdot 70\sqrt{-1}$.

The satellite C starts with $x_0 = 1 \cdot 2760$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases. When $x_0 \gtrless 1 \cdot 2760$, $\varphi_1 - \pi \lesssim 0$, $x_2 \lesssim x_0$.

This orbit is very unstable, and as will appear below the instability is uneven. There has in fact been a passage from stability to uneven instability for some value of C between 39·0 and 38·75.

This orbit is interesting because it corresponds almost exactly to the cusped orbit described by Mr Hill as the moon of greatest lunation. It would seem however that this description is incorrect, for the satellite C moves with a still longer period when the cusp is replaced by a loop. Mr Hill's orbit was, on the account of his approximation, necessarily a symmetrical one with reference to the line of quadratures, but it will be observed that when the solar parallax is taken into account the orbit is very unsymmetrical.

When $C = 38 \cdot 88$ a new periodic orbit arises in the point $x_0 = 1 \cdot 3470$, $y = 0$ marked in the figure. This is the beginning of a second family of oscillating satellites, referred to here as b.

When $C = 38 \cdot 5$ this orbit begins with $x_0 = 1 \cdot 2919$, $\varphi_0 = 0$, and φ diminishes. When $x_0 \gtrless 1 \cdot 2919$, $\varphi_1 - \pi \gtrless 0$. That is to say if the body starts too far from Jove for periodicity, it will pass away in an orbit as a superior planet; if on the other hand it starts too near Jove for periodicity, it will pass to some orbit about Jove. This orbit is very unstable.

Plate, fig. 5. $C = 38 \cdot 0$.

The planet A starts from $x_0 = -\cdot 455$, $\varphi_0 = \pi$, and φ increases. When $x_0 \lesssim -\cdot 455$, $\varphi_1 \lesssim 0$, $x_2 \gtrless x_0$.
The orbit is unstable, with uneven instability, and

$$c = 1 + \cdot 193\sqrt{-1}.$$

The satellite A starts from $x_0 = 1 \cdot 1305$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases. When $x_0 \gtrless 1 \cdot 1305$, $\varphi_1 \lesssim 0$. The remarks concerning this orbit in previous cases apply again here.

At the point where the orbit crosses the axis of x for the second time $\pi - \varphi$ is less than it was in the preceding case.

The oscillating satellite a starts from $x_0 = \cdot 6760$, $\varphi_0 = 0$ and φ decreases. When $x_0 \gtrless \cdot 6760$, $\varphi_1 - \pi \gtrless 0$. It is very unstable, with even instability.

The satellite B starts from $x_0 = 1 \cdot 1470$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases. When $x_0 \gtrless 1 \cdot 1470$, $\varphi_1 - \pi \gtrless 0$, $x_2 \gtrless x_0$. The orbit is very unstable with even instability, and $c = \cdot 96\sqrt{-1}$.

The orbit B is rapidly approaching to a close resemblance to part of the orbit A, for the crossing point of the figure-of-8 in A is tending to become nearly perpendicular to SJ, and the two curves nearly coincide.

The satellite C starts from $x_0 = 1 \cdot 2480$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases. When $x_0 \gtrless 1 \cdot 2480$, $\varphi_1 - \pi \lessgtr 0$, $x_2 \lessgtr x_0$.

This orbit was very troublesome, and is not computed with a high degree of accuracy. A very small variation of C would make a large change in the size of the loops in the curve.

The orbit is very unstable with uneven instability.

The oscillating satellite b starts with $x_0 = 1 \cdot 2595$, $\varphi_0 = 0$, and φ decreases. When $x_0 \gtrless 1 \cdot 2595$, $\varphi_1 - \pi \gtrless 0$. The remarks made concerning this curve for $C = 38 \cdot 5$ apply again here.

This orbit is very unstable.

The orbit C seems to be gaining a close resemblance, in part of its course, with the loop b.

§ 17.

Classification of orbits by families.

Several orbits are given in this classification which were not included in § 16.

TABLE OF RESULTS.

Constant of Energy C	Coord. of starting point x_0	Synodic Period nT	Criterion of Stability $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} n\sqrt{\Phi_0}$	Apparent advance of pericentre in synodic period $2\pi\left(\frac{1}{2}c-1\right)$	Regression of pericentre in sid. period $2\pi\left(1-\frac{\frac{1}{2}c}{1+\frac{nT}{2\pi}}\right)$	Description of instability	Modulus of instability $\frac{\log\sqrt{2}}{\log[D+\sqrt{D^2}\pm 1]}$	Remarks
			Satellite A, Plate, fig. 8.					
40·5	1·1135	61°20′	+ ·112	39° 0′	22°20′	.....	.....	minimum of criterion
40·25	1·1150	65°40′	+ ·063	29° 0′	31° 0′	.....	.....	maximum of x_0
40·2	1·1090	66°50′	+ ·064	29°10′	31°40′	.....	.....	
40·0	1·0334	98° 0′	+ ·226	303°	− 161°	.....	.....	minimum of x_0
39·5	1·0650	229°	— ?	.....	.....	even	?	Figure-of-8 begins
39·0	1·0941	240°	— 1·06	.....	.....	even	0·5	
38·5	1·1164	258°	— ?	.....	.....	even	?	
38·0	1·1305	299°	— ?	.....	.....	even	?	
			Satellite B, Plate, fig. 9.					
39·3	1·1575	87°40′	— ·061	.....	.....	even	1·42	
39·0	1·1500	97° 0′	— ·402	.....	.....	even	0·58	
38·5	1·1497	113°20′	— 1·82	.....	.....	even	0·31	
38·0	1·1470	131°50′	— 4·5	.....	.....	even	0·23	
			Satellite C, Plate, fig. 10.					
39·3	1·1751	89°20′	+ ·064	81° 0′	24°30′	.....	.....	
39·0	1·2338	114° 0′	+ ·435	82°40′	23°30′	.....	.....	
38·75	1·2873	179°30′	+ 1·95	.....	.....	uneven	0·4	maximum of x_0
38·5	1·2760	210°50′	> + 1	.....	.....	uneven	?	
38·0	1·2480	235°20′	> + 1	.....	.....	uneven	?	

Constant of Energy C	Coord. of starting point x_0	Synodic Period nT	Criterion of Stability $\Delta \sin^2 \frac{1}{2}\pi\sqrt{\Phi_0}$	Apparent advance of pericentre in synodic period $2\pi\left(\frac{1}{2}c-1\right)$	Regression of pericentre in sid. period $2\pi\left(1-\frac{\frac{1}{2}c}{1+\frac{nT}{2\pi}}\right)$	Description of instability	Modulus of instability $\frac{\log\sqrt{2}}{\log[D+\sqrt{D^2\pm1}]}$	Remarks
				Oscillating Satellite *a*.				
40·18	·7175	.....	— ?	.....	.....	even		a point on SJ
40·0	·705	138°	— ?	.....	.....	even	?	
39·5	·693	?	— ?	.....	.....	even	?	
39·0	·687	146°	— 148	.....	.....	even	0·1	
38·5	·681	150°	— ?	.....	.....	even	?	
38·0	·676		— ?	.....	.....	even	?	
				Oscillating Satellite *b*.				
38·88	1·3470	.....	?			?	?	
38·5	1·2919	214°?	?	.....	.....	?	?	a point on SJ
38·0	1·2595	208°?	?	.....	.....	?	?	
				Planet *A*, Plate, fig. 11.				
40·0	− ·414	154°	+ ·91	145°	6°30′	.....	.....	
39·5	− ·424	165°	+ ·98	162°	2°	.....	.....	
39 0	− ·434	177°	+ 1·03	.....	.....	uneven	2·1	
38·5	− ·444	191°	+ 1·08	.....	.....	uneven	1·25	
38·5	− ·455	207°	+ 1·09	.....	.....	uneven	1·14	

Although the above table gives most of the facts, it will be well to draw attention to a few important points.

The passage of the family A of satellites into the figure-of-8 form is interesting. When my paper was published, I imagined that the oval A might advance until it touched the oval a, and that a figure-of-8 would then ensue. But Mr Hough has pointed out to me that two orbits can never touch — as should have been obvious to me. He has shown me arguments which lead us to believe that the genesis of the figure-of-8 is only explicable through the intervention of retrograde orbits*). There is undoubtedly at this point something wanting in my synopsis of orbits, and it will unfortunately need much computation to make good the omission. It seems probable that my lettering of the orbits by families will need to be amended.

I think it is certain that a more complex sort of figure-of-8 also exists, for we may imagine a body which describes two, three or more circuits round the point of zero force in an oval like a, before passing off into the branch round Jove. However these orbits can hardly be described as simply periodic, and I have not considered them in detail.

It appears from our table that the satellite orbit A is stable, but with only a very small margin of stability when $C = 40$. It is worthy of note that the criterion of stability after passing a minimum value of ·063, is rapidly increasing, so that the orbit is tending towards uneven instability. I do not know whether or not that instability has set in before the formation of the figure-of-8 orbit A.

Mr Hill has drawn an interesting family of orbits of satellites, beginning with the orbit of the moon and ending with a cusped orbit. Now our moon undoubtedly belongs to the family A, whilst the cusped and looped orbits belong to the family C. He neglects the solar parallax, and this approximation has in fact led to the absorption of two families into one another. It appears now that it is not possible to comprehend the part played by this class of orbit without the inclusion of the solar parallax, for the asymmetry of the family C with regard to the line of quadratures is an essential feature in it.

Mr Hill draws attention to the minimum of distance at syzygies in the orbits of satellites, and this is observable in our family C, but we also find a maximum of distance in the family A at the superior syzygy.

---

*) M. Poincaré has, on other grounds, arrived at the conclusion that the A orbits and the figure-of-8 orbits are not algebraically continuous. See Méc. Cél. T. III, p. 354.

The periods of some of the satellites are extraordinarily long, that of the last figure-of-8 A being $\frac{299}{360}$ or $\frac{5}{6}$ of that of Jove, and that of the last looped orbit C being $\frac{235}{360}$ or nearly $\frac{2}{3}$ of that of Jove

§ 18.

On the probable forms of periodic orbits for values of C less than 38.

It is obvious from fig. 5 in the Plate that a portion of the figure-of-8 orbit A and the orbit B are tending to a closer and closer resemblance. The same difficulties that present themselves, in respect to the genesis of the figure-of-8, are here repeated. I believe however that the orbit B and the figure-of-8 A are both on the point of disappearance, but that the oval a will continue to exist and to expand.

The planetary orbit A will continue to expand, but the heliocentric distance at the conjunction remote from J will shortly reach a maximum and will then diminish, whilst the heliocentric distance at the other conjunction will increase rapidly. This will continue until the planetary orbit A has advanced to near the oval a; a new series of figure-of-8 planetary orbits will then arise, and the heliocentric distance at the remote conjunction will then increase.

At some stage a pair of new planetary orbits B and C will arise from a single orbit; of these B will be evenly unstable and C stable.

The orbit B will expand, approach to close resemblance with a portion of A, and then both will disappear.

Reverting now to the satellite C, we are able to conjecture its future course. The figures 4 and 5, or fig. 10, in the Plate, show the growth of the two loops from two cusps. In order to throw light on the future development of these curves I have drawn Plate, fig. 2, which shows a non-periodic orbit for $C = 38{\cdot}5$ *); in it we see that the upper loop has descended below the line of conjunction, and the lower loop has risen above. For some value of C a little less than 38 there must be a periodic orbit of this general form. We shall thus have a periodic orbit with five full moons in the month. In this sort of orbit the crossing point P will be at first a point of contact; the distance JP will then diminish to a minimum and afterwards increase. It seems possible that P may move outwards and Q inwards, so as to meet; the upper loop will perhaps then have spread so as to nearly coincide with the lower, and the lower with the upper, and both will closely resemble the oval b. I think that

*) It would have been better to have drawn the similar curve for $C = 38{\cdot}0$, but this one suffices for the present purpose.

after this stage the orbit C will disappear, but the manner of the dissappearance remains obscure; the oval b will continue to exist. It is probable that the discussion of retrograde orbits will be necessary for the elucidation of this point.

The form of this orbit C is interesting when taken in connection with the looped orbit to which M. Poincaré*) drew attention, and which has been traced by Lord Kelvin**). They both neglected the solar parallax, and with the degree of approximation adopted by them, the central space might be made as small and the loops as large as we like. But the inclusion of the solar parallax now appears to be essential to the proper consideration of these orbits.

It appears from fig. 1 that when $C = 34{\cdot}91$, there is a new periodic orbit consisting of the point $x = -{\cdot}9469$, $y = 0$. This point is the origin of a new family of oscillating planets, say c, which describe ovals with retrograde revolution round the point of zero force, for values of C less than 34·91.

Turning now to our conjectural planetary orbit C, we see that whilst initially it will be nearly circular, it will ultimately produce two excrescences near the ends of the oval c. These excrescences will become cusps, and then loops; the loops will cross one another, become nearly identical with one another and nearly coincident with the oval c, and the orbit C will probably then disappear.

The case of the superior planets has not yet been considered, and there is not much concerning them of which I feel confident***). It is obvious however that they are described with an apparently retrograde revolution, and that they contract as C falls in value. The orbits will be nearly circular, but will bulge inwards in the neighbourhood of Jove. At some stage the inward depression of the orbit will draw near to the oval b. At this stage there will probably arise a new family of orbits, having the form of a sort of inverted figure-of-8. If the old figure-of-8 be likened to two circles touching one another externally, the new figure may be compared with a small circle touching a large one internally. A similar series of changes must ultimately take place with the oval c, and probably we may have an orbit with loops at both ends of the line of conjunctions.

I will not hasard detailed conjectures as to the future of the three ovals a, b, c. I think however that it is probable that they will stretch out towards the vertices of the two equilateral triangles

---

*) *Méc. Cél.*, p. 109.

**) *Phil. Mag.*, Nov. 1892.

***) I have now (1898) traced some of them.

which may be erected on SJ as base. These vertices must be themselves the origins of a pair of similar ovals, and perhaps the extremities of a, b, c will stretch out towards this fourth system of ovals.

§ 19.

Classification of stable orbits of satellites.

We have seen that amongst satellites there are two classes of stable orbits, namely those of the A and C families. The Plate, fig. 7 exhibits the limits of the orbits which have been shown to be stable, The exact orbits which possess limiting stability would of course differ slightly from those drawn in this figure.

When C is large the stable orbits of the A family are approximate circles of small radius. As C decreases the orbits swell, but when C reaches 40·25 the radius vector at superior syzygy reaches a maximum. Hence the orbit

$$x_0 = 1{\cdot}1150, \quad C = 40{\cdot}25$$

gives one limit of the stable orbits of this family. The orbit

$$x_0 = 1{\cdot}0334, \quad C = 40{\cdot}0$$

gives approximately another limit as regards the inferior syzygy. The shaded space between these two orbits is filled with stable orbits.

The stable orbits of the C family begin when C is a little greater than 39·3, and the first one traced is that for which

$$x_0 = 1{\cdot}1751, \text{ and } C = 39{\cdot}3.$$

The stability of these orbits still subsists when $C = 39{\cdot}0$, but this orbit is already very unstable when C has fallen to 38·75. Accordingly I take for the other limit of orbits of this kind

$$x_0 = 1{\cdot}2338, \quad C = 39{\cdot}0.$$

The shaded space between these two is filled with stable orbits.

It will be observed that there remains an unshaded tract within which no stable orbit can exist. I think moreover that it is probable that with a smaller mass for Jove we should have found a complete annulus within which stability is impossible.

This conclusion is interesting when viewed in connection with the distribution of the satellites and planets of our system, and it appears to me to be the first exact result, which throws any light on Bode's empirical law as to the mean distances of planets and satellites from their primaries.

It is as yet too soon to make a similar classification of stable planetary orbits, but this will follow in due course.

We have seen in an earlier section that unstable orbits are such as ultimately to lead to the absorption of bodies moving in them

into one or other of the perturbing centres. If there were a large number of perturbing centres, as in our planetary system, the problem would become incomparably more difficult, but I think that the present investigation affords evidence that if we were to have a system consisting of a large planet moving round the sun, and of a cloud of infinitesimal bodies circling about them, a system would ultimately be evolved where there would be inferior and superior planets and a pair of satellites moving in certain zones indicated by our figures.

In the paper in the Acta Mathematica the numerical results, which are exhibited here only in the form of figures, are given in an appendix.

Ueber die Erniedrigung der Anzahl der unabhängigen Parameter Lagrange'scher Bewegungsgleichungen durch Erhöhung der Ordnung des kinetischen Potentials.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

Helmholtz hat für kinetische Potentiale der Form

$$H = -T - U,$$

worin T als actuelle Energie, in den unabhängigen Parametern $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ des Systemes ausgedrückt, eine homogene Function zweiten Grades von $p_1', p_2', \ldots p_\mu'$ darstellt, deren Coefficienten von $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ abhängen, während die potentielle Energie U eine reine Function eben dieser Parameter ist, gezeigt, dass, wenn einzelne Parameter selbst im kinetischen Potentiale H nicht vorkommen, sich mit Hülfe der entsprechenden Lagrange'schen Gleichungen vermöge einer Elimination der dazu gehörigen Ableitungen dieser Parameter für die übrigen Bewegungsgleichungen wiederum die Lagrange'sche Form ergiebt, der jedoch ein kinetisches Potential zu Grunde liegt, welches nicht mehr eine *homogene* Function zweiten Grades der Ableitungen der übrig gebliebenen Parameter ist sondern noch eine lineare Function derselben mit constanten Coefficienten enthält, und diese Fälle als Formen der verborgenen Bewegung definirt. Ich habe in meiner Arbeit*) „Ueber die Principien der Mechanik" einige einfache Anwendungen dieser Helmholtz'schen Darstellung gemacht und unter anderem gezeigt, dass man die Bewegung zweier nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehender Punkte dadurch, dass man einen dritten, auf den nur seine Trägheit wirkt, in passender Weise mit diesen verbindet, so abändern kann, dass die Bewegung dieser beiden Punkte nach dem Weber'schen Gesetze vor sich geht, ferner allgemein die Fälle der verborgenen Bewegung und unvollständigen Probleme für kinetische Potentiale erster Ordnung, also für solche, welche beliebige

*) Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 118 und 119, und Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1896 und 1897.

Functionen der Parameter und ihrer ersten Ableitungen sind, ermittelt. Eine Betrachtung völlig anderer Natur soll aber im Folgenden angestellt werden. Es soll die Frage aufgeworfen werden, in welchen Fällen die Lagrange'schen Gleichungen für kinetische Potentiale k^{ter} Ordnung sich durch Elimination von Parametern auf Lagrange'sche Gleichungen von weniger Parametern aber mit einem kinetischen Potentiale von höherer als der k^{ten} Ordnung zurückführen lassen, im einfachsten Falle, wann Bewegungsgleichungen mit einem kinetischen Potentiale, welches von μ Parametern und deren ersten Ableitungen abhängt, sich reduciren lassen auf Lagrange'sche Gleichungen von weniger Parametern mit einem kinetischen Potentiale, welches eben diese mit ihren ersten und zweiten Ableitungen enthält. Das Problem, in der Sprache der Mechanik ausgedrückt, würde sich dahin zusammenfassen lassen, die Fälle anzugeben, in denen für die Bewegung eines Systemes, dessen unabhängige Parameter von Kräften angegriffen werden, welche von diesen und deren ersten Ableitungen abhängen, die Veränderungen einer geringeren Anzahl von Parametern als durch solche Kräfte hervorgebracht dargestellt werden können, welche von den Coordinaten und deren höheren Ableitungen abhängen, oder, als eine Frage rein analytischer Natur aufgefasst, würde es sich um die Discussion der Form des Eliminationsresultates handeln, welches durch die Elimination von Variabeln aus den Lagrange'schen Gleichungen, die zu einem kinetischen Potential irgend welcher Ordnung gehören, entsteht, und festzustellen, wann dasselbe wieder die Lagrange'sche Form und zwar für ein kinetisches Potential höherer Ordnung annimmt.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall nur zweier von einander unabhängiger Parameter p_1 und p_2, für welche die beiden Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1'} + P_1 = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_2'} + P_2 = 0,$$

worin H ein kinetisches Potential erster Ordnung, also von p_1, p_2 und deren ersten Ableitungen abhängen soll, während P_1 und P_2 nur Functionen der Parameter sind, die Form annehmen mögen

$$p_1'' = f_1(p_1, p_2), \tag{1}$$

$$p_2'' = f_2(p_1, p_2), \tag{2}$$

was stets der Fall sein wird, wenn das kinetische Potential die Gestalt hat

$$H = ap_1'^2 + 2bp_1'p_2' + cp_2'^2 + F(p_1, p_2),$$

worin a, b, c Constanten bedeuten.

Die Elimination des Parameters p_1 aus den beiden Gleichungen (1) und (2) wird dadurch bewerkstelligt werden können, dass man durch

zweimalige Differentiation der Gleichung (2) nach t die Beziehungen bildet

$$(3)\quad p_2''' = \frac{\partial f_2}{\partial p_1} p_1' + \frac{\partial f_2}{\partial p_2} p_2',$$

$$(4)\quad p_2'''' = \frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1^2} p_1'^2 + 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1 \partial p_2} p_1' p_2' + \frac{\partial^2 f_2}{\partial p_2^2} p_2'^2 + \frac{\partial f_2}{\partial p_1} p_1'' + \frac{\partial f_2}{\partial p_2} p_2''$$

und durch Elimination von p_1' und p_1'' aus den Gleichungen (1), (3), (4) die Gleichung herleitet

$$(5)\quad p_2'''' = \frac{\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1^2}}{\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)^2} p_2'''^2 - 2\frac{\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1^2}\frac{\partial f_2}{\partial p_2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1 \partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial p_1}}{\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)^2} p_2' p_2''' + \frac{\partial f_2}{\partial p_2} p_2''$$

$$+ \frac{\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1 \partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\frac{\partial f_2}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial p_2^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)^2}{\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)^2} p_2'^2 + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial p_1},$$

in welche nur noch der aus (2) zu entnehmende Werth von p_1, durch p_2 und p_2'' ausgedrückt, einzusetzen ist, wobei zu bemerken, dass die Grösse p_2''' nicht mehr von Neuem eintritt, sondern allein in den Posten, in denen sie die Gleichung (5) enthält, bestehen bleibt. Soll sich nun, wie wir verlangen, das Eliminationsresultat wiederum in die Lagrange'sche Form und zwar, wie es aus der Natur des Resultates ersichtlich, mit einem kinetischen Potential $\mathfrak{H}$ von der zweiten Ordnung bringen lassen, also wenn $\mathfrak{H}$ eine Function von p_2, p_2', p_2'' ist, die Form annehmen

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2''} + \mathfrak{P} = 0$$

oder

$$(6)\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2''^2} p_2'''' + \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2''^3} p_2'''^2 + 2\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2''^2 \partial p_2} p_2' + \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2''^2 \partial p_2'} p_2''\right) p_2'''$$

$$+ \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2'' \partial p_2'^2} p_2''^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2'' \partial p_2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2'^2}\right) p_2'' + 2\frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2 \partial p_2' \partial p_2''} p_2' p_2''$$

$$+ \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2'' \partial p_2^2} p_2'^2 - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2' \partial p_2} p_2' + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} + \mathfrak{P} = 0,$$

worin $\mathfrak{P}$ eine Function von p_2 sein soll, so wird die Identificirung von (5) und (6), wenn in erstere aus (2) der Werth von p_1, durch p_2 und p_2'' ausgedrückt, eingesetzt worden, und die sich ergebenden Ausdrücke durch Klammern bezeichnet werden, zunächst für die Coefficienten von $p_2'''^2$ und p_2''' die Beziehungen liefern

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\frac{\partial^3 \Phi}{\partial p_2''^3}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}} = -\dfrac{\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1^2}\right)}{\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)^2}, \\ \dfrac{\frac{\partial^3 \Phi}{\partial p_2''^2 \partial p_2} p_2' + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial p_2''^2 \partial p_2'} p_2''}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}} = \dfrac{\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1^2}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1 \partial p_2}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)}{\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)^2} p_2'. \end{cases}$$

Bezeichnet man nun den aus der Gleichung (2) entnommenen Werth von p_1 durch

$$(8)\quad p_1 = \varphi(p_2, p_2''),$$

so wird sich aus der in p_2 und p_2'' identischen Gleichung

$$p_2'' = f_2\left(\varphi(p_2, p_2''), p_2\right)$$

durch Differentiation nach p_2 und p_2''

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_2}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} = 1$$

ergeben, und hieraus, weil

$$\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right) = \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1^2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1 \partial p_2}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right) = \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1 \partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_2^2}\right)$$

ist, wiederum durch Differentiation nach p_2 und p_2''

$$\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1^2}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1 \partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2^2} + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_2^2}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1^2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1 \partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2 \partial p_2''} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1^2}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2''^2} = 0,$$

folgen. Berechnet man hieraus die Werthe von

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right), \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_2}\right), \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1^2}\right), \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_1 \partial p_2}\right), \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial p_2^2}\right)$$

durch die partiellen Differentialquotienten der φ-Functionen ausgedrückt und substituirt diese Werthe in die Gleichungen (7), so nehmen diese die einfache Form an

$$(9)\quad \frac{\frac{\partial^3 \Phi}{\partial p_2''^3}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2''^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}},$$

$$(10)\quad \frac{\frac{\partial^3 \Phi}{\partial p_2''^2 \partial p_2}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}} p_2' + \frac{\frac{\partial^3 \Phi}{\partial p_2''^2 \partial p_2'}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}} p_2'' = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2'' \partial p_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}} p_2'.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2''^2} = V, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} = W,$$

so folgt aus (9)

$$V = \omega(p_2, p_2')\, W$$

und hieraus nach (10), da W von p_2' unabhängig ist,

$$p_2' \frac{\partial \log V}{\partial p_2} + p_2'' \frac{\partial \log V}{\partial p_2'} = p_2' \frac{\partial \log W}{\partial p_2}$$

oder

$$p_2' \frac{\partial \log \omega(p_2, p_2')}{\partial p_2} + p_2'' \frac{\partial \log \omega(p_2, p_2')}{\partial p_2'} = 0,$$

also, da diese Gleichung identisch stattfinden soll,

$$\frac{\partial \log \omega(p_2, p_2')}{\partial p_2} = 0, \quad \frac{\partial \log \omega(p_2, p_2')}{\partial p_2'} = 0$$

oder ω eine Constante c, so dass sich als nothwendige Bedingung ergiebt

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2''^2} = c \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} \tag{11}$$

und vermöge (5) und (6) mit Hülfe der oben angegebenen Beziehungen noch identisch zu erfüllen bleibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2'' \partial p_2'^2} p_2''^2 + \Big(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2'' \partial p_2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2'^2}\Big) p_2'' + 2 \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2 \partial p_2' \partial p_2''} p_2' p_2'' \\ + \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2'' \partial p_2^2} p_2'^2 - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2' \partial p_2} p_2' + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} + \mathfrak{P} \\ = c \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} p_2'' + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2^2} p_2'^2 - c(f_1). \end{aligned} \tag{12}$$

Da aber nach (11)

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2''} = c \,.\, \varphi + \Omega(p_2, p_2'), \tag{13}$$

und somit (12) in

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2'' \partial p_2'^2} p_2''^2 + 2 \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2 \partial p_2' \partial p_2''} p_2' p_2'' - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2'^2} p_2'' - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_1' \partial p_2} p_2' + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p_2^2} p_2'^2 \\ + \frac{\partial \Omega}{\partial p_2} p_2'' + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} + \mathfrak{P} = - c(f_1) \end{aligned}$$

übergeht, so wird man, da die rechte Seite dieser Gleichung von p_2' unabhängig ist, annehmen dürfen, dass $\mathfrak{H}$, also auch Ω die erste Ableitung dieses Parameters nicht enthalten und somit nur noch die Gleichungen zu befriedigen haben

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial p_2^2} = 0$$

und

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_2} p_2'' + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} + \mathfrak{P} = - c(f_1),$$

aus denen

$$\Omega = -acp_2 + b,$$

worin a und b beliebige Constanten bedeuten, und

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} = -c(f_1) + acp_2'' - \mathfrak{P} \tag{14}$$

folgen, während (13) in

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2''} = c \cdot \varphi - acp_2 + b \tag{15}$$

übergeht.

Die durch die Gleichungen (14) und (15) gegebenen nothwendigen Bedingungen für die Transformation des Eliminationsresultates in die Lagrange'sche Form erfordern offenbar, dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \frac{\partial (f_1)}{\partial p_2''} = 2a$$

oder dass, weil

$$\frac{\partial (f_1)}{\partial p_2''} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}$$

ist, die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} = 2a$$

oder nach Früherem

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\right) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_2}\right) = 2a \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right) \tag{16}$$

identisch in p_2 und p_2'' erfüllt wird, oder dass die in p_1 und p_2 identische Beziehung besteht

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_1} - \frac{\partial f_2}{\partial p_2} = 2a \frac{\partial f_2}{\partial p_1}. \tag{17}$$

Umgekehrt folgt aber auch aus (17) oder (16), dass für den vermittels (14) und (15) hergeleiteten Werth des kinetischen Potentials

$$\mathfrak{H} = c\int \varphi dp_2'' - c\int \left[(f_1) + \int \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} dp_2''\right] dp_2 + acp_2p_2'' + bp_2'' - \int \mathfrak{P} dp_2, \tag{18}$$

worin c eine willkürliche Constante und $\mathfrak{P}$ eine beliebige Function von p_2 bedeutet, die Lagrange'sche Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2''} + \mathfrak{P} = 0$$

die Form annimmt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} p_2'''' = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2''^2} p_2'''^2 - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2 \partial p_2''} p_2' p_2''' - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} p_2'' - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2'^2} p_2'^2 + (f_1),$$

oder mit Hülfe der oben aufgestellten Beziehungen zwischen der Function f_2 und ihrer inversen Function φ, die Gestalt des Eliminationsresultates (5).

Wir finden somit,

dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Elimination eines Parameters p_1 zwischen zwei für ein kinetisches Potential erster Ordnung in der Gestalt

$$p_1'' = f_1(p_1, p_2), \quad p_2'' = f_2(p_1, p_2)$$

gegebene Lagrange'sche Gleichungen auf **eine** *Lagrange'sche Gleichung mit einem kinetischen Potential zweiter Ordnung, also auf die Form*

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2''} + \mathfrak{P} = 0$$

führt, worin $\mathfrak{P}$ eine beliebig vorgelegte Function von p_2 bedeutet, durch die in p_1 und p_2 identische Gleichung dargestellt ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_1} - \frac{\partial f_2}{\partial p_2} = 2a\frac{\partial f_2}{\partial p_1},$$

worin a eine Constante bedeutet, und zwar lautet dann das von p_2' unabhängige kinetische Potential

$$\mathfrak{H} = c\int \varphi\, dp_2'' - c\int\left[(f_1) + \int \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} dp_2''\right] dp_2 + acp_2p_2'' + bp_2'' - \int \mathfrak{P}\, dp_2,$$

worin c und b willkürliche Constanten darstellen und

$$p_1 = \varphi(p_2, p_2'')$$

die inverse Function der zweiten gegebenen Differentialgleichung ist.

Haben die beiden Bewegungsgleichungen die Form

$$p_1'' = \frac{\partial U}{\partial p_1}, \quad p_2'' = \frac{\partial U}{\partial p_2},$$

so geht die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Eliminationsresultat die Lagrange'sche Form für ein kinetisches Potential zweiter Ordnung annimmt, nach (17) in

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial p_2^2} = 2a\frac{\partial^2 U}{\partial p_1 \partial p_2}$$

über, und es ist somit nothwendig und hinreichend, dass U die Form hat

$$U = \omega_1(p_1 + \varkappa_1 p_2) + \omega_2(p_1 + \varkappa_2 p_2),$$

worin ω_1 und ω_2 willkürliche Functionen bedeuten, und $\varkappa_1, \varkappa_2$ die Lösungen der Gleichung

$$\varkappa^2 + 2a\varkappa = 1$$

sind, ausser wenn $a = \pm i$ ist, in welchem Falle das allgemeine Integral der obigen Differentialgleichung durch

$$U = \omega_1(p_1 \mp ip_2) + p_1\omega_2(p_1 \mp ip_2)$$

dargestellt wird. So werden z. B. für

$$U = p_1^3 + 3p_1p_2^2$$

die beiden Differentialgleichungen

$$p_1'' = 3p_1^2 + 3p_2^2, \quad p_2'' = 6p_1p_2$$

durch Elimination von p_1 die Differentialgleichung

$$2p_2^2p_2'''' - 4p_2p_2'p_2''' + 4p_2'^2p_2'' - 3p_2p_2''^2 - 36p_2^5 = 0$$

liefern, welche sich für

$$\Phi = \frac{p_2''^2}{12p_2} - p_2^3$$

in die Form setzen lässt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2''} = 0.$$

Ebenso bedarf es keiner weiteren Ausführung, um z. B. zu zeigen, dass, wenn ein Punkt von einer Kraft beeinflusst wird, welche die Kräftefunction U besitzt, und derselbe gezwungen ist, sich auf einer Ebene

$$z = ax + by + c$$

zu bewegen, sich aus den Bewegungsgleichungen in x und y durch Elimination einer Variabeln eine Lagrange'sche Gleichung mit einem kinetischen Potential zweiter Ordnung in der anderen Variabeln ergeben wird, wenn die Kräftefunction nach Elimination von z die Form annimmt

$$(U) = \omega_1[\sqrt{1+a^2}\cdot x + \sqrt{1+b^2}\cdot y] + \omega_2[\sqrt{1+a^2}\cdot x - \sqrt{1+b^2}\cdot y],$$

worin ω_1 und ω_2 beliebige Functionen bedeuten, also wie leicht zu sehen, wenn der Punkt nach einem festen Punkte mit einer von der Entfernung abhängigen Kraft angezogen wird, und diese der Entfernung proportional ist.

Ich lasse nun die Annahme fallen, dass für zwei von einander unabhängige Parameter p_1 und p_2 die Lagrange'schen Gleichungen die Formen (1) und (2) annehmen, und lege der nachfolgenden Untersuchung den *allgemeinen* Fall zu Grunde, dass das kinetische Potential erster Ordnung durch Einführung der unabhängigen Parameter p_1 und p_2 durch den Ausdruck gegeben ist

$$H = \omega_{11}p_1'^2 + 2\omega_{12}p_1'p_2' + \omega_{22}p_2'^2 + \Omega, \tag{19}$$

worin ω_{11}, ω_{12}, ω_{22}, Ω Functionen von p_1 und p_2 sind; wir werfen wieder die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, dass die Elimination eines der Parameter auf eine Lagrange'sche Gleichung mit einem kinetischen Potential zweiter Ordnung führt.

Zunächst können wir durch Einführung zweier anderer unabhängiger Parameter q_1 und q_2 vermöge der Gleichungen

$$p_1 = \varphi_1(q_1, q_2), \quad p_2 = \varphi_2(q_1, q_2)$$

das in die Form

$$H = (\Omega_{11} p_1' + \Omega_{12} p_2')(\Omega_{21} p_1' + \Omega_{22} p_2') + \Omega$$

gesetzte kinetische Potential in

$$H = \left[\left(\Omega_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} + \Omega_{12}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right) q_1' + \left(\Omega_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} + \Omega_{12}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right) q_2'\right]$$
$$\times\left[\left(\Omega_{21}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} + \Omega_{22}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right) q_1' + \left(\Omega_{21}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} + \Omega_{22}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right) q_2'\right] + \Omega,$$

transformiren, wobei in $\Omega_{\alpha\beta}$ und Ω die φ-Functionen statt der Variabeln p_1 und p_2 zu substituiren sind, und erhalten, wenn die Functionen φ_1 und φ_2 durch die beiden partiellen Differentialgleichungen definirt werden

$$\Omega_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} + \Omega_{12}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} = 0, \quad \Omega_{21}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} + \Omega_{22}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1} = 0, \tag{20}$$

das kinetische Potential in der Form

$$H = \left(\Omega_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} + \Omega_{12}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)\left(\Omega_{21}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} + \Omega_{22}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right) q_1' q_2' + \Omega$$

oder vermöge (20)

$$H = (\Omega_{11}\Omega_{22} - \Omega_{12}\Omega_{21})\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right) q_1' q_2' + \Omega$$

oder endlich

$$H = 2\sqrt{\omega_{12}^2 - \omega_{11}\omega_{22}}\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right) q_1' q_2' + \Omega.$$

Legen wir somit das kinetische Potential in der eben erhaltenen allgemeinen Form

$$H = \omega(p_1, p_2) p_1' p_2' + \Omega(p_1, p_2) \tag{21}$$

zu Grunde, so werden die zugehörigen Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1'} + P_1 = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_2'} + P_2 = 0$$

die Form annehmen

$$p_1'' = -\frac{\frac{\partial\omega}{\partial p_1}}{\omega} p_1'^2 + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\Omega}{\partial p_2} + \frac{P_2}{\omega}, \tag{22}$$

$$p_2'' = -\frac{\frac{\partial\omega}{\partial p_2}}{\omega} p_2'^2 + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\Omega}{\partial p_1} + \frac{P_1}{\omega}, \tag{23}$$

worin P_1 und P_2 Functionen von p_1 und p_2 sind, und zwischen diesen der Parameter p_1 zu eliminiren sein.

Setzt man zur Abkürzung die Gleichung (23) in die Form

$$p_2'' = f(p_1, p_2, p_2') \tag{24}$$

so folgt durch Differentiation derselben nach t

$$p_2''' = \frac{\partial f}{\partial p_1} p_1' + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_2' + \frac{\partial f}{\partial p_2'} p_2'', \tag{25}$$

woraus sich

$$p_1' = \frac{p_2''' - \frac{\partial f}{\partial p_2} p_2' - \frac{\partial f}{\partial p_2'} p_2''}{\frac{\partial f}{\partial p_1}} \tag{26}$$

und nach (22)

$$p_1'' = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial p_1}}{\omega} \frac{p_2'''^2 - 2p_2'''\left(\frac{\partial f}{\partial p_2} p_2' + \frac{\partial f}{\partial p_2'} p_2''\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial p_2} p_2' + \frac{\partial f}{\partial p_2'} p_2''\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2} + \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial p_2}}{\omega} + \frac{P_2}{\omega} \tag{27}$$

ergiebt, und durch nochmalige Differentiation von (25) nach Substitution der Ausdrücke (26) und (27) die Gleichung

$$\begin{aligned} p_2'''' = {} & \left[p_2'''^2 - 2p_2'''\left(\frac{\partial f}{\partial p_2} p_2' + \frac{\partial f}{\partial p_2'} p_2''\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial p_2} p_2' + \frac{\partial f}{\partial p_2'} p_2''\right)^2\right] \\ & \cdot \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} - \frac{\frac{\partial \omega}{\partial p_1}}{\omega} \frac{\partial f}{\partial p_1}}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2} \\ & + 2\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2} p_2' + \frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2'} p_2''}{\frac{\partial f}{\partial p_1}}\left(p_2''' - \frac{\partial f}{\partial p_2} p_2' - \frac{\partial f}{\partial p_2'} p_2''\right) \\ & + \frac{\partial f}{\partial p_2'} p_2''' + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_2'' + \frac{\partial^2 f}{\partial p_2^2} p_2'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial p_2'} p_2' p_2'' \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial p_2'^2} p_2''^2 + \frac{\partial f}{\partial p_1}\left(\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial p_2}}{\omega} + \frac{P_2}{\omega}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Eliminirt man nunmehr aus dieser vermittelst der Gleichung (24) die Grösse p_1, so wird man das gesuchte Eliminationsresultat erhalten, und es wird zu untersuchen sein, unter welchen Bedingungen sich dasselbe mit der Gleichung (6) identificiren lässt. Setzt man die aus (24) sich ergebende inverse Function

$$p_1 = \varphi(p_2, p_2', p_2''), \tag{29}$$

so werden ähnlich wie oben in dem einfacheren Falle für Gleichung (8) sich die Beziehungen ergeben

$$
(30)\quad \begin{cases}
\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}}, \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\right) = -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2''^2}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)^3}, \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2}\right) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2''^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2 \partial p_2''}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)^3}, \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_2^2}\right) = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\right)^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2''^2} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2 \partial p_2''} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2^2}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)^3}, \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2'}\right) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2''^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2' \partial p_2''}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)^3}, \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial p_2'}\right) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2' \partial p_2''} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2 \partial p_2''} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2 \partial p_2'} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\frac{\partial}{}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)^3}, \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_2'^2}\right) = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\right)^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2''^2} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2' \partial p_2''} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2'^2}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)^3}
\end{cases}
$$

und ähnlich

$$
(31)\quad \begin{cases}
\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_1}\right) = \frac{\partial(\omega)}{\partial p_2'}\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}} = \frac{\partial(\omega)}{\partial p_2''}\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}}, \\
\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right) = \frac{\partial(\omega)}{\partial p_2} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}}\frac{\partial(\omega)}{\partial p_2''} = \frac{\partial(\omega)}{\partial p_2} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}}\frac{\partial(\omega)}{\partial p_2'}.
\end{cases}
$$

Da nun die Substitution (29) in (28) p_2''' nicht von Neuem einführt, so ergiebt sich als Coefficient von $p_2'''^2$

$$
-\frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_1}\right)}{(\omega)}\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} + \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2}
$$

oder mit Benutzung der Gleichungen (30) und (31)

$$- \frac{\frac{\partial}{\partial p_2''}\left((\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)}{(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}},$$

so dass die Identificirung von (28) mit (6) die Gleichung nach sich zieht

$$\frac{\frac{\partial}{\partial p_2''}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}\right)}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}} = \frac{\frac{\partial}{\partial p_2''}\left((\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)}{(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}}. \tag{32}$$

Ferner ergiebt sich als Coefficient von p_2''' in (28)

$$\frac{\left[2\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_1}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) - 2(\omega)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)p_2' + \left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)p_2''\right]}{(\omega)\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2}$$

$$+ \frac{2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2}\right)p_2' + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2'}\right)p_2'' + \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)},$$

oder wiederum mit Benutzung der Beziehungen (30), ferner der aus (23) und (24) sich ergebenden Identität

$$f = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial p_2}}{\omega}p_2'^2 + \frac{1}{\omega}\frac{\partial \Omega}{\partial p_1} + \frac{P_1}{\omega} \tag{33}$$

und also der durch Differentiation nach p_2' entspringenden Relation

$$\frac{\partial f}{\partial p_2'} = -2p_2'\frac{\frac{\partial \omega}{\partial p_2}}{\omega} \tag{34}$$

oder

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right) = 2p_2'\frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)}{(\omega)} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}} \tag{35}$$

der Coefficient von p_2'''

$$-2p_2'\frac{\frac{\partial\left((\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)}{\partial p_2}}{(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}} - 2p_2''\frac{\frac{\partial\left((\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)}{\partial p_2'}}{(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}},$$

so dass die Identificirung der Coefficienten von p_2''' in (28) und (6) verlangt, dass

$$p_2'\frac{\frac{\partial\left((\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)}{\partial p_2}}{(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}} + p_2''\frac{\frac{\partial\left((\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right)}{\partial p_2'}}{(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}} = p_2'\frac{\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}\right)}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}} + p_2''\frac{\frac{\partial}{\partial p_2'}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}\right)}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}} \tag{36}$$

in p_2, p_2', p_2'' identisch befriedigt wird. Setzt man ähnlich wie oben

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2''^2} = V, \quad (\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} = W,$$

so ergiebt sich zunächst aus (32)

$$V = W \cdot \psi(p_2, p_2')$$

und durch Einsetzen in (36)

$$p_2' \frac{\partial \log \psi(p_2, p_2')}{\partial p_2} + p_2'' \frac{\partial \log \psi(p_2, p_2')}{\partial p_2'} = 0,$$

woraus sich wie oben ψ als eine Constante c ergiebt, und somit als eine nothwendig zu erfüllende Bedingung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2''^2} = c(\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} \tag{37}$$

resultirt.

Bemerkt man ferner noch, dass der Coefficient der explicite vorkommenden Grösse $p_2''^2$ in der Gleichung (28) nach Substitution des Werthes von p_1 aus (29) durch den Ausdruck gegeben ist

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\right) - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_1}\right)}{(\omega)} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_2'^2}\right) - 2\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2'}\right),$$

oder mit Benutzung der Beziehungen (30) und (31) durch

$$-\frac{\frac{\partial}{\partial p_2'}\left((\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\right)}{(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}},$$

so lautet die zum Zwecke der Identificirung der Gleichungen (6) und (28) nach Substitution von (29) zu erfüllende Gleichung mit Benutzung der Beziehungen (30), (31) und (35)

$$\begin{aligned}(38)\quad & -p_2''^2 \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2'' \partial p_2'^2} - p_2''\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2'' \partial p_2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2'^2}\right) - 2p_2' p_2'' \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2 \partial p_2' \partial p_2''} \\ & - p_2'^2 \frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2^2 \partial p_2''} + p_2' \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2 \partial p_2'} - \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} + \mathfrak{P}\right) \\ = & -p_2''^2 c \frac{\partial}{\partial p_2'}\left[(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\right] - p_2'' c\left[(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} - (\omega)\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\right)^2}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}}\right] \\ & - 2p_2' p_2'' c \frac{\partial}{\partial p_2}\left[(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\right] - p_2'^2 c \frac{\partial}{\partial p_2}\left[(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\right] + \frac{1}{2} p_2' c(\omega) \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}} \\ & + c\left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_2}\right) + c(P_2),\end{aligned}$$

welche mit

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2} = c(\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} \tag{39}$$

zusammenzustellen ist, und es würde sich somit ergeben,

dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Eliminationsresultat zwischen den beiden Gleichungen (22) *und* (23) *wiederum die Lagrange'sche Form und zwar für ein kinetisches Potential zweiter Ordnung annimmt, die ist, dass die beiden Differentialgleichungen* (38) *und* (39) *ein gemeinsames Integral besitzen.*

Identificiert man, um zunächst hinreichende Bedingungen zu erhalten, die einzelnen Posten der beiden Seiten der Gleichung (38), wie es sich in dem oben behandelten einfacheren Falle als nothwendig ergab, so dass

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2} = c(\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2'' \partial p_2'} = c(\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2'' \partial p_2} = c(\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2'^2} = c(\omega) \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\right)^2}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_2'} = \frac{1}{2} c(\omega) \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + \mathfrak{P} = - c \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_2}\right) - c(P_2)$$

wird, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial p_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2''^2}\right) = \frac{\partial}{\partial p_2''} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2'' \partial p_2}\right)$$

nach (31) die Beziehung

$$c(\omega) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2'' \partial p_2} + c \frac{\partial(\omega)}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} = c(\omega) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2 \partial p_2''} + c \frac{\partial(\omega)}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} - c \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}$$

und daher, da die φ-Function von p_2'' nicht unabhängig sein kann,

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right) = 0$$

und somit nach (35)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'} = 0.$$

Aber dieser Fall bietet nichts Neues; denn da nach (21) das kinetische Potential erster Ordnung H die Form haben würde

$$H = \omega(p_1) p_1' p_2' + \Omega(p_1, p_2),$$

so ginge dasselbe durch die Substitution

$$\int \omega(p_1) dp_1 = q_1, \; p_2 = q_2$$

in

$$H = q_1' q_2' + \Omega_1(q_1, q_2)$$

über, und die Bewegungsgleichungen nähmen die oben behandelte Form (1) an.

Setzt man nun, wie sich aus (39) ergiebt,

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2''} = c \int (\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} \, dp_2'', \tag{40}$$

*)

also

$$\mathfrak{H} = c \int dp_2'' \int (\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} \, dp_2'', \tag{41}$$

so folgt nach (31)

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2'} = c \int (\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2'} \, dp_2'' \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} &= c \int (\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \, dp_2'' + \int dp_2' \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2'} \, dp_2'' \\ &= c \int (\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \, dp_2'' + c \int dp_2'' \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} \, dp_2'', \end{aligned} \tag{43}$$

wenn man beachtet, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_2''}\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\right] &= \frac{\partial}{\partial p_2''}\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2' \partial p_2''} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial p_1 \partial p_2}\right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2' \partial p_2''} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_2'}\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\right] \end{aligned}$$

ist, und es ist somit zunächst ersichtlich, dass

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2' \partial p_2''} = c(\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}, \tag{44}$$

also

$$\frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2'' \partial p_2'^2} = c \frac{\partial}{\partial p_2'}\left[(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\right]$$

und

$$\frac{\partial^3 \mathfrak{H}}{\partial p_2 \partial p_2' \partial p_2''} = c \frac{\partial}{\partial p_2}\left[(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\right] \tag{45}$$

ist; ferner wird

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2 \partial p_2''} = c(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + c \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} \, dp_2'' \tag{46}$$

und

*) was in Gleichung (13) der Annahme $\Omega = 0$ oder $a = b = 0$ entsprechen würde.

$$(47)\quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2'^2} = c\int(\omega)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2'^2}\,dp_2'' + c\int\frac{\partial(\omega)}{\partial p_2'}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_2'}\,dp_2''$$

$$= c\int(\omega)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2'^2}\,dp_2'' + c\int\frac{\partial(\omega)}{\partial p_2''}\,\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_2'}\right)^2}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}}\,dp_2''$$

$$= c\int(\omega)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2'^2}\,dp_2'' + c(\omega)\,\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_2'}\right)^2}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}}$$

$$- c\int(\omega)\,\frac{\partial}{\partial p_2''}\left(\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_2'}\right)^2}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}}\right)dp_2''$$

$$= c(\omega)\,\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_2'}\right)^2}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}}$$

$$+ c\int(\omega)\,\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_2'}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2''^2} - 2\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_2'}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2'\partial p_2''} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2'^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}\right)^2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}\right)^3}\,dp_2''.$$

Nun folgt aber aus der in p_1, p_2, p_2' identischen Gleichung

$$f = -\frac{\frac{\partial\omega}{\partial p_2}}{\omega}\,p_2'^2 + \frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\Omega}{\partial p_1} + \frac{P_1}{\omega}$$

durch zweimalige Differentiation nach p_2'

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_2'^2} = -2\,\frac{\frac{\partial\omega}{\partial p_2}}{\omega},$$

und daher auch in p_2, p_2', p_2'' identisch

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_2'^2}\right) = -2\,\frac{\left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2}\right)}{(\omega)}$$

oder nach (30)

$$\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_2'}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2''^2} - 2\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_2'}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2'\partial p_2''} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2'^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}\right)^2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}\right)^3} = 2\,\frac{\left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2}\right)}{(\omega)},$$

so dass sich aus (47)

$$(48)\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_2'^2} = c(\omega)\,\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_2'}\right)^2}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}} + 2c\int\left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}\,dp_2'',$$

und somit aus (46) und (48)

$$(49)\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2 \partial p_2''} - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2'^2} = c\left((\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} - (\omega)\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\right)^2}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}} \right) - c\int \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\, dp_2''$$

ergiebt. Endlich folgt aus (46)

$$(50)\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2^2 \partial p_2''} = c\,\frac{\partial}{\partial p_2}\left[(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\right] + c\,\frac{\partial}{\partial p_2}\int \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\, dp_2'',$$

und da nach (35)

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} = \frac{1}{2p_2'}(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}$$

ist,

$$p_2'^2\,\frac{\partial}{\partial p_2}\int \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\, dp_2'' = \frac{p_2'}{2}\,\frac{\partial}{\partial p_2}\int (\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\, dp_2'' = \frac{p_2'}{2c}\,\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2 \partial p_2'},$$

und es geht somit die in p_2, p_2', p_2'' identisch zu befriedigende Gleichung (38) in

$$(51)\quad p_2''\int \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}\, dp_2'' + \frac{1}{2c}\,p_2'\,\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial p_2 \partial p_2'} - \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} - \frac{1}{c}\,\mathfrak{P}$$

$$= \frac{1}{2}\,p_2'(\omega)\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_2}\right) + (P_2)$$

über, so dass sich durch Differentiation nach p_2'' mit Hülfe der Ausdrücke (45) und (46) als die in p_2, p_2', p_2'' identisch zu befriedigende Gleichung

$$(52)\quad p_2''\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} + \frac{1}{2}\,p_2'\,\frac{\partial}{\partial p_2}\left[(\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}\right]$$

$$- \frac{1}{2}\,p_2'\,\frac{\partial}{\partial p_2''}\left[(\omega)\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2'}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''}}\right] - (\omega)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_2''}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_2}\right) + \frac{\partial (P_2)}{\partial p_2''}$$

ergiebt.

Beachtet man nun, dass nach den Gleichungen (30)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_2''} = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_2'} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)}$$

ist, so wird die Gleichung (52) mit Hülfe von (31) und durch Substitution der aus

$$p_2'' = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial p_2}}{\omega}\,p_2'^2 + \frac{1}{\omega}\,\frac{\partial \Omega}{\partial p_1} + \frac{P_1}{\omega}$$

hervorgehenden Beziehung

$$p_2'' = \frac{1}{2}\, p_2' \left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right) + \frac{1}{(\omega)} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_1}\right) + \left(\frac{P_1}{\omega}\right)$$

in die mit Weglassung der Klammern in p_1, p_2, p_2' identische Gleichung übergehen

$$(53) \quad -\frac{1}{2}\, p_2' \frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial p_2'}\, \omega + \frac{\partial f}{\partial p_2}\, \omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p_1 \partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial \Omega}{\partial p_1} + \frac{P_1}{\omega}\right) \frac{\partial \omega}{\partial p_2},$$

also, wie aus der Form von f hervorgeht,

$$(54) \quad -\omega \frac{\partial}{\partial p_2}\left[\frac{1}{\omega}\frac{\partial \Omega}{\partial p_1} + \frac{P_1}{\omega}\right] + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p_1 \partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial \Omega}{\partial p_1} + \frac{P_1}{\omega}\right) \frac{\partial \omega}{\partial p_2} = 0$$

oder, wie unmittelbar zu sehen,

$$(55) \quad \frac{\partial P_1}{\partial p_2} = \frac{\partial P_2}{\partial p_1}$$

identisch in p_1 und p_2 erfüllt sein müssen.

Da nun aber die Gleichungen (22) und (23) die Form haben

$$p_1'' = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial p_1}}{\omega}\, p_1'^2 + \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_2} + P_2\right)$$

$$p_2'' = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial p_2}}{\omega}\, p_2'^2 + \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_1} + P_1\right),$$

und vermöge der Gleichung (55) eine Function Ω_1 von p_1 und p_2 existirt, für welche

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial p_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial p_1} + P_1, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial p_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial p_2} + P_2$$

ist, so wird man bei der Untersuchung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die geforderte Form des Eliminationsresultates gleich von vornherein von den Lagrange'schen Gleichungen

$$p_1'' = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial p_1}}{\omega}\, p_1'^2 + \frac{1}{\omega}\frac{\partial \Omega_1}{\partial p_2}$$

$$p_2'' = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial p_2}}{\omega}\, p_2'^2 + \frac{1}{\omega}\frac{\partial \Omega_1}{\partial p_1}$$

oder von dem kinetischen Potential

$$H = \omega p_1' p_2' + \Omega_1$$

ausgehen können, und es nähme sodann die durch die Gleichung (53) ausgedrückte Bedingung die Form an

$$-\frac{1}{2}\,p_2'\,\frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial p_2'}\,\omega+\frac{\partial f}{\partial p_2}\,\omega=\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial p_1\partial p_2}-\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\Omega_1}{\partial p_1}\,\frac{\partial\omega}{\partial p_2},$$

welche vermöge

$$f=-\frac{\frac{\partial\omega}{\partial p_2}}{\omega}\,p_2'^2+\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\Omega_1}{\partial p_1}$$

und somit

$$\frac{\partial f}{\partial p_2'}=-2\,\frac{\frac{\partial\omega}{\partial p_2}}{\omega}\,p_2'$$

identisch befriedigt wird.

Fassen wir nunmehr die im Obigen erhaltenen Resultate zusammen, so ergiebt sich der folgende Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dass die dem kinetischen Potentiale

$$H=\omega(p_1,p_2)p_1'p_2'+\Omega(p_1,p_2)$$

— auf welche Form sich, wie gezeigt worden, jedes kinetische Potential erster Ordnung bringen lässt — zugehörigen Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}-\frac{d}{dt}\,\frac{\partial H}{\partial p_1'}+P_1=0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_2}-\frac{d}{dt}\,\frac{\partial H}{\partial p_2'}+P_2=0,$$

in welchen P_1 und P_2 Functionen von p_1 und p_2 bedeuten, durch Elimination der Variabeln p_1 auf ein Eliminationsresultat in p_2 führen, welches die erweiterte Lagrange'sche Form für ein kinetisches Potential zweiter Ordnung $\mathfrak{H}$ hat, also die Gestalt besitzt

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial p_2}-\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial p_2'}+\frac{d^2}{dt^2}\,\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial p_2''}+\mathfrak{P}=0,$$

worin $\mathfrak{P}$ eine Function von p_2 sein soll, ist im Allgemeinen die, dass

$$\frac{\partial P_1}{\partial p_2}=\frac{\partial P_2}{\partial p_1}$$

ist, und zwar hat dann das kinetische Potential $\mathfrak{H}$ die Form

$$\mathfrak{H}=\int dp_2''\int(\omega)\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_2''}\,dp_2'',$$

wenn der Parameter p_1 aus der zweiten Lagrange'schen Gleichung

$$p_2''=-\frac{\frac{\partial\omega}{\partial p_2}}{\omega}\,p_2'^2+\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\Omega}{\partial p_1}+P_2$$

als Function von p_2, p_2', p_2'' *ausgedrückt in der Form*

$$p_1 = \varphi(p_2, p_2', p_2'')$$

dargestellt wird und

$$(\omega) = \omega\left(\varphi(p_2, p_2', p_2''), p_2\right)$$

ist.

Da das oben behandelte Problem aber nicht nur vom Standpunkte der Mechanik ein gewisses Interesse darbietet sondern vor allem die Frage nach der Elimination von Variabeln zwischen Differentialgleichungen betrifft, so will ich noch einen anderen Weg zur Lösung der oben behandelten Aufgabe bezeichnen, der von der Anzahl der Parameter und der oben gewählten Normalform des kinetischen Potentials unabhängig ist, der Kürze halber hier jedoch nur für zwei Parameter dargestellt wird.

Sei also H wiederum ein kinetisches Potential erster Ordnung und somit die Lagrange'schen Gleichungen, wenn der Kürze halber die äussern Kräfte gleich Null gesetzt werden,

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1'} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_2'} = 0, \tag{56}$$

so wird nach den früheren Auseinandersetzungen die Form der Eliminationsgleichung vierter Ordnung in p_2

$$P = 0 \tag{57}$$

zu untersuchen sein, welche durch Elimination der Grössen

$$p_1, p_1', p_1'', p_1''', p_1''''$$

aus den Gleichungen (56) und den durch Differentiation nach t aus diesen erhaltenen

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p_1'} = 0, & \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p_2'} = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial H}{\partial p_1'} = 0, & \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial H}{\partial p_2'} = 0 \end{cases} \tag{58}$$

hervorgeht.

Da aber, wie leicht zu sehen,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H'}{\partial p_1}, \quad \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H''}{\partial p_1},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1'} = \frac{\partial H'}{\partial p_1'} - \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p_1'} = \frac{\partial H''}{\partial p_1'} - 2\frac{\partial H'}{\partial p_1},$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial H}{\partial p_1'} = \frac{\partial H'''}{\partial p_1'} - 3\frac{\partial H'}{\partial p_1}$$

ist, so können die 6 Gleichungen (56) und (58) in der Form dargestellt werden

$$(59)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{\partial H}{\partial p_1} - \dfrac{\partial H'}{\partial p_1'} = 0, & 2\dfrac{\partial H}{\partial p_2} - \dfrac{\partial H'}{\partial p_2'} = 0, \\ 3\dfrac{\partial H'}{\partial p_1} - \dfrac{\partial H''}{\partial p_1'} = 0, & 3\dfrac{\partial H'}{\partial p_2} - \dfrac{\partial H''}{\partial p_2'} = 0, \\ 4\dfrac{\partial H''}{\partial p_1} - \dfrac{\partial H'''}{\partial p_1'} = 0, & 4\dfrac{\partial H''}{\partial p_2} - \dfrac{\partial H'''}{\partial p_2'} = 0, \end{cases}$$

für welche wiederum (57) das Eliminationsresultat darstellen soll, von welchem wir also verlangen, dass sich dasselbe in der Form

$$(60)\qquad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2''} = 0$$

ergebe, wenn $\mathfrak{H}$ ein kinetisches Potential zweiter Ordnung, also eine Function von p_2, p_2', p_2'' bedeutet.

Soll aber eine solche Function $\mathfrak{H}$ existiren, dass

$$P = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2''}$$

identisch befriedigt ist, so geben die bekannten*) nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines kinetischen Potentials die beiden identisch zu befriedigenden Gleichungen

$$(61)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{\partial P}{\partial p_1'} - 2\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial P}{\partial p_2''} + \dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{\partial P}{\partial p_2'''} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial p_2'''} - 2\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial P}{\partial p_2''''} = 0, \end{cases}$$

oder mit Hülfe einer einfachen Umformung

$$(62)\qquad \begin{cases} 5\dfrac{\partial P}{\partial p_2'} - 4\dfrac{\partial P'}{\partial p_2''} + \dfrac{\partial P''}{\partial p_2'''} = 0, \\ 3\dfrac{\partial P}{\partial p_2'''} - 2\dfrac{\partial P'}{\partial p_2''''} = 0, \end{cases}$$

und die Darstellung dieser Bedingungen in dem kinetischen Potential H wird die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür ergeben, dass die Elimination des einen Parameters auf eine Lagrange'sche Gleichung mit einem kinetischen Potential zweiter Ordnung $\mathfrak{H}$ in dem andern Parameter führt.

Wie nun die Transformation der Gleichungen (62) in das ursprüngliche kinetische Potential H und dessen Differentialquotienten zu vollziehen ist, lässt sich unmittelbar einsehen. Setzt man nämlich zunächst zur Abkürzung die 6 Gleichungen (59) in die Form

*) Vergl. Hirsch „Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials" Mathem. Annalen Bd. 50, K. Boehm „Die Existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Coordinaten abhängigen kinetischen Potentials" Journ. für Mathem. Bd. 120.

$$(63)\qquad G_1 = 0,\ G_2 = 0,\ G_3 = 0,\ G_4 = 0,\ G_5 = 0,\ G_6 = 0,$$

deren Eliminationsresultat P dadurch erhalten werden soll, dass ein Werthsystem von $p_1, p_1', p_1'', p_1''', p_1''''$ aus den fünf ersten Gleichungen in p_2, p_2', p_2'', p_2''' ausgedrückt in G_6 eingesetzt wird, so ist unmittelbar ersichtlich, dass, wenn die eingeklammerten Grössen die Werthe derselben für das betreffende Werthsystem darstellen, und

$$(64)\qquad D_\beta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1}\right) & \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1'}\right) & \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1''}\right) & \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1'''}\right) & \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1''''}\right) & \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_2^{(\beta)}}\right) \\ \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_1}\right) & \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_1'}\right) & \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_1''}\right) & \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_1'''}\right) & \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_1''''}\right) & \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_2^{(\beta)}}\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\partial G_6}{\partial p_1}\right) & \left(\frac{\partial G_6}{\partial p_1'}\right) & \left(\frac{\partial G_6}{\partial p_1''}\right) & \left(\frac{\partial G_6}{\partial p_1'''}\right) & \left(\frac{\partial G_6}{\partial p_1''''}\right) & \left(\frac{\partial G_6}{\partial p_2^{(\beta)}}\right) \end{vmatrix}$$

und

$$(65)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1}\right) & \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1'}\right) & \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1''}\right) & \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1'''}\right) & \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1''''}\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\partial G_5}{\partial p_1}\right) & \left(\frac{\partial G_5}{\partial p_1'}\right) & \left(\frac{\partial G_5}{\partial p_1''}\right) & \left(\frac{\partial G_5}{\partial p_1'''}\right) & \left(\frac{\partial G_5}{\partial p_1''''}\right) \end{vmatrix}$$

gesetzt wird, da $P = (G_6)$ und

$$\frac{\partial (G_6)}{\partial p_2^{(\beta)}} = \frac{D_\beta}{\Delta}$$

ist,

$$(66)\qquad \frac{\partial P}{\partial p_2^{(\beta)}} = \frac{D_\beta}{\Delta}$$

wird, worin β die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 bedeutet.

Da sich nun aus den durch (63) dargestellten Gleichungen (59), weil das kinetische Potential H nur von den ersten Ableitungen abhängen sollte,

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial p_1^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial p_1 \partial p_1'}\right),\quad \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1'}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_1'}\right) - \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial p_1'^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1''}\right) = -\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial p_1' \partial p_1''}\right),\quad \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1'''}\right) = 0,\quad \left(\frac{\partial G_1}{\partial p_1''''}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial p_2^{(\beta)}}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2^{(\beta)}}\right) - \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial p_1' \partial p_2^{(\beta)}}\right),$$

$$\left(\frac{\partial G_2}{\partial p_1}\right) = 3\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial p_1^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 H''}{\partial p_1 \partial p_1'}\right),\quad \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_1'}\right) = 3\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial p_1 \partial p_1'}\right) - \left(\frac{\partial^2 H''}{\partial p_1'^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial G_2}{\partial p_1''}\right) = 3\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial p_1 \partial p_1''}\right) - \left(\frac{\partial^2 H''}{\partial p_1' \partial p_1''}\right),$$

$$\left(\frac{\partial G_2}{\partial p_1'''}\right) = -\left(\frac{\partial^2 H''}{\partial p_1' \partial p_1'''}\right),\quad \left(\frac{\partial G_2}{\partial p_1''''}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial G_2}{\partial p_2^{(\beta)}}\right) = 3\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial p_1 \partial p_2^{(\beta)}}\right) - \left(\frac{\partial^2 H''}{\partial p_1' \partial p_2^{(\beta)}}\right),$$

$$\left(\frac{\partial G_3}{\partial p_1}\right) = 4\left(\frac{\partial^2 H''}{\partial p_1^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 H'''}{\partial p_1 \partial p_1'}\right), \quad \left(\frac{\partial G_3}{\partial p_1'}\right) = 4\left(\frac{\partial^2 H''}{\partial p_1 \partial p_1'}\right) - \left(\frac{\partial^2 H''}{\partial p_1'^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial G_3}{\partial p_1''}\right) = 4\left(\frac{\partial^2 H''}{\partial p_1 \partial p_1''}\right) - \left(\frac{\partial^2 H'''}{\partial p_1' \partial p_1''}\right),$$

$$\left(\frac{\partial G_3}{\partial p_1'''}\right) = 4\left(\frac{\partial^2 H''}{\partial p_1 \partial p_1'''}\right) - \left(\frac{\partial^2 H'''}{dp_1' \partial p_1'''}\right),$$

$$\left(\frac{\partial G_3}{\partial p_1''''}\right) = \left(\frac{\partial^2 H'''}{\partial p_1' \partial p_1''''}\right), \quad \left(\frac{\partial G_3}{\partial p_2^{(\beta)}}\right) = 4\left(\frac{\partial^2 H''}{\partial p_1 \partial p_2^{(\beta)}}\right) - \left(\frac{\partial^2 H'''}{\partial p_1' \partial p_2^{(\beta)}}\right),$$

und die analogen Differentialquotienten von G_4, G_5, G_6 sich aus eben diesen Formen ergeben, wenn nur die ersten partiellen Differentialquotienten von H nach p_2 genommen werden, so werden die Gleichungen (62) mit Hülfe der Beziehungen (66) die beiden nothwendigen und hinreichenden Bedingungen ergeben, welche erfüllt sein müssen, wenn das Eliminationsresultat eine Lagrange'sche Gleichung für die Variable p_2 und für ein kinetisches Potential $\mathfrak{H}$ von der zweiten Ordnung liefern soll. Diese Bedingungen sind in einfacher Form zunächst noch ausgedrückt in den eingeklammerten partiellen Differentialquotienten von H nach p_1, p_2 und deren nach der Zeit genommenen Differentialquotienten bis zur 4ten Ordnung hin und liefern in p_2, p_2', p_2'', p_2''' identische Beziehungen; setzt man nun die aus den 5 ersten Gleichungen (59) sich ergebenden inversen Werthe von p_1'', p_1''', p_1'''', p_2'', p_2''' durch p_1, p_1', p_2, p_2' ausgedrückt in die eben gefundenen Bedingungsgleichungen ein, so führt man die eingeklammerten Ausdrücke leicht wieder in die ursprünglichen Werthe über, indem z. B.

$$\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial p_1 \partial p_1'}\right) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2}\right) + \left(\frac{\partial^3 H}{\partial p_1^2 \partial p_1'}\right)(p_1') + \left(\frac{\partial^3 H}{\partial p_1 \partial p_2 \partial p_1'}\right) p_2' + \left(\frac{\partial^3 H}{\partial p_1 \partial p_1'^2}\right)(p_1'') + \left(\frac{\partial^3 H.}{\partial p_1 \partial p_1' \partial p_2'}\right) p_2''$$

ist und durch die inverse Substitution die rechte Seite in

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^3 H}{\partial p_1^2 \partial p_1'} p_1' + \frac{\partial^3 H}{\partial p_1 \partial p_2 \partial p_2'} p_2' + \frac{\partial^3 H}{\partial p_1 \partial p_1'^2} [p_1''] + \frac{\partial^3 H}{\partial p_1 \partial p_1' \partial p_2'} [p_2'']$$

übergeht, worin $[p_1'']$ und $[p_2'']$ zu ersetzen sind durch die aus den beiden in p_1'' und p_2'' linearen Gleichungen

$$2\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial H'}{\partial p_1'} = 0, \quad 2\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial H'}{\partial p_2'} = 0$$

hervorgehenden Werthe dieser Grössen in p_1, p_2, p_1', p_2' ausgedrückt, und wir erhalten somit unmittelbar durch Weglassen der Klammern und durch Substitution der Werthe von p_1'', p_2'', p_1''', p_2''', p_1'''', p_2''''

aus den Gleichungen (59) als Functionen von p_1, p_2, p_1', p_2' aus den beiden oben gefundenen, in $p_2, p_2', p_2'', p_2''', p_2''''$ identischen Gleichungen nunmehr zwei in p_1, p_2, p_1', p_2' identische Gleichungen als nothwendige und hinreichende Bedingungen in dem kinetischen Potential H und dessen partiellen Differentialquotienten ausgedrückt dafür, dass die Eliminationsgleichung in p_2 wiederum eine Lagrange'sche Gleichung für ein kinetisches Potential zweiter Ordnung ist.

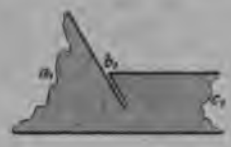
Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass die in der vorliegenden Arbeit aufgestellten nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Elimination von Parametern zwischen Lagrange'schen Gleichungen wieder zu Lagrange'schen Gleichungen mit weniger Parametern, aber für ein kinetisches Potential $\mathfrak{H}$ höherer Ordnung führt, zugleich dadurch, dass die allgemeine Form des Potentiales $\mathfrak{H}$ gefunden worden, die für die Anwendungen vielleicht nicht unwesentliche Frage beantwortet, wann ein auf ein kinetisches Potential höherer Ordnung oder auf Kräfte höherer Gattung führendes Problem reducirt werden kann auf ein Problem mit mehr unabhängigen Parametern oder mit mehr gegebenen oder verborgenen Punkten, aber mit einem kinetischen Potentiale niederer Ordnung oder Kräften niederer Gattung.

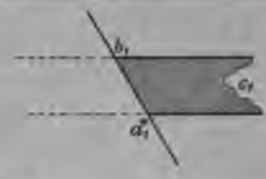
Heidelberg 25. Juni 1898.

Zum Aufsatz: Schilling, symmetrische S-Funktionen mit einfachem Nebenpunkt.

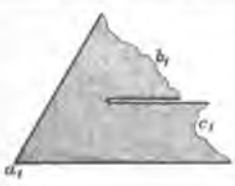
I. $\lambda=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{3}, \nu=0$

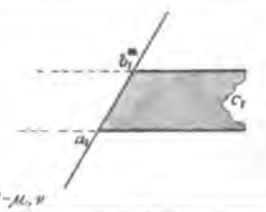
II. $\lambda=\frac{5}{12}, \mu=\frac{1}{3}, \nu^2=\frac{1}{2}$

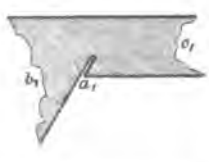


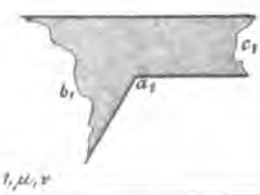


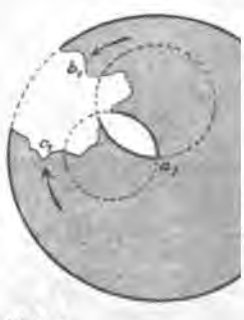
III. $\lambda=\frac{1}{2}, \mu^2=\frac{1}{27}\log 3,$

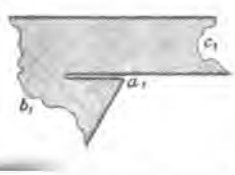




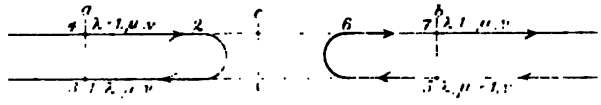


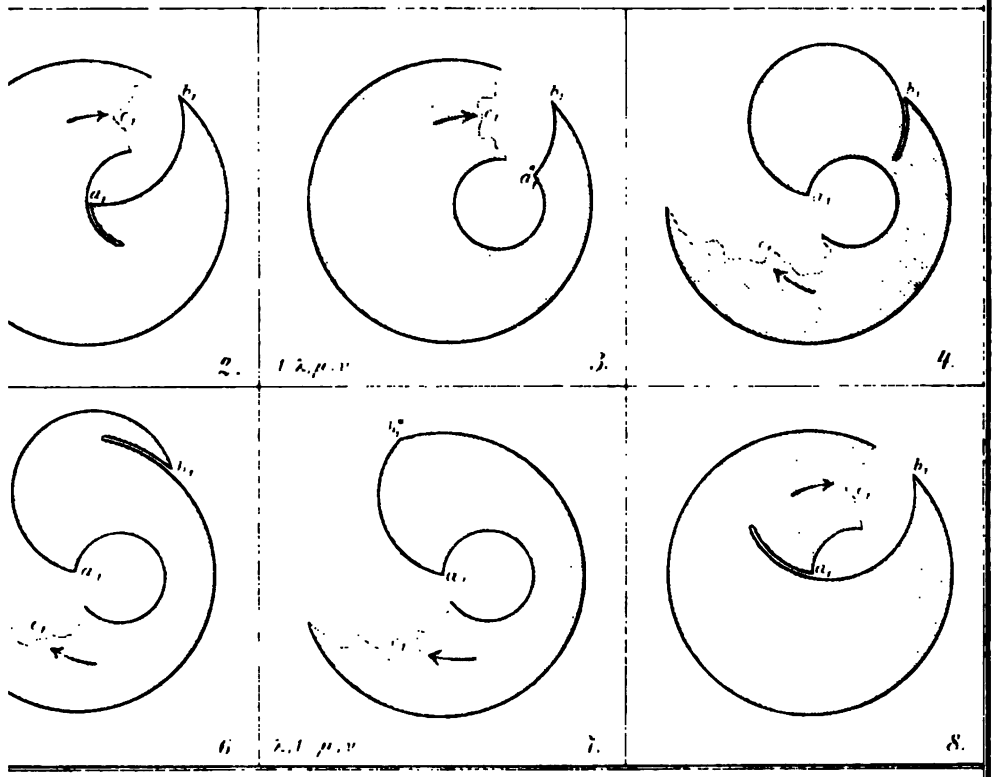


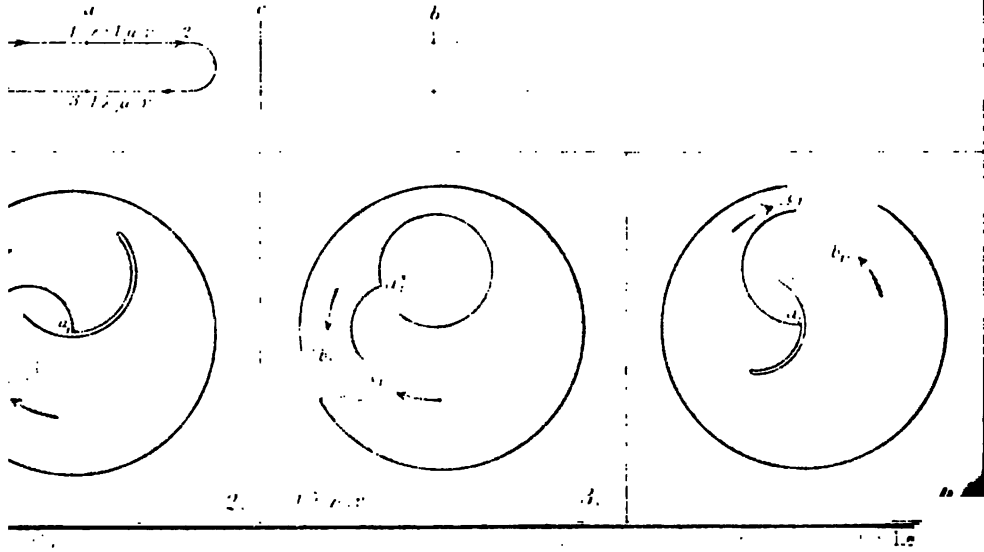




Dreieck des Uebergangsfalles.







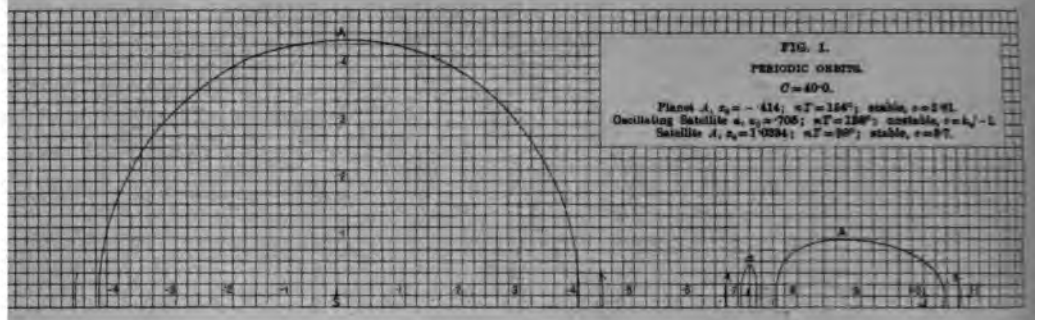


FIG. 1.
PERIODIC ORBITS.
$C = 40{\cdot}0$.
Planet A, $z_0 = -{\cdot}414$; $n\Gamma = 184°$; stable, $c = 2{\cdot}91$.
Oscillating Satellite a, $z_0 = {\cdot}705$; $n\Gamma = 256°$; unstable, $c = k\sqrt{-1}$.
Satellite A, $z_0 = 1{\cdot}0394$; $n\Gamma = 90°$; stable, $c = 3{\cdot}7$.

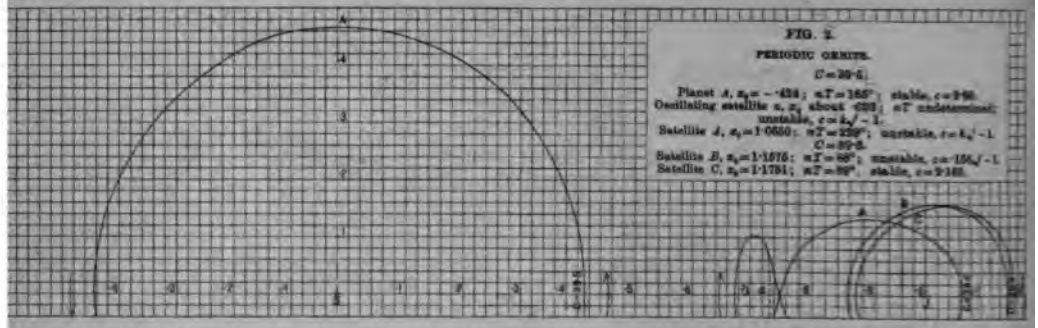


FIG. 2.
PERIODIC ORBITS.
$C = 39{\cdot}6$.
Planet A, $z_0 = -{\cdot}434$; $n\Gamma = 165°$; stable, $c = 2{\cdot}86$.
Oscillating satellite a, z_0 about $\cdot 633$; $n\Gamma$ undetermined; unstable, $c = k\sqrt{-1}$.
Satellite A, $z_0 = 1{\cdot}0650$; $n\Gamma = 259°$; unstable, $c = k\sqrt{-1}$.
$C = 39{\cdot}8$.
Satellite B, $z_0 = 1{\cdot}1575$; $n\Gamma = 68°$; unstable, $c = 156\sqrt{-1}$.
Satellite C, $z_0 = 1{\cdot}1781$; $n\Gamma = 90°$; stable, $c = 2{\cdot}165$.

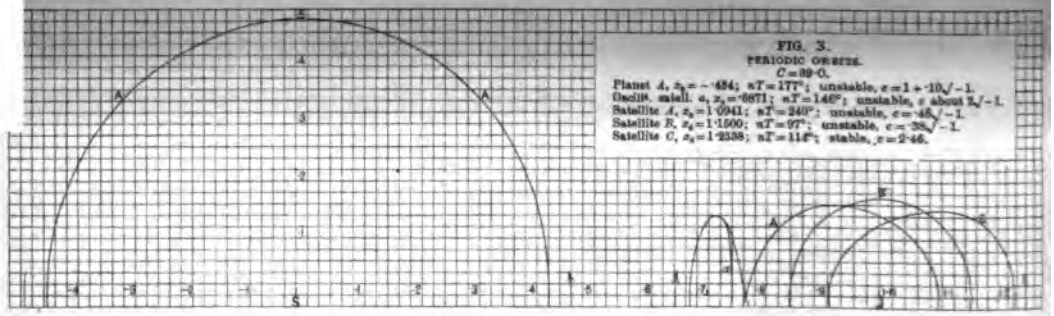


FIG. 3.
PERIODIC ORBITS.
$C = 39{\cdot}0$.
Planet A, $z_0 = -{\cdot}434$; $n\Gamma = 177°$; unstable, $c = 1 + 10\sqrt{-1}$.
Oscill. satell. a, $z_0 = {\cdot}6871$; $n\Gamma = 146°$; unstable, c about $2\sqrt{-1}$.
Satellite A, $z_0 = 1{\cdot}0941$; $n\Gamma = 240°$; unstable, $c = -45\sqrt{-1}$.
Satellite B, $z_0 = 1{\cdot}1500$; $n\Gamma = 97°$; unstable, $c = -38\sqrt{-1}$.
Satellite C, $z_0 = 1{\cdot}2338$; $n\Gamma = 114°$; stable, $c = 2{\cdot}46$.

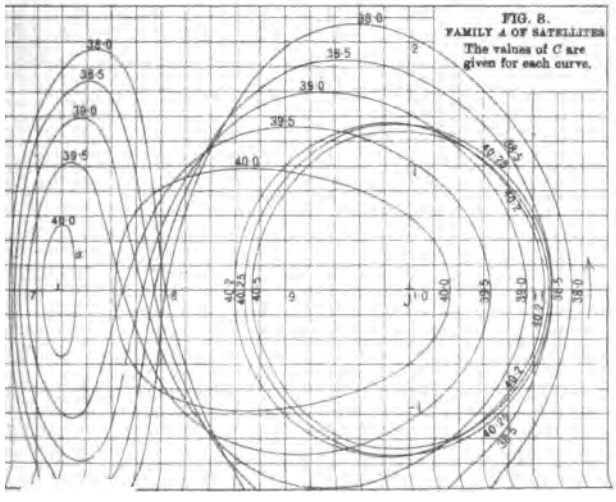


FIG. 8.
FAMILY A OF SATELLITES
The values of C are given for each curve.

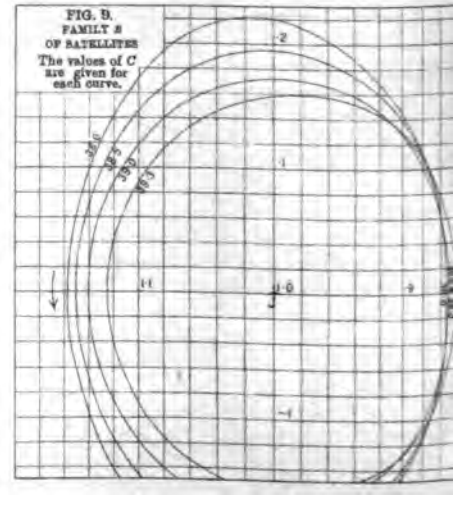
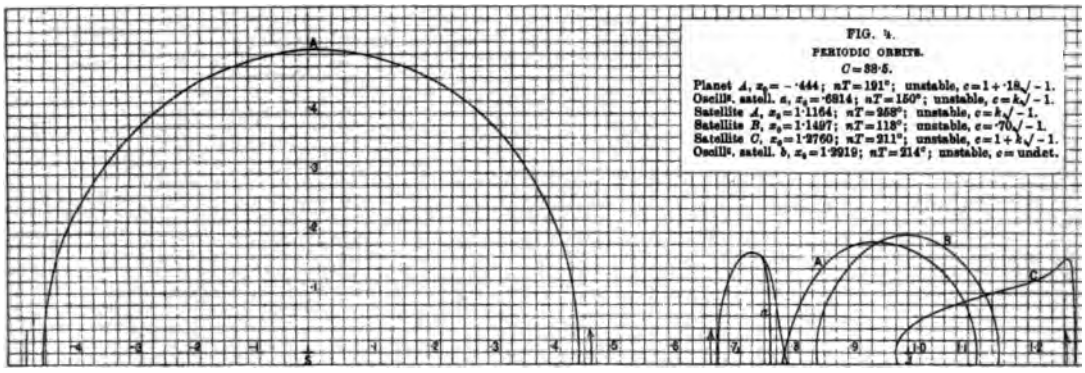
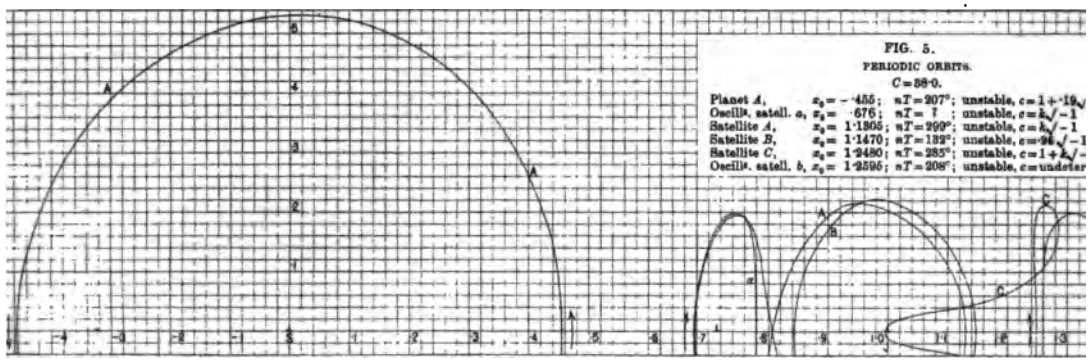
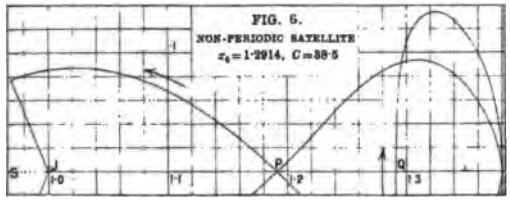
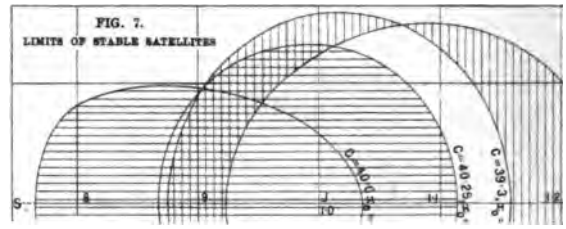


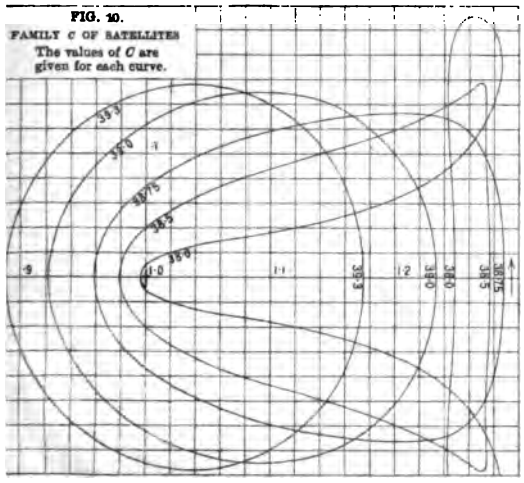
FIG. 9.
FAMILY B OF SATELLITES
The values of C are given for each curve.

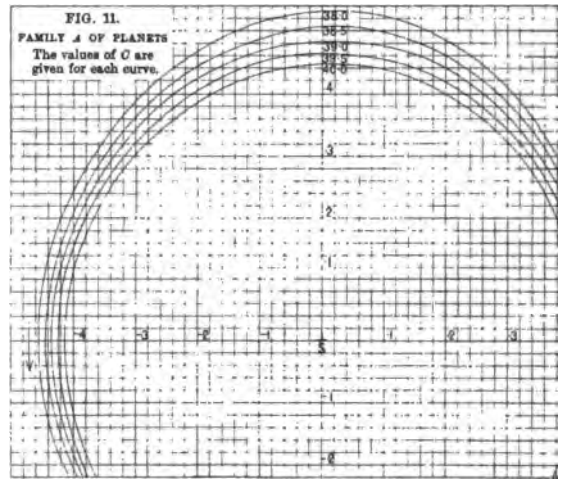












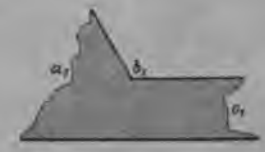
eipzig.

Photolith. Meisenbach Riffarth

Zum Aufsatz: Schilling, symmetrische S-Functionen mit einfachem Nebenpunkt.

I. $\lambda=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{2}, \nu=0$.

1.

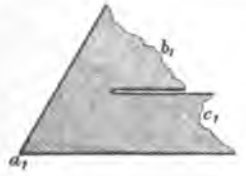


$\lambda,\mu+1,\nu$ 2.

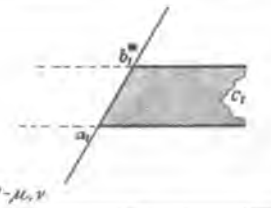
3.

$1-\lambda,\mu,\nu$ 4.

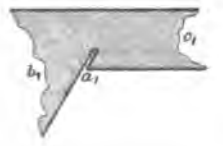
5.



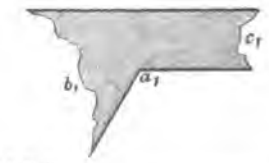
6.



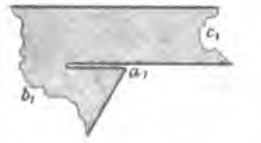
$\lambda,1-\mu,\nu$ 7.



8.

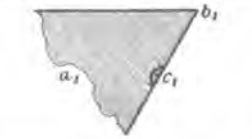


$\lambda+1,\mu,\nu$ 9.



10.

Dreiecke des Uebergangsfalles.



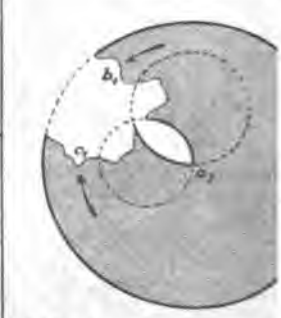
$\lambda,\mu,1\pm\nu$ 11.

II. $\lambda=\frac{5}{12}, \mu=\frac{1}{3}, \nu^2=-\frac{1}{36}$

$\lambda+1,\mu,\nu$

$\lambda,\mu+1,\nu$

III. $\lambda=\frac{1}{2}, \mu''i=\frac{1}{36}\log 3$.



$\lambda+1,\mu,\nu$

MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY

STORAGE AREA

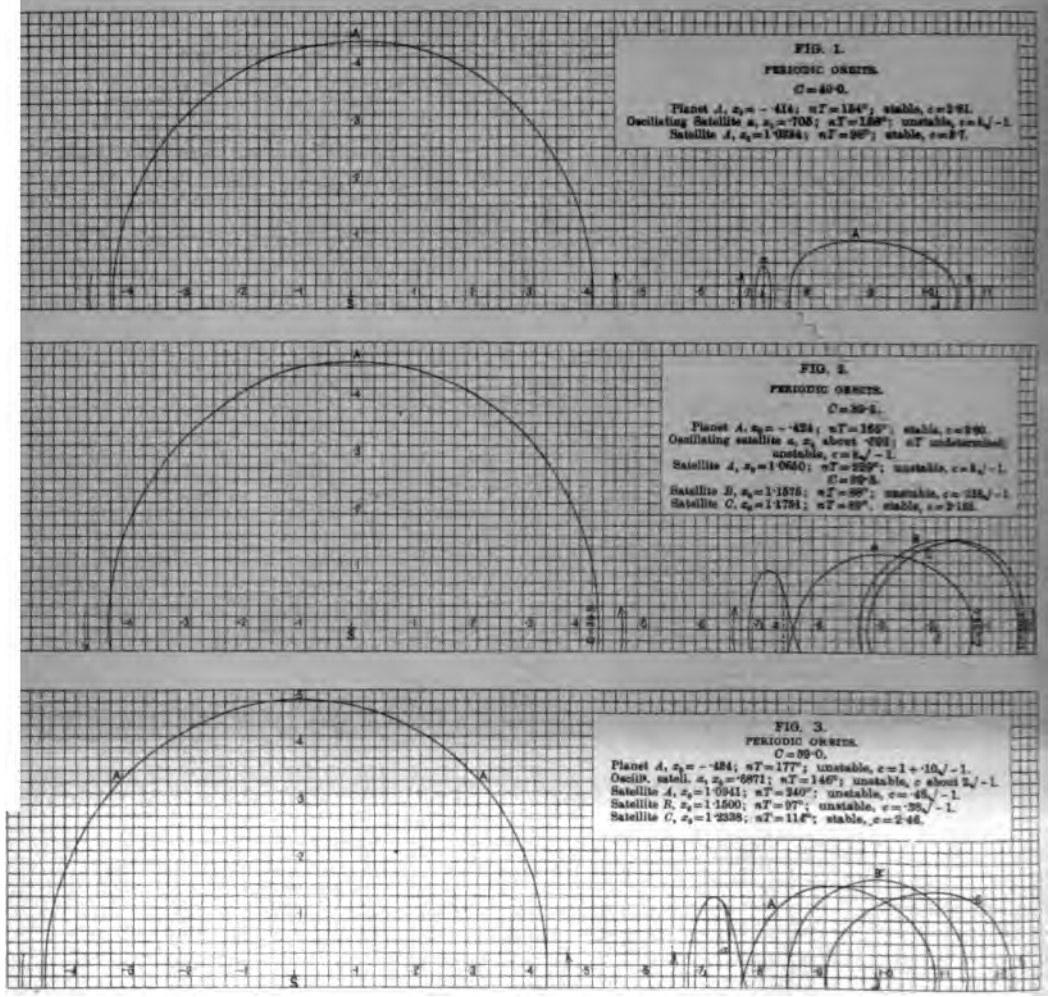


FIG. 1.
PERIODIC ORBITS.
C = 40·0.
Planet A, z₀ = − ·414; nT = 184°; stable, c = 2·91.
Oscillating Satellite a, z₀ = ·705; nT = 188°; unstable, c = k/ − 1.
Satellite A, z₀ = 1·0334; nT = 96°; stable, c = 2·7.
FIG. 2.
PERIODIC ORBITS.
C = 39·5.
Planet A, z₀ = − ·424; nT = 166°; stable, c = 2·90.
Oscillating satellite a, z₀ about ·691; nT undetermined; unstable, c = k/ − 1.
Satellite A, z₀ = 1·0650; nT = 229°; unstable, c = k/ − 1.
C = 39·5.
Satellite B, z₀ = 1·1575; nT = 88°; unstable, c = 2k/ − 1.
Satellite C, z₀ = 1·4781; nT = 69°; stable, c = 2·182.
FIG. 3.
PERIODIC ORBITS.
C = 39·0.
Planet A, z₀ = − ·424; nT = 177°; unstable, c = 1 + ·10k/ − 1.
Oscill. satell. a, z₀ = ·6871; nT = 146°; unstable, c about 2k/ − 1.
Satellite A, z₀ = 1·0941; nT = 340°; unstable, c = ·48k/ − 1.
Satellite B, z₀ = 1·1500; nT = 97°; unstable, c = ·35k/ − 1.
Satellite C, z₀ = 1·2338; nT = 114°; stable, c = 2·46.

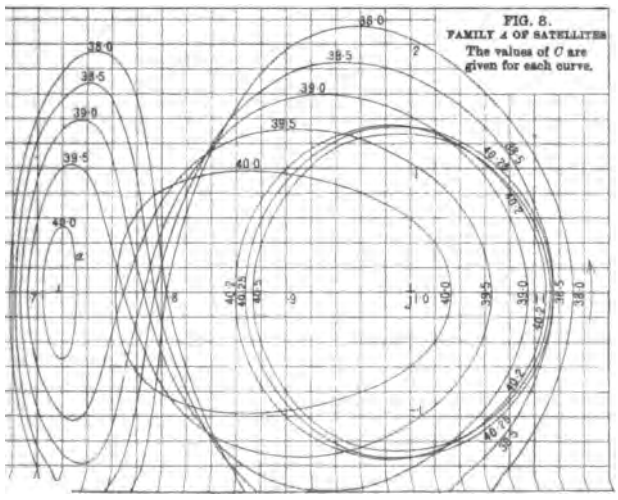


FIG. 8.
FAMILY A OF SATELLITES
The values of C are given for each curve.

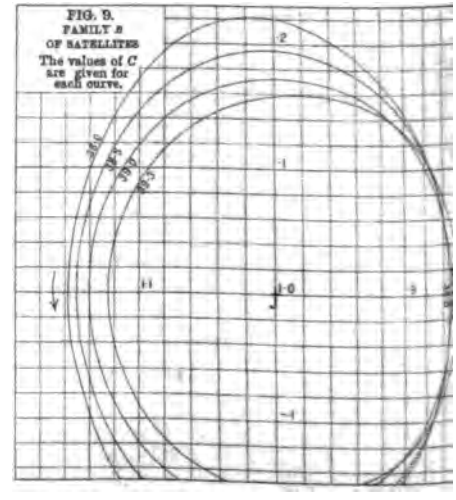


FIG. 9.
FAMILY B
OF SATELLITES
The values of C are given for each curve.